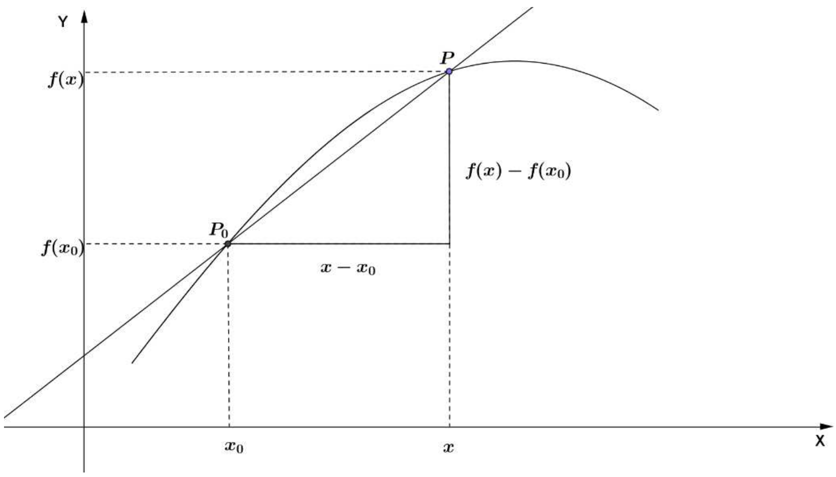
Derivate

Definizione di derivata di f(x) in $x_o \in D_f$

Considero una funzione $f(x)$ e sia $x_0 \in D_f$ e $f(x)$ definita in un intorno completo di x_0.

Consideriamo il rapporto (detto rapporto "incrementale")

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (x \in I_{x_0})$$



È evidente che il rapporto incrementale (cioè degli "incrementi" Δf e Δx) rappresenta il coefficiente angolare della retta P_0P (vedi figura).

Diciamo che $f(x)$ è derivabile in x_0 se **esiste finito**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Questo limite sarà indicato con $f'(x_0)$ ed è detto derivata di $f(x)$ in x_0.

NOTA 1: la derivata in x_0 può essere indicata anche come

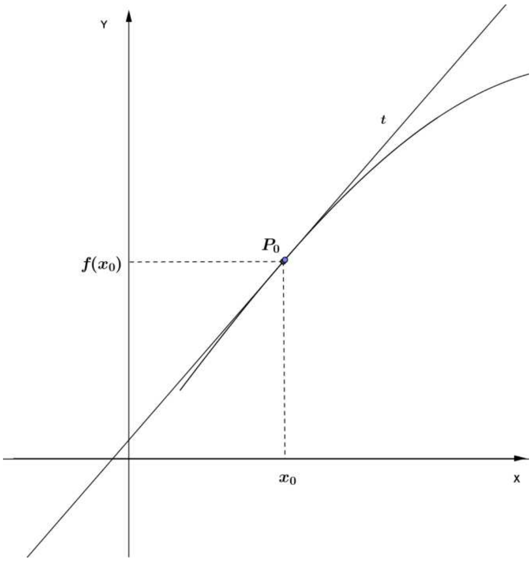
$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} \quad o \quad [Df(x)]_{x=x_0}$$

NOTA 2: il rapporto incrementale può essere anche scritto così:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{e calcolare quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Interpretazione geometrica

Poiché il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta PP_0 e poiché per $x \to x_0$ si ha $P \to P_0$ e la retta $P_0P \to$ retta tangente in P_0 si ha che

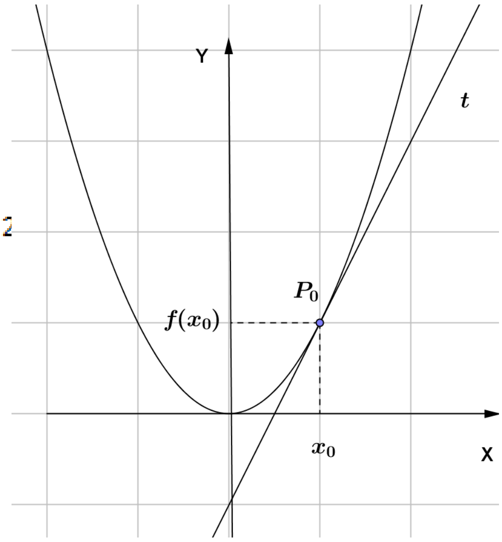


$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_t$$

dove m_t rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.

Poiché nella definizione di $f'(x_0)$ abbiamo chiesto che il limite sia finito non si considererà derivabile in x_0 una funzione che abbia in $P_0(x_0; f(x_0))$ la tangente al grafico parallela all'asse y.

