

Integrali indefiniti

FUNZIONI PRIMITIVE

Definizione

$F(x)$ si dice “funzione primitiva” di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$

Esempio

Quali sono le funzioni primitive di $f(x) = \cos x$?

Ricordando che $D(\sin x) = \cos x$ avrò che $F(x) = \sin x$ ma anche $y = \sin x + c$ (con $c \in \mathbb{R}$) risulta funzione primitiva di $f(x) = \cos x$ poiché $D(\sin x + c) = \cos x$.

Abbiamo quindi il seguente teorema:

Teorema: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x) \Rightarrow$ anche $F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$) è una primitiva di $f(x)$ ed ogni primitiva di $f(x)$ è del tipo $F(x) + c$.

Definizione: l'insieme delle primitive di $f(x)$ viene indicato con il simbolo

$$\int f(x) dx$$

che si legge *integrale indefinito di $f(x)$ in dx* .

Quindi se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + c \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ prende il nome di *funzione integranda*.

Nel nostro esempio quindi scriveremo:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

NOTA

E' chiaro che $D\left(\int f(x) dx\right) = D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$

Osservazioni

$$1. \quad \boxed{\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx}$$

Esempio: $\int 2 \cos x \, dx = 2 \int \cos x \, dx = 2 \operatorname{sen} x + c$

Infatti $D(2 \operatorname{sen} x + c) = 2 \cdot \cos x$

$$2. \quad \boxed{\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx}$$

Esempio: $\int (x + \cos x) \, dx = \int x \, dx + \int \cos x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + \operatorname{sen} x + c$

Infatti $D\left(\frac{1}{2} x^2 + \operatorname{sen} x + c\right) = x + \cos x$

Integrali indefiniti immediati

$$1) \quad \int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad \text{con} \quad \alpha \neq -1$$

$$2) \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \quad (*)$$

$$3) \quad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cot} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$4) \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(ricorda che $Da^x = a^x \cdot \ln a$)

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

(caso particolare per $a = e$)

(*) Nota $\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} \cdot (-1) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$

Esempi

$$1) \quad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$2) \quad \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{1}{4} x^2 + c$$

$$3) \quad \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln|x| + c$$

$$4) \quad \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x + c$$

$$5) \quad \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4 \operatorname{arcsen} x + c$$

$$6) \quad \int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + c$$

$$7) \quad \int (3 \cdot e^x + \operatorname{sen} x) dx = 3 \int e^x dx + \int \operatorname{sen} x dx = 3 \cdot e^x - \cos x + c$$

$$8) \quad \int \left(\frac{5}{x} - \cos x \right) dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x} dx - \int \cos x dx = 5 \ln x - \operatorname{sen} x + c$$

$$9) \quad \int \frac{3}{1+x^2} dx = 3 \cdot \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3 \cdot \operatorname{arctg} x + c$$

$$10) \quad \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 3 \cdot \cos x \right) dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx - 3 \int \cos x dx = -\cot gx - 3 \operatorname{sen} x + c$$

Integrazioni basate sulla derivazione della funzione composta

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta, abbiamo:

$$1) \quad \boxed{\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot f^{\alpha+1}(x) + c \quad \alpha \neq -1}$$

Esempio 1: $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

Infatti se deriviamo $D\left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$

Esempio 2: $\int (x^2 + 1)^3 \cdot x \, dx$

Cerchiamo di riportarci al caso $\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx$ osserviamo che $D(x^2 + 1) = 2x$, mentre nella nostra funzione integranda abbiamo solo x . Per ottenere $f'(x)$ moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int (x^2 + 1)^3 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + c$$

Esempio 3: $\int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c$

Esempio 4: $\int \sqrt{x+1} \, dx$

Osserviamo che $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ e che $D(x+1) = 1$, quindi

$$\int \sqrt{x+1} \, dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x} + c$$

Nota

Un caso significativo è:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} \, dx = -\frac{1}{f(x)} + c}$$

$$2) \quad \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c}$$

Esempio 1: $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Se ci accorgiamo che $D(x^2+x) = 2x+1$, abbiamo subito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int \frac{D(x^2+x)}{x^2+x} dx = \ln|x^2+x| + c$$

Esempio 2: $\int \frac{\text{sen}x}{\cos x} dx$

In questo caso $D(\cos x) = -\text{sen}x$ mentre noi abbiamo $\text{sen}x$ ma possiamo “aggiustare” le cose così:

$$\int \frac{\text{sen}x}{\cos x} dx = -\int \frac{(-\text{sen}x)}{\cos x} dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

3)

a) $\boxed{\int (\text{sen}f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c}$

Esempio: $\int \text{sen}2x dx$

Considerando $f(x) = 2x$ allora $D(f(x)) = 2$ e quindi possiamo “aggiustare” le cose moltiplicando e dividendo per 2:

$$\int \text{sen}2x dx = \frac{1}{2} \int (\text{sen}2x) \cdot 2 dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

b) $\boxed{\int (\cos f(x)) \cdot f'(x) dx = \text{sen}(f(x)) + c}$

Esempio:

$$\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

c)

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg}(f(x)) + c}$$

Esempio: $\int \frac{3}{\cos^2 3x} dx = \text{tg}3x + c$

d)
$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx = -\cot g(f(x)) + c$$

Esempio:
$$\int \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2 x^3} dx = -\frac{1}{3} \cot gx^3 + c$$

e)
$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + c$$

Esempio:
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + c$$

f)
$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$$

Esempio:
$$\int \frac{1}{9+x^2} dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{9} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

