

Problemi di massimo e minimo

Supponiamo di avere una funzione $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m .

I problemi di massimo e minimo sono problemi (di geometria piana o solida oppure di geometria analitica ecc.) in cui dobbiamo determinare una funzione (che per esempio esprime, in funzione di una variabile scelta x , un perimetro o un'area o un volume ecc.) e individuare il valore di x per cui la funzione assume il massimo o il minimo assoluto.

Poiché la variabile avrà una limitazione data dal tipo di problema, la funzione dovrà essere considerata in un dato intervallo.

Se la funzione è continua e l'intervallo è limitato, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluto.

Possiamo quindi procedere così:

- Calcolare la derivata della funzione che dobbiamo studiare
- Cercare i valori per cui si annulla e studiare il segno della derivata: individuare quindi i massimi e minimi relativi ed eventualmente “confrontarli” (confrontare le ordinate corrispondenti) per determinare il massimo o il minimo assoluto.

Attenzione: se la derivata non si annulla ed è per esempio sempre positiva cioè la funzione è crescente, è chiaro che il minimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo e il massimo nell'estremo destro.

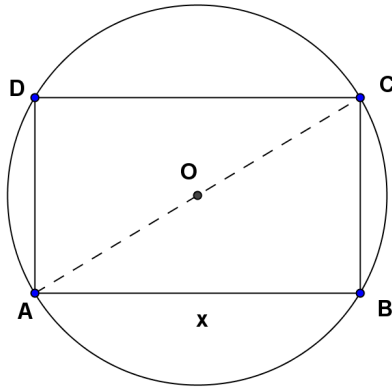
Attenzione: controllare se ci sono punti di non derivabilità: nel caso ci siano le loro ordinate vanno confrontate con quelle dei massimi (minimi) relativi trovati.

NOTA

I problemi di massimo e minimo non sono solo interessanti da un punto di vista teorico-matematico, ma anzi vedremo come **possono servire a risolvere problemi “reali”**.

Esempio 1

Determina, tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r , quello di area massima.



Poniamo $x = \overline{AB}$.

Quindi avremo: $0 \leq x \leq 2r$

Poiché $\overline{BC} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ indicando con $A(x)$ l'area di $ABCD$ avremo:

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \text{ con } 0 \leq x \leq 2r$$

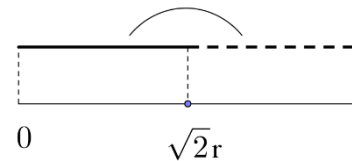
Poiché $A(x)$ è continua in $[0; 2r]$ per il teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto.

Calcoliamo quindi la derivata:

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}r \quad (x = -\sqrt{2}r \text{ non è accettabile})$$

$$A'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \sqrt{2}r$$



Quindi $x = \sqrt{2}r$ fornisce il massimo assoluto (non abbiamo trovato altri punti di massimo relativo).

Osserviamo che se $\overline{AB} = \sqrt{2}r$ $ABCD$ è un quadrato.

Quindi tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r , quello di area massima è il quadrato.

Nota

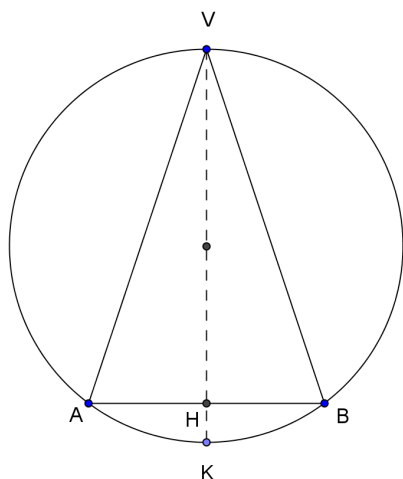
Per $x = 0$ o $x = 2r$ il rettangolo degenera in due diametri sovrapposti e sia ha area nulla (minimo assoluto).

Esempio 2

Determinare, tra i coni iscritti in una sfera di raggio r , quello di massimo volume.

Consideriamo una sezione. Avremo un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza.