Esempi



1. Consideriamo $y = x^2$ e $x_0 = 1$ ($f(x_0) = 1$)

   Calcoliamo

   $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

   Quindi $f'(1) = m_t = 2$.
   La retta tangente avrà equazione

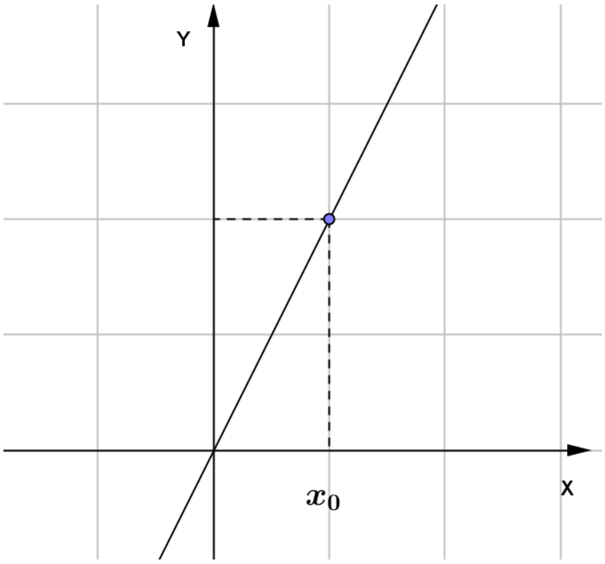
   $$t: y - 1 = 2(x - 1) \to y = 2x - 1$$

   Proviamo a verificare che l'equazione della tangente sia proprio $y = 2x - 1$: possiamo applicare il "vecchio" metodo del fascio di rette per $P_0(1;1)$ e intersecare con $y = x^2$ imponendo che $\Delta = 0$.

   $$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = m(x-1) \\ y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - mx + m - 1 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

   $$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \to m^2 - 4m + 4 = 0 \to (m-2)^2 = 0 \to m = 2$$

2. Consideriamo $y = 2x$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 2)$.
   Calcoliamo:



$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

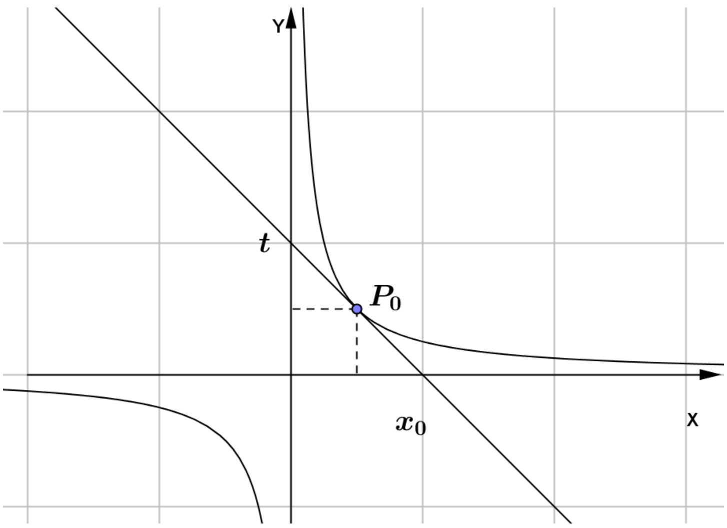
Osserviamo che se considero in generale x_0 ottengo lo stesso risultato:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{2x-2x_o}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{2(x-x_o)}{x-x_o} = 2$$

È chiaro che nel caso in cui il grafico sia una retta, la tangente coincide con il grafico in ogni punto x_0 e quindi $f'(x_0) = 2 \quad \forall x_0 \epsilon R$.

3. Consideriamo $y = \frac{1}{x}$ e $x_0 = 1$ $(f(x_0) = 1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{x-1}{x(x-1)} = -1$$



ESERCIZI

DEFINIZIONE DI DERIVATA

Calcola $f'(x_0)$ per le seguenti funzioni ,disegna G_f e la tangente t al grafico in $(x_o; f(x_o))$:

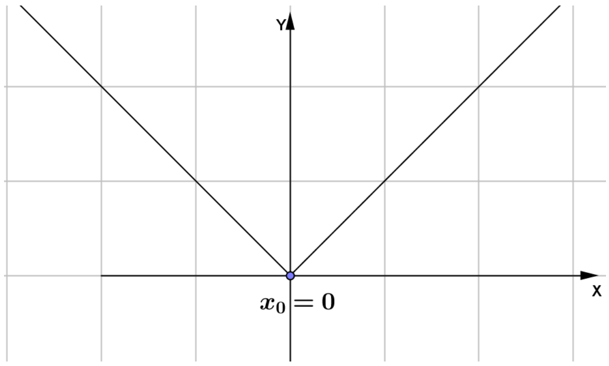
1. $f(x) = 3x - 1 \qquad x_0 = 0 \qquad [f'(0) = 3]$
2. $f(x) = 4x^2 \qquad x_0 = 1 \qquad [f'(1) = 8]$
3. $f(x) = 1 - x^2 \qquad x_0 = 0 \qquad [f'(0) = 0]$
4. $f(x) = \frac{2}{x} \qquad x_0 = 1 \qquad [f'(1) = -2]$
5. $f(x) = \frac{1}{x-2} \qquad x_0 = 1 \qquad [f'(1) = -1]$
6. $f(x) = 3 \qquad x_0 = 4 \qquad [f'(1) = 0]$
7. $f(x) = x^3 \qquad x_0 = 2 \qquad [f'(2) = 12]$
8. $f(x) = \frac{x-1}{x} \qquad x_0 = 1 \qquad [f'(1) = 1]$
9. $f(x) = \frac{2x-3}{x} \qquad x_0 = 1 \qquad [f'(1) = 3]$
10. $f(x) = 2 - x^3 \qquad x_0 = 1 \qquad [f'(1) = -3]$
11. $f(x) = x^2 - 1 \qquad x_0 = -1 \qquad [f'(-1) = -2]$
12. $f(x) = 5x + 2 \qquad x_0 = 3 \qquad [f'(3) = 5]$
13. $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = 2 \qquad [f'(2) = -\frac{1}{4}]$
14. $f(x) = -5 \qquad x_0 = 0 \qquad [f'(0) = 0]$
15. $f(x) = x^2 \qquad x_0 = 3 \qquad [f'(3) = 6]$

Complemento
PUNTI DI NON DERIVABILITA'

Se una funzione è derivabile in x_o per quello che abbiamo visto è necessariamente continua ma non è detto che una funzione continua in x_o sia anche derivabile in x_o cioè sia possibile tracciare la tangente al grafico in $(x_o; f(x_o))$. Vediamo quali possono essere i punti di non derivabilità.

1. a) Consideriamo $f(x) = |x|$ e $x_0 = 0$ $(f(x_0) = 0)$

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$



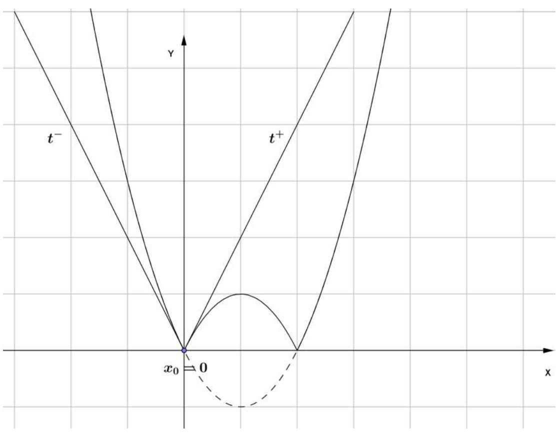
Il limite destro e sinistro del rapporto incrementale sono diversi:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Quindi non esiste il limite del rapporto incrementale poiché il limite destro è diverso dal limite sinistro: è come se avessimo due tangenti in $P_0(x_0; f(x_0))$, una "destra" e una "sinistra" con inclinazioni m_1 e m_2 e x_0 si dice **punto angoloso**.

b)Vediamo un altro esempio di punto angoloso: consideriamo $f(x) = |x^2 - 2x|$ e $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$



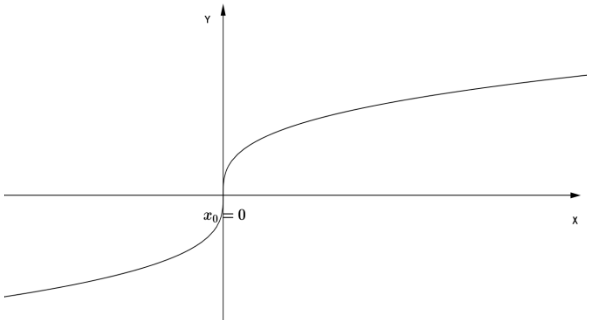
Ricorda che per tracciare il grafico di $f(x)$ prima si disegna la parabola $y = x^2 - 2x$ e poi si ribalta rispetto all'asse x la parte negativa.

Anche in questo caso abbiamo un punto angoloso in x_0 poiché:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = -2 \quad (m_{t^-})$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-(x^2 - 2x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x(x-2)}{x} = 2 \quad (m_{t^+})$$

2. Consideriamo $f(x) = \sqrt[5]{x}$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.

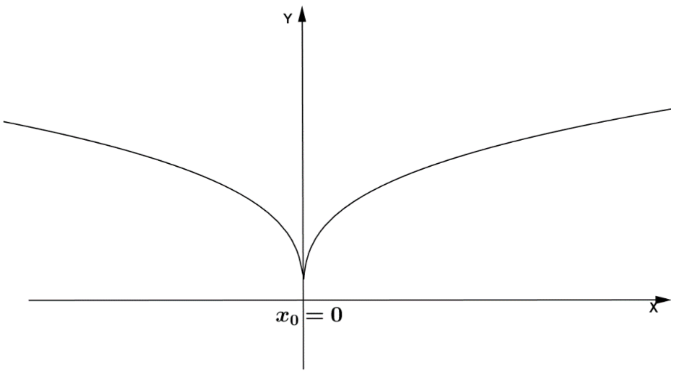


$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

In questo caso, il limite del rapporto incrementale esiste ma è infinito: la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$ al grafico è parallela all'asse delle y (nel nostro caso coincide con l'asse delle y). Diremo perciò che $y = \sqrt[5]{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

Un punto di non derivabilità di questo tipo si chiama "**punto a tangente verticale**".