4)
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int (e^{f(x)} \cdot f'(x)) dx = e^{f(x)} + c$$

Esempio 1:
$$\int x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2+1} + c$$
 notando che $D(x^2+1) = 2x$

Esempio 2:
$$\int \cos x \cdot 3^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{3^{\operatorname{sen} x}}{\ln 3} + c$$

ESERCIZI
INTEGRALI INDEFINITI

1) $\int x^2 dx$

2) $\int (2x+1)^3 dx$

3) $\int \left(\frac{1}{2}x + \cos x \right) dx$

4) $\int \frac{1}{4x+1} dx$

5) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$

6) $\int e^{2x} dx$

7) $\int x \cdot e^{x^2} dx$

8) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

9) $\int \frac{1}{x^2+2} dx$

10) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

11) $\int \sin 2x dx$

12) $\int \cos 2x dx$

13) $\int \sqrt{x+1} dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+4x+4} dx$

15) $\int \sqrt[3]{2x+1} dx$

16) $\int \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) dx$

17) $\int \frac{x}{x^2+2} dx$

18) $\int \operatorname{tg} 2x dx$

19) $\int (x^3+1) dx$

20) $\int (\sin x + \cos x) dx$

21) $\int (x^4 + \cos x) dx$

22) $\int (e^x + x) dx$

23) $\int \sqrt{3x-1} dx$

24) $\int x \cdot \sqrt{x^2-1} dx$

25) $\int (x^3 - \cos x) dx$

26) $\int e^{3x} dx$

Integrali indefiniti

$$27) \int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$$

$$28) \int \operatorname{sen} x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$29) \int (1+x)^4 \, dx$$

$$30) \int \sqrt{2x+1} \, dx$$

$$31) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$32) \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$33) \int \operatorname{cot} gx \, dx$$

$$34) \int \frac{1}{2x+1} \, dx$$

$$35) \int \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$$

$$36) \int \frac{e^x}{2e^x+5} \, dx$$

$$37) \int \cos 3x \, dx$$

$$38) \int \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \, dx$$

$$39) \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(3-x)} \, dx$$

$$40) \int x^2 \cdot e^{x^3} \, dx$$

$$41) \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x \, dx$$

$$42) \int (2+x)^3 \, dx$$

$$43) \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$$

$$44) \int \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \, dx$$

$$45) \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(2-x)} \, dx$$

$$46) \int \frac{1}{x^2+3} \, dx$$

$$47) \int e^{2x+1} \, dx$$

$$48) \int \frac{x}{x^2-2} \, dx$$

$$49) \int \frac{x-1}{x^2+5} \, dx$$

$$50) \int \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$$

$$51) \int x \cdot (x^2-1)^3 \, dx$$

$$52) \int x \cdot \cos x^2 \, dx$$

$$53) \int \operatorname{sen} 4x \, dx$$

$$54) \int \frac{x^2}{x^3-1} \, dx$$

Soluzione degli esercizi

$$1) \frac{x^3}{3} + c$$

$$2) \frac{1}{8}(2x+1)^4 + c$$

$$3) \frac{1}{4}x^2 + \operatorname{sen}x + c$$

$$4) \frac{1}{4}\ln|4x+1| + c$$

$$5) \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c$$

$$6) \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$7) \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$8) \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$9) \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$10) -\frac{1}{x+1} + c$$

$$11) -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

$$12) \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x + c$$

$$13) \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$14) -\frac{1}{x+2} + c$$

$$15) \frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}} + c$$

$$16) -\frac{1}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + c$$

$$17) \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + c$$

$$18) -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$$

$$19) \frac{x^4}{4} + x + c$$

$$20) \cos x - \operatorname{sen}x + c$$

$$21) \frac{x^5}{5} + \operatorname{sen}x + c$$

$$22) e^x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$23) \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$24) \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$25) \frac{x^4}{4} - \operatorname{sen}x + c$$

$$26) \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

Integrali indefiniti

$$27) \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c$$

$$28) -\frac{\cos^5 x}{5} + c$$

$$29) \frac{(1+x)^5}{5} + c$$

$$30) \frac{1}{3} \cdot (2x+1) \cdot \sqrt{2x+1} + c$$

$$31) -\sqrt{1-x^2} + c$$

$$32) -\ln|\cos x| + c$$

$$33) \ln|\operatorname{sen} x| + c$$

$$34) \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c$$

$$35) \ln|\ln x| + c$$

$$36) \frac{1}{2} \ln(2 \cdot e^x + 5) + c$$

$$37) \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + c$$

$$38) \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) + c$$

$$39) \cot g(3-x) + c$$

$$40) \frac{1}{3} e^{x^3} + c$$

$$41) \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + c$$

$$42) \frac{(2+x)^4}{4} + c$$

$$43) \frac{3}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + c$$

$$44) -\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + c$$

$$45) \cot g(2-x) + c$$

$$46) \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) + c$$

$$47) \frac{1}{2} e^{2x+1} + c$$

$$48) \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2| + c$$

$$49) \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{5}} + c \right)$$

$$50) \ln|e^x - 1| + c$$

$$51) \frac{1}{8} (x^2 - 1)^4 + c$$

$$52) \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + c$$

$$53) -\frac{1}{4} \cos 4x + c$$

$$54) \frac{1}{3} \ln|x^3 - 1| + c$$