Poniamo $\overline{VH} = x$: $0 \leq x \leq 2r$



Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo VAK : $\overline{AH}^2 = x(2r - x)$

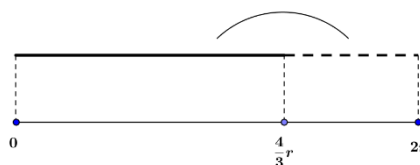
Quindi:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi x^2(2r - x) = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(4rx - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = \frac{4}{3}r$$

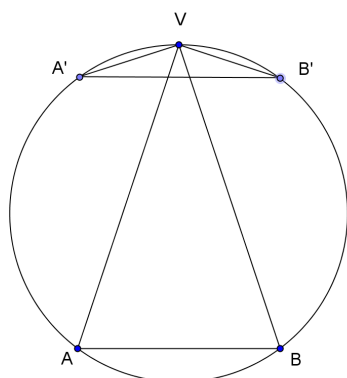
$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r$$



e quindi per $x = \frac{4}{3}r$ si ha il cono di volume massimo.

Osservazione

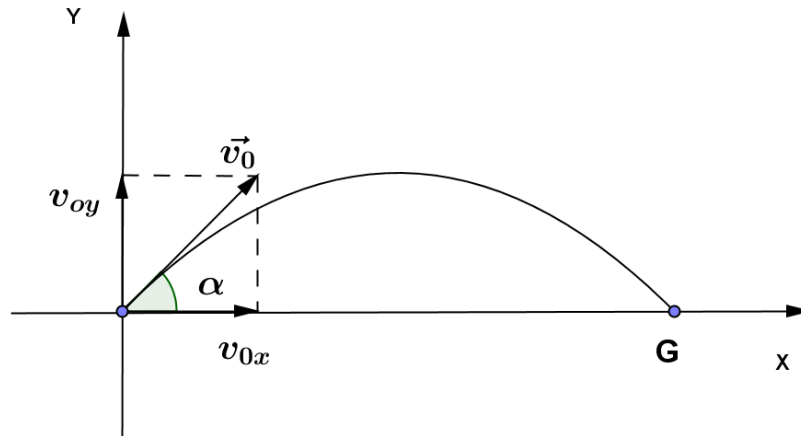
La scelta del segmento a cui associare x è importante. Scegliendo $\overline{VH} = x$ abbiamo individuato bene il cono (non ci sono coni iscritti diversi con la stessa altezza) mentre se avessimo scelto \overline{AH} (o \overline{AB}) ad un dato valore dell'incognita corrispondevano generalmente due coni diversi.



In figura per esempio abbiamo lo stesso valore della base ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$) ma i triangoli sezione e quindi i coni sono diversi.

Esempio 3

Lanciando un corpo con velocità \vec{v}_0 inclinata di α rispetto all'orizzontale qual è, a parità di v_0 (intensità della velocità iniziale), l'angolo α per cui si ottiene la **massima gittata**?



Ricordiamo che per studiare il moto dobbiamo scomporlo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x} in direzione orizzontale e in un moto uniformemente decelerato (con decelerazione $g = 9,81 \text{ m/s}^2$) di velocità iniziale v_{0y} in direzione verticale.

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo t (lo ricaviamo dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda) e ponendo $y = 0$ trovo:

$$x_G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Quindi, poiché $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ e $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ il problema si riconduce a determinare il massimo di:

$$f(\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Abbiamo quindi che $f(\alpha)$ è massima quando $\sin 2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ e quindi l'angolo per cui si ha la massima gittata risulta $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEMI
GEOMETRIA PIANA

1. Tra tutti i rettangoli di area assegnata a^2 determina quello di perimetro minimo.

$$[\text{ponendo } x = \text{dimensione} \rightarrow x = a \rightarrow \text{quadrato}]$$

2. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determina quello di area massima.

$$[\text{ponendo } x = \text{dimensione} \rightarrow x = \frac{p}{2} \rightarrow \text{quadrato}]$$

3. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata a determina quello di area massima.

$$[x = \text{cateto} \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{triangolo rettangolo isoscele}]$$

4. Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r , determina quello di area massima.

$$[x = \text{altezza relativa alla base} \rightarrow x = \frac{3}{2}r \rightarrow \text{triangolo equilatero}]$$

5. Tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r determina quello di perimetro massimo.

$$[x = \text{dimensione rettangolo} \rightarrow x = r\sqrt{2} \rightarrow \text{quadrato}]$$