3. Consideriamo $f(x) = |\sqrt[5]{x}|$ in $x_0 = 0$ $(f(0) = 0)$.



Poiché $f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{x} \; quando \; x \geq 0 \\ -\sqrt[5]{x} \; quando \; x < 0 \end{cases}$

Il limite destro e sinistro sono diversi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt[5]{x^2}} = -\infty$$

Quindi anche in questo caso il limite esiste e i limiti destro e sinistro sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$: diciamo che x_0 è una "**cuspide**".

Funzione derivata

La funzione che associa $x \to f'(x)$ viene detta **funzione derivata** di $f(x)$ ed indicata con

$$f'(x) \text{ o } Df(x) \text{ o } \frac{df}{dx} \text{ (notazione di Leibniz)}$$

Esempio

Consideriamo $f(x) = x^2$.
Calcoliamo il limite del rapporto incrementale lasciando come variabile x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Quindi $x \xrightarrow{f'} 2x$ e possiamo scrivere:

$$f'(x) = 2x \text{ o } D(x^2) = 2x$$

Se dobbiamo quindi calcolare, per esempio, la derivata di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 3$ non dovremo far altro che sostituire $x = 3$ in $f'(x) = 2x$ cioè $f'(3) = 6$.

Quindi conoscere $f'(x)$ mi permette di calcolare la derivata di $f(x)$ in qualsiasi punto x_0 semplicemente con una sostituzione.

Dobbiamo quindi, per prima cosa, determinare le funzioni derivate delle funzioni elementari.

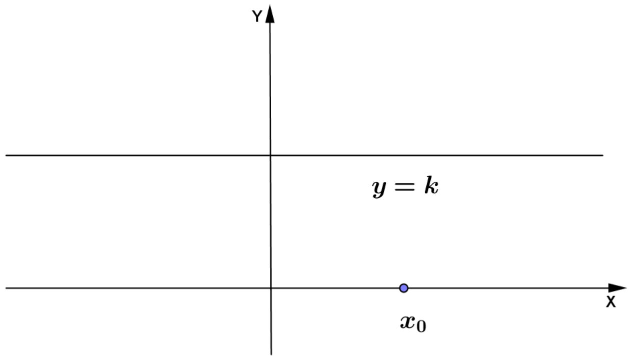
Derivate delle funzioni elementari

- Derivata di $f(x) = k$ (funzione costante)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

Quindi $\boxed{D(k) = 0}$

Infatti il grafico di $y = k$ è una retta parallela all'asse x e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico e quindi ha coefficiente angolare $m = 0$.



- Derivata di $f(x) = x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

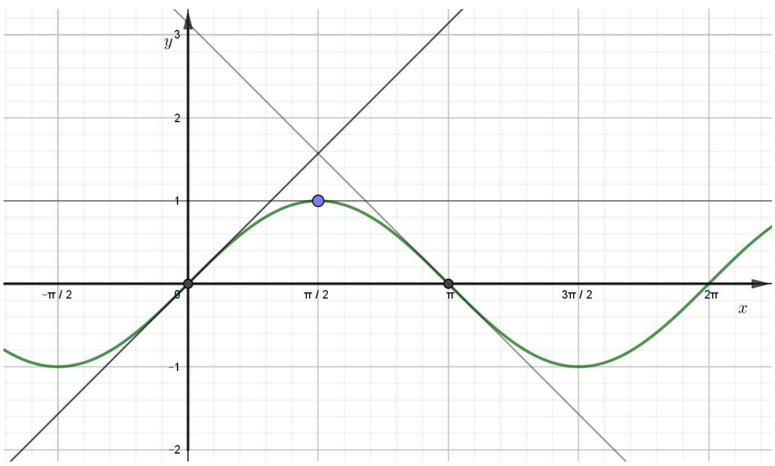
Quindi $\boxed{D(x) = 1}$

Infatti la retta $y = x$ ha coefficiente angolare $m = 1$ e in ogni x_0 la tangente coincide con il grafico di $f(x)$.