6. Tra i triangoli equilateri inscritti in un triangolo equilatero ABC di lato l , determina quello di area minima.

$$[\text{triangolo di lato } \frac{l}{2}]$$

7. Tra tutti i triangoli iscritti in una semicirconferenza, trova quello di area massima.

$$[\text{triangolo rettangolo isoscele}]$$

8. Nell'insieme dei trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio r , determina quello di perimetro massimo.

$$[\text{semiesagono regolare}]$$

9. Fra tutti i rettangoli di data area, che misura a^2 , determina quello la cui diagonale è minima.

$$[\text{quadrato di lato } a]$$

10. Tra tutti rettangoli di data diagonale, che misura d , determina quello di area massima.

$$[\text{quadrato di lato } \frac{d}{\sqrt{2}}]$$

PROBLEMI
GEOMETRIA SOLIDA

1. Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio r determina quello di volume massimo.

$$\left[x = \text{raggio di base del cilindro} \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} r \right]$$

2. Tra i cilindri inscritti in un cono avente raggio di base r e altezza assegnata h , determina quello di volume massimo.

$$\left[x = \text{raggio di base del cilindro} \rightarrow x = \frac{2}{3} r \right]$$

3. Tra i coni inscritti in una sfera di raggio r , determina quello di superficie laterale massima.

$$\left[x = \text{altezza del cono} \rightarrow x = \frac{4}{3} r \right]$$

4. Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r , determina quello di minimo volume.

$$\left[x = \text{distanza tra vertice cono} - \text{centro sfera} \rightarrow x = 3r \right]$$

5. Tra i parallelepipedi rettangolari aventi per base un quadrato e un volume assegnato V , determina quello di superficie totale minima.

[cubo]

6. Tra i cilindri di superficie totale assegnata S determina quello di volume massimo.

[cilindro equilatero]

7. Una tipica lattina cilindrica ha volume fissato pari a 33 cl. Quali sono le dimensioni della lattina (altezza e diametro) che minimizzano il costo del metallo necessario a produrla, ossia la superficie totale della lattina?

$$\left[\text{cilindro equilatero di diametro } 2r = h = 2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \text{ cm} \right]$$

8. Tra i parallelepipedi rettangoli a base quadrata e diagonale di misura d , determina quello di volume massimo.

[cubo di lato $\frac{d}{\sqrt{3}}$]

SCHEDA DI LAVORO 1

DIDONE E LA FONDAZIONE DI CARTAGINE

Secondo la leggenda narrata da Virgilio nel I libro dell'Eneide, la regina fenicia Didone, sbarcata sulle coste settentrionali dell'Africa, chiese al re dei Getuli un appezzamento di terreno su cui costruire una nuova città: il re le offrì una pelle di toto dicendole che poteva appropriarsi di quanto terreno poteva comprendere con quella pelle.

“Giunsero in questi luoghi dove ora vedi le mura possenti e sorgere la rocca della nuova Cartagine, e acquistarono quanto suolo, che dal fatto si chiama Birsam, quanto potessero racchiudere con una pelle di toro.”

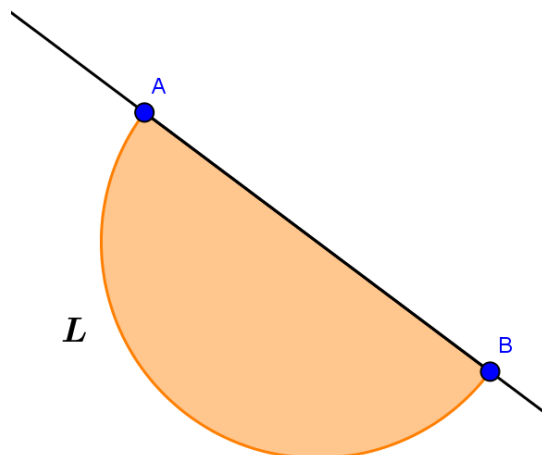
(Devenere locos ubi nunc ingentia cernis Moenia surgentemque novae Karthaginis arcem, mercatique solum, facti de nomine Byrsam, taurino quantum possent circumdare tergo.)

L'astuta Didone allora fece tagliare la pelle in tante strisce sottili che legò una dietro l'altra ottenendo così una corda con la quale poté delimitare una vasta area **a forma di semicerchio** affacciata sul mare.

Il problema di Didone è un problema di massimo che può essere enunciato così:

Tra tutte le curve piane di lunghezza assegnata L ed avente i due estremi su una retta, determinare quella che racchiude la superficie di area massima.

Si può dimostrare che la figura che delimita la superficie massima è la semicirconferenza di diametro AB.



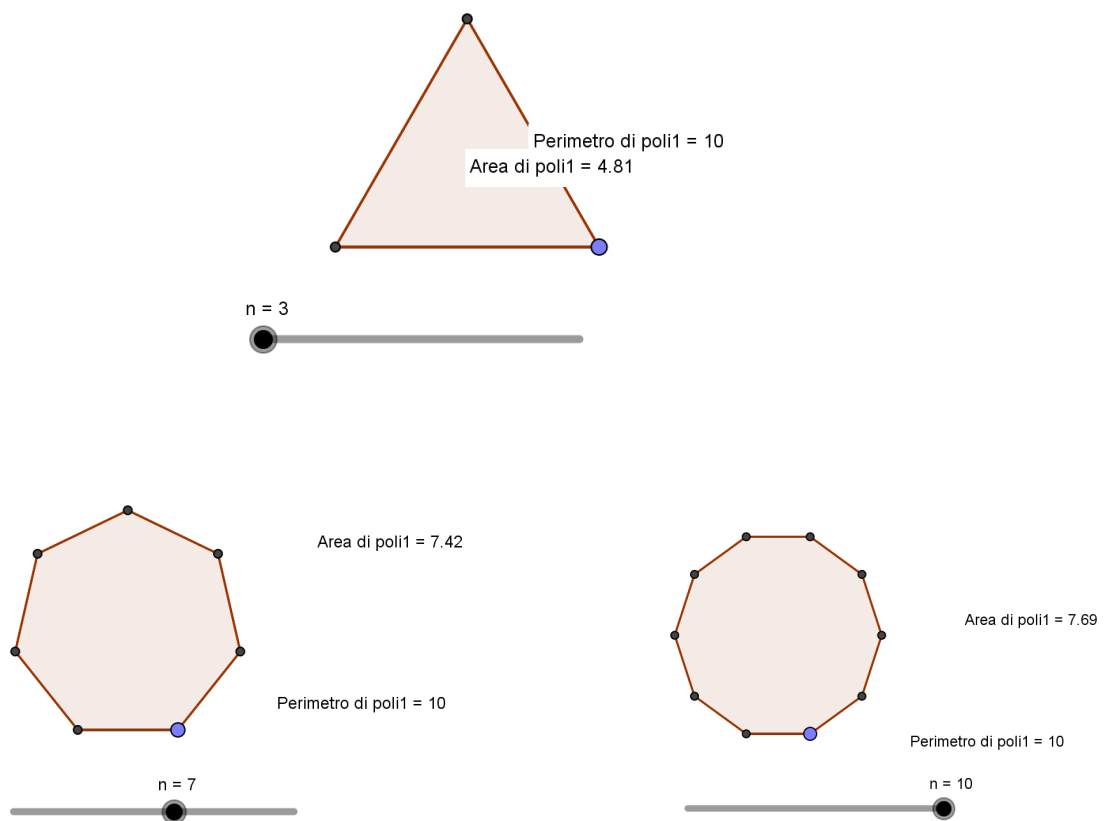
Nota: naturalmente se invece cerchiamo, tra tutte le figure piane anche non poligonali, di perimetro assegnato L di quella che delimita la superficie massima avremo la circonferenza.

ESERCIZIO

Prova con Geogebra a verificare che l'area dei poligoni regolari di perimetro assegnato L aumenta all'aumentare del numero dei lati.

Suggerimento

- Crea una costante L (per esempio $L=10$);
- crea uno slider n che varia tra 3 e 10(per esempio);
- crea un segmento di lunghezza L/n e con il comando “poligono regolare” disegna il poligono di n lati avente come lato il segmento;
- con il comando “area” visualizza l'area del poligono che hai costruito;
- aumenta il valore di n e osserva i valori dell'area.