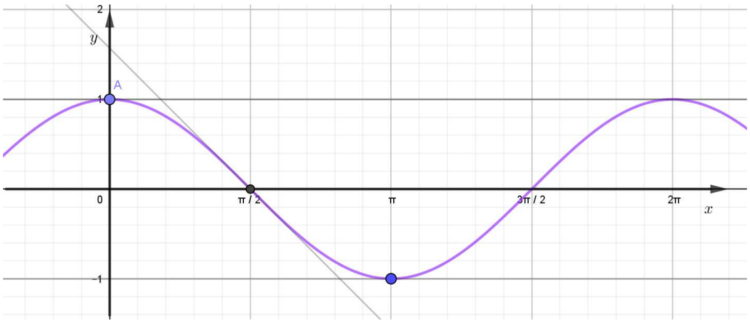
- Derivata di $f(x) = senx$

Osservando l'andamento delle tangenti alla funzione $y = senx$ ci accorgiamo che

$y'(0) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'(\pi) = -1, \quad ecc.$ e si può dimostrare che $\boxed{D(senx) = cosx}$



- Derivata di $f(x) = cosx$: si osserva che $y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad y'(\pi) = 0, \quad ecc.$



Si può dimostrare che

$$\boxed{D(cosx) = -senx}$$

- Derivata di $f(x) = lnx$

  Si può dimostrare che $\boxed{D(\ln x) = \frac{1}{x}}$

  e in generale: $\boxed{D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e}$

  Esempio: $D(\log_2 x) = (\log_2 e) \cdot \frac{1}{x}$

- Derivata di $f(x) = e^x$

  Si può dimostrare che $\boxed{D(e^x) = e^x}$

  e in generale: $\boxed{D(a^x) = a^x \cdot lna}$

  Esempio: $D(2^x) = (\ln 2) \cdot 2^x$

Ricapitolando:

$D(k) = 0$

$D(x) = 1$

$D(senx) = cosx$

$D(cosx) = -senx$

$D(lnx) = \frac{1}{x}$; $D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

$D(e^x) = e^x$; $D(a^x) = a^x lna$

Regole di derivazione

Derivata della somma di due funzioni

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Quindi $$\boxed{D(f(x)+g(x))=D(f(x))+D(g(x))}$$

Naturalmente questa regola vale anche per la somma di più di due funzioni.

Esempio:

$$D(x+senx+2)=D(x)+D(senx)+D(2)=1+cosx$$

Derivata del prodotto di due funzioni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=(si\ somma\ e\ si\ sottrae\ f(x_0)g(x))$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Nota: $f(x)$ e $g(x)$ essendo per ipotesi derivabili in x_0 sono anche continue e quindi $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$).

Quindi

$$\boxed{D(f(x)\cdot g(x))=D(f(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot D(g(x))}$$

Esempio:

$$D(x\cdot senx)=D(x)senx+xD(senx)=senx+x\cdot cosx$$

Nota

In particolare

$$D\big(kf(x)\big)=kD(f(x))$$

Infatti

$$D\big(kf(x)\big)=D(k)f(x)+kD\big(f(x)\big)=kD(f(x))$$

Questa regola si può estendere al prodotto di più di due funzioni e risulta:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f) \cdot g \cdot h + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

Infatti:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f \cdot (gh)) = D(f) \cdot gh + f \cdot D(gh) = D(f) \cdot gh + f[D(g) \cdot h + g \cdot D(h)]$$
$$= D(f)gh + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

Esempio:

$$D(x \cdot senx \cdot cosx) = 1 \cdot \ senx \cdot cosx + x \cdot cosx \cdot cosx + x \cdot senx(-senx)$$

- In particolare $\quad D(x^n) = nx^{n-1} \quad$ poiché:

  $$D(x^n) = D\left(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\ volte}\right) = 1 \cdot \underbrace{x \cdots x}_{n-1\ volte} + \underbrace{x \cdot 1 \cdots x}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{x \cdots x \cdot 1}_{n-1\ volte} = nx^{n-1}$$

  e

  $$D(f^n(x)) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Poiché

$$D(f^n(x)) = D\left(f(x) \cdot \underbrace{f(x) \cdots f(x)}_{n\ volte}\right) =$$

$$= f'(x) \cdot \underbrace{f(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \underbrace{f(x) \cdot f'(x) \cdots f(x)}_{n-1\ volte} + \cdots + \underbrace{f(x) \cdots f(x) \cdot f'(x)}_{n-1\ volte} = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Esempi

$$D(x^3) = 3x^2$$

$$D(sen^3(x)) = 3sen^2x \cdot cosx$$

$$D(ln^2x) = 2lnx \cdot \frac{1}{x}$$

$$D(cos^4x) = 4cos^3x(-senx)$$

$$D(x^5) = 5x^4$$

Derivata della funzione reciproca di $f(x)$ $(f(x) \neq 0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]\frac{1}{f(x)f(x_0)}$$
$$= (f(x) \text{è } continua \ in \ x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

Esempi:

1) $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

2) $D\left(\frac{1}{senx}\right) = -\frac{\cos x}{sen^2 x}$

In particolare

a) $D(x^{-n}) = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$

Quindi $\boxed{D(x^k) = kx^{k-1}}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(x^{-2}) = -2x^{-3}$

b) $D(f^{-n}(x)) = D\left(\frac{1}{f^n(x)}\right) = -\frac{nf^{n-1}(x)f'(x)}{f^{2n}(x)} = -nf^{-n-1}(x)f'(x)$

Quindi $\boxed{D\left(f^k(x)\right) = kf^{k-1}(x)f'(x)}$ con $k \in Z$

Esempio:

$D(sen^{-2}x) = -2sen^{-3}x \cdot cosx$

Derivata del quoziente di due funzioni

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=D\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Quindi:

$$\boxed{D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{D(f(x))g(x)-f(x)D(g(x))}{g^2(x)}}$$

Esempi:

1) $$D(tgx)=D\left(\frac{senx}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\cdot\cos x-senx\cdot(-senx)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

2) $$D(\cot gx)=D\left(\frac{\cos x}{senx}\right)=\frac{-senx\cdot senx-\cos x\cdot\cos x}{sen^2x}=-\frac{1}{sen^2x}$$

3) $$D\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)=\frac{D(x-2)\cdot(x^2+1)-(x-2)\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-(x-2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

Nota

La derivata di $f(x)=tgx$ può anche essere scritta $D(tgx)=1+tg^2x$.

Infatti:

$$D(tgx)=\frac{1}{cos^2x}=\frac{cos^2x+sen^2x}{cos^2x}=1+tg^2x$$

La derivata di $f(x)=cotgx$ si può scrivere anche così:

$$D(cotgx)=-\frac{1}{sen^2x}=\frac{-sen^2x-cos^2x}{sen^2x}=-1-cotg^2x$$

ESERCIZI

REGOLE DI DERIVAZIONE

Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

1. $D(2x + tgx)$ $\left[2 + \frac{1}{\cos^2 x}\right]$

2. $D\left(\frac{x+2}{x}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^2}\right]$

3. $D(x \ln x)$ $[\ln x + 1]$

4. $D(2^x + 1)$ $[2^x \cdot \ln 2]$

5. $D(x^3 + 2x - 3)$ $[3x^2 + 2]$

6. $D\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

7. $D\left(\frac{2}{x}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^2}\right]$

8. $D\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ $\left[-\frac{1}{x \cdot \ln^2 x}\right]$

9. $D\left(\frac{1}{x+3}\right)$ $\left[-\frac{1}{(x+3)^2}\right]$

10. $D(log_2^3 x)$ $\left[3\log_2^2 x \cdot \frac{1}{x}\log_2 e\right]$

11. $D(senx + \cos x)$ $[\ \cos x - senx\ ]$

12. $D\left(\frac{1}{senx + \cos x}\right)$ $\left[-\frac{\cos x - senx}{(senx + \cos x)^2}\right]$

13. $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[-\frac{2}{x^3}\right]$

14. $D\left(\frac{2}{senx}\right)$ $\left[-\frac{2\cos x}{sen^2 x}\right]$

15. $D(2\cos x + senx)$ $[-2senx + \cos x\ ]$

16. $D\left(\frac{5+x}{2x}\right)$ $\left[-\frac{5}{2x^2}\right]$

17. $D\left(\dfrac{x}{3-x}\right)$ $\left[\dfrac{3}{(3-x)^2}\right]$

18. $D\left(x^4-3x^2-4\right)$ $\left[4x^3-6x\right]$

19. $D\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2\right)$ $\left[x^2+x\right]$

20. $D(senx\cdot\cos x)$ $[\ \cos^2 x-sen^2 x\ ]$

21. $D\left(tgx+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left[\dfrac{1}{\cos^2 x}\right]$

22. $D\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ $\left[\dfrac{2}{x^3}\right]$

23. $D\left(e^x+2\right)$ $\left[e^x\right]$

24. $D\left(x^3+2x+4\right)$ $\left[3x^2+2\right]$

25. $D\left(x\cdot e^x\right)$ $\left[e^x+x\cdot e^x\right]$

26. $D\left((x+1)^3\right)$ $\left[3(x+1)^2\right]$

27. $D\left((2x-1)^4\right)$ $\left[8\cdot(2x-1)^3\right]$

28. $D\left(\log_3 x\right)$ $\left[\dfrac{1}{x}\cdot\log_3 e\right]$

29. $D\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ $\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$

30. $D\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$ $\left[-\dfrac{1}{e^x}\right]$