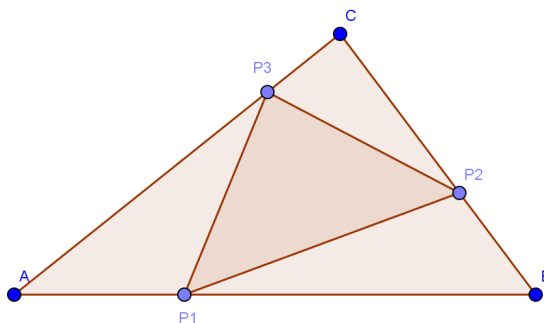


Stampa il tuo lavoro.

SCHEMA DI LAVORO 2

TRIANGOLO INSCRITTO DI PERIMETRO MINIMO

Considera un triangolo ABC: disegna un triangolo inscritto in ABC avente cioè i vertici sui lati di ABC (vedi figura). Come devi scegliere i tre punti in modo da avere il triangolo di minimo perimetro?



Si può dimostrare che il triangolo di minimo perimetro è quello che congiunge i piedi delle altezze del triangolo ABC: prova a verificarlo utilizzando Geogebra.

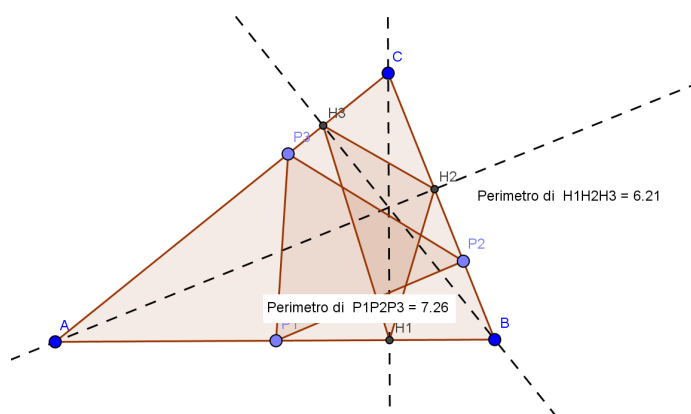
Suggerimento

Dopo aver costruito il triangolo ABC, utilizza il comando “punto su oggetto” per creare i tre punti e poi congiungili;

traccia le altezze del triangolo, individua i piedi delle altezze e congiungili;

scegli il comando “distanza o lunghezza” per determinare il perimetro dei due triangoli;

muovi i punti P1, P2, P3 e controlla i perimetri...

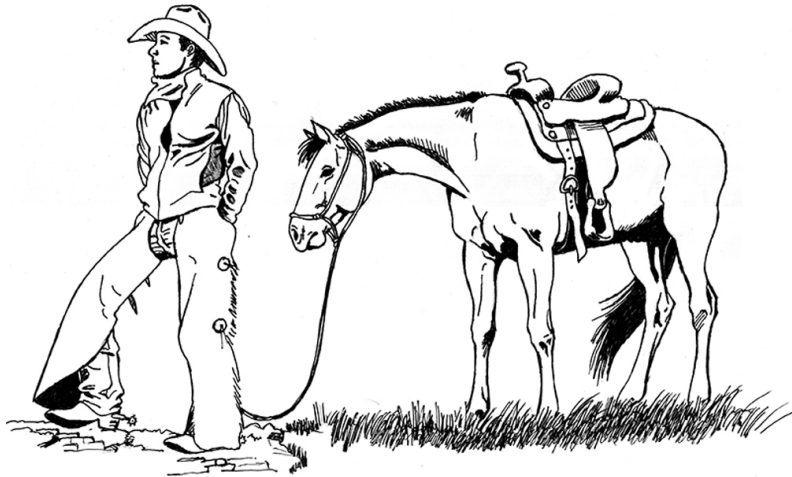


NOTA

Se immaginiamo che i lati del triangolo siano specchi, il triangolo $H_1H_2H_3$ è l'unico percorso chiuso che un raggio di luce può compiere toccando una sola volta ogni specchio-lato.