Derivata di una funzione composta

Si può dimostrare che:

$$\boxed{D\left(f(g(x))\right)=f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Esempi

a) $D\left(sen(2x)\right)=\cos(2x)\cdot 2=2\cdot\cos(2x)$

b) $D(\ln(x^2+1))=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$

c) $D(\ln(sen3x))=\frac{1}{sen3x}\cdot cos3x\ 3=3cotg3x$

d) $D\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

e) $D(\cos(3x))=-sen(3x)\cdot 3=-3sen(3x)$

f) $D(tg(3x))=\dfrac{1}{\cos^2(3x)}\cdot 3=\dfrac{3}{\cos^2(3x)}$

g) $D(2^{3x})=2^{3x}\cdot\ln 2\cdot 3=3\cdot\ln 2\cdot 2^{3x}$

h) $D(\log_2(3x))=\dfrac{1}{3x}\cdot\log_2 e\cdot 3=\dfrac{\log_2 e}{x}$

ESERCIZI
DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

1) $D(ln3x)$ $[\ \frac{1}{x}\ ]$

2) $D(sen4x)$ $[\ 4 \cdot cos4x\ ]$

3) $D(\cos^3 2x)$ $[\ -6cos^2 2x \cdot sen2x\ ]$

4) $D(ln^2(4x+1))$ $[\ \frac{8\ln(4x+1)}{4x+1}\ ]$

5) $D(e^{\frac{x-1}{x}})$ $[\ e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\ ]$

6) $D(\ln(\frac{x}{x^2+1}))$ $[\ \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}\ ]$

7) $D(2^{x^2+1})$ $[\ ln2 \cdot 2^{x^2+1} \cdot 2x\ ]$

8) $D(sen2x)$ $[2\cos 2x]$

9) $D\left(\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)\right)$ $\left[-\frac{1}{x+1}\right]$

10) $D\left(e^{\frac{x}{x-3}}\right)$ $\left[-\frac{3}{(x-3)^2} \cdot e^{\frac{x}{x-3}}\right]$

11) $D(4^{2x+1})$ $[\ 2 \cdot \ln 4 \cdot 4^{2x+1}\ ]$

12) $D\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\right)$ $[\ \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}]$

13) $D(\cos 2x)$ $[-2sen2x]$

14) $D(tg 2x)$ $\left[\frac{2}{\cos^2 2x}\right]$

15) $D(e^{x^2+1})$ $[2x \cdot e^{x^2+1}]$

NOTA IMPORTANTE

Utilizzando la derivata di una funzione composta si può dimostrare che per $\alpha \in \Re$ si ha

$$\boxed{D\left(f^{\alpha}(x)\right) = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)}$$

e in particolare $\boxed{D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}}$

Quindi per $\alpha = \frac{1}{2}$ avremo:

$$D(\sqrt{x}) = D\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = D\left(f(x)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Cioè

$$\boxed{D\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$$

Esempi

a) $D\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $D\left(\sqrt{x^3+2}\right) = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3+2}}$

c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

d) $D\left(\sqrt[4]{x^3}\right) = D\left(x^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

Ricapitolando

$D(f(x)+g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$

$D(f(x)\cdot g(x)) = D(f(x))\cdot g + f(x)\cdot D(g(x))$

$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D(f)\cdot g - f\cdot D(g)}{g^2(x)}$

$D\big(f(g(x))\big) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

In particolare:

$D\big(kf(x)\big) = k\cdot D(f(x))$

$D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in R$)

$D(f(x)^{\alpha}) = \alpha\cdot f(x)^{\alpha-1}\cdot f'(x)$ ($\alpha \in R$)

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ $D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$D(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$D(tgx) = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

$D(cotgx) = -\frac{1}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$

Nota

Si può dimostrare che le derivate delle funzioni inverse delle funzioni goniometriche risultano:

$D(arcsenx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D(arccosx) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}$

$D(arccotgx) = -\frac{1}{1+x^2}$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

DERIVATE

1) $D(arctg\,2x)$ $\left[\dfrac{2}{1+4x^2}\right]$

2) $D\left(arct\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ $\left[-\dfrac{1}{x^2+1}\right]$

3) $D(\sqrt{senx+cosx})$ $\left[\dfrac{cosx-senx}{2\sqrt{senx+cosx}}\right]$

4) $D(3x+cotgx)$ $\left[3-\dfrac{1}{sen^2x}\right]$

5) $D\left(\dfrac{2}{x}+\ln x\right)$ $\left[\dfrac{x-2}{x^2}\right]$

6) $D(2\cos^3 x)$ $[-6senx\cos^2 x]$

7) $D(x\cdot\ln^3 x)$ $[\ln^3 x+3\ln^2 x]$

8) $D\left(\dfrac{senx-\cos x}{\cos x+1}\right)$ $\left[\dfrac{senx+\cos x+1}{(\cos x+1)^2}\right]$

9) $D\left(\dfrac{x}{x^3+1}\right)$ $\left[\dfrac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}\right]$

10) $D\left(\sqrt{e^{x-2}}\right)$ $\left[\dfrac{e^{x-2}}{2\sqrt{e^{x-2}}}\right]$

11) $D\left(\dfrac{1}{sen^2x}\right)$ $\left[-\dfrac{2\cos x}{sen^3x}\right]$

12) $D\left(\dfrac{senx}{2cosx-1}\right)$ $\left[\dfrac{cosx(2cosx-1)+2sen^2x}{(2cosx-1)^2}\right]$

13) $D(arctg(2x+1))$ $\left[\dfrac{2}{1+(2x+1)^2}\right]$

14) $D\left(\dfrac{e^x+1}{2-e^x}\right)$ $\left[\dfrac{3e^x}{(2-e^x)^2}\right]$

Problemi

1) Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - x + 1$ determina l'equazione della retta tangente alla parabola nel suo punto $T(0;1)$ e disegna parabola e tangente.