SCHEMA DI LAVORO 3

IL PERCORSO PIU' BREVE



Un cowboy a cavallo si trova nel punto A e vuole far abbeverare il cavallo al fiume (retta r) prima di tornare alla fattoria (punto B) (vedi figura).

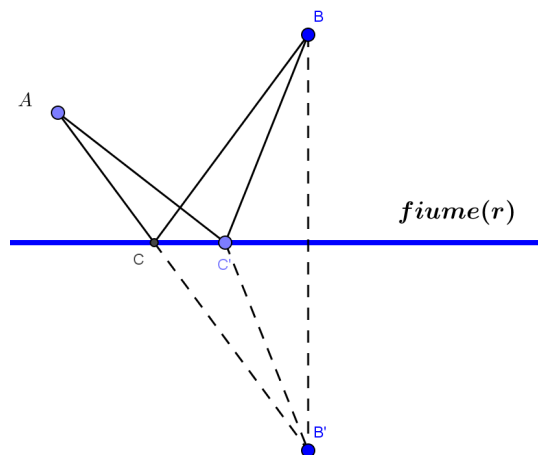
Qual è il percorso di lunghezza minima?

Suggerimento

Considera il punto B' simmetrico di B rispetto alla retta fiume-r e congiungi A con B': sulla retta r viene individuato un punto C.

Come potresti dimostrare che il percorso minimo è quello $\overline{AC} + \overline{CB}$?

Considerando un qualsiasi altro punto C' su r e considerando il percorso $\overline{AC'} + \overline{C'B}$



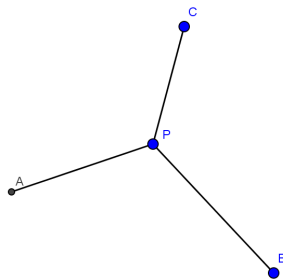
SCHEMA DI LAVORO 4

LA RETE STRADALE

Pierre de Fermat verso la metà del XVII secolo propose a Torricelli il seguente problema ripreso poi da Vincenzo Viviani:

“Dati 3 punti A,B,C tali che il triangolo ABC abbia angoli minori di 120° , trovare un punto P tale che sia minima la somma delle distanze tra P e i punti dati.”

“Dato triangulo,cius unusquisque angulorum minor sit graduum 120, punctum reperire, a quo si ad angulos tres rectae educantur ipsarum aggregatum sit minimum.” (Vincenzo Viviani , De maximis et minimis)



Questo problema non è solo di tipo teorico perché possiamo pensare che corrisponda alla ricerca della rete stradale di minima lunghezza che metta in comunicazione tre località: si può dimostrare che il punto P è quello da cui i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno (*).

Nota: nel caso in cui uno degli angoli del triangolo ABC sia maggiore o uguale a 120° , il punto P coincide con il vertice di quell'angolo.

Esercizio: verifica con Geogebra che la somma minima si ha quando da P i lati del triangolo ABC si vedono sotto angoli uguali e quindi di 120° ciascuno.

Suggerimento

Dopo aver creato tre punti A,B,C puoi creare un punto P a caso, costruire i segmenti AP, BP, CP e utilizzando il comando “lunghezza” calcolare la lunghezza dei tre segmenti e la loro somma (sommando da tastiera le lettere che rappresentano i segmenti): in questo modo puoi controllare che quando P si avvicina ad avere gli angoli α , β , γ di 120° la somma delle distanze diminuisce.

Individua una costruzione del punto P da cui i lati si “vedono” sotto angoli di 120° .

(*)Cerca sul web come si può sviluppare questa dimostrazione.

SCHEMA DI LAVORO 5

LA CASSERUOLA DI CAPACITA' MASSIMA

Tra tutte le casseruole di forma cilindrica aventi la stessa superficie S (superficie laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?



Suggerimento

Schematizza la casseruola con un cilindro ed indica con x il raggio di base: se la superficie di base + superficie laterale sono uguali a S puoi ricavare l'altezza h

Dopo aver determinato l'altezza in funzione di x e S , calcola il volume $V(x)$ e poi la sua derivata $V'(x)$ e ponendola uguale a zero determina il valore del raggio per cui si ottiene il massimo volume.

Verifica che sostituendo il valore trovato nell'espressione dell'altezza si trova che la casseruola di volume massimo risulta avere