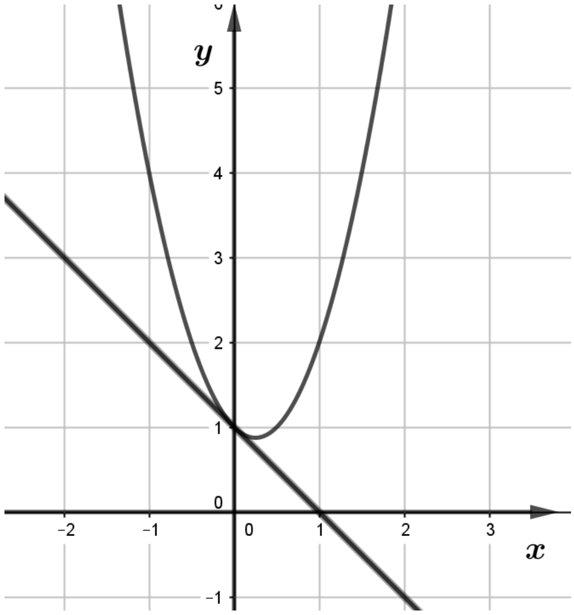
Svolgimento

Possiamo determinare la funzione derivata $y' = 4x - 1$ e poi calcolarla in $x = 0$:

$$y'(0) = -1$$

Quindi la retta tangente in $x = 0$ ha inclinazione $m = -1$ e poiché passa per T avrà equazione:

$$y - 1 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x + 1$$



2) Data la funzione omografica $\Im : y = \dfrac{2x}{x-1}$, determina la retta tangente nell'origine. Disegna sia la funzione omografica che la tangente.

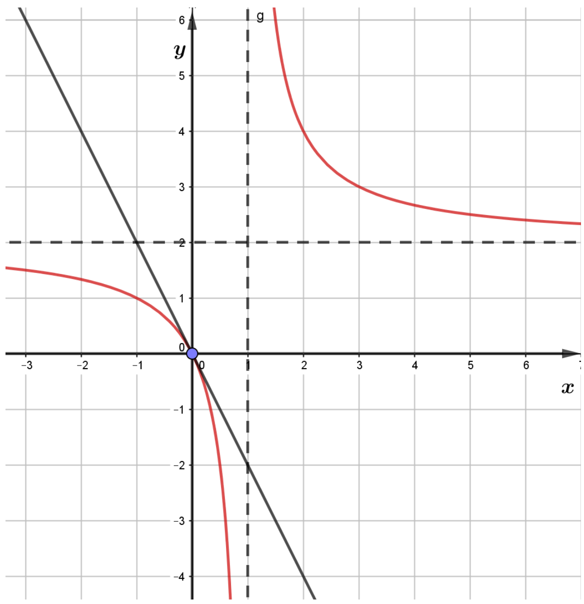
Svolgimento

Determiniamo la derivata della funzione

$$D\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

e calcoliamola in $x = 0$: $y'(0) = -2$ per determinare il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto (0;0).

Quindi l'equazione della tangente sarà: $y = -2x$.



Derivate successive di una funzione

Come abbiamo definito la funzione derivata di $f(x)$, possiamo definire la funzione derivata di $f'(x)$, che indicheremo con $f''(x)$ e chiameremo derivata seconda di $f(x)$ e così via.

Esempio1

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$
$$D\left(f'(x)\right) = f''(x) = 12x^2 + 12x$$
$$D\left(f''(x)\right) = f'''(x) = 24x + 12$$
$$D\left(f'''(x)\right) = f^{(4)}(x) = 24$$
$$D\left(f^{(4)}(x)\right) = f^{(5)}(x) = 0$$

Osserviamo che $f(x)$ è un polinomio di grado 4:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq 5$$

Analogamente se $f(x)$ è un polinomio di grado k si avrà:

$$f^{(n)}(x) \equiv 0 \ \forall n \geq k + 1$$

Esempio2

$$f(x) = senx$$
$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -senx$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = senx$$
....

Esempio 3

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
....

Significati della derivata in fisica

Due fondamentali concetti della cinematica di un punto materiale sono basati sulla derivata: la *velocità* e l'*accelerazione*.

Supponiamo di considerare un punto materiale P che si muove su una traiettoria rettilinea con legge oraria $s = s(t)$.

La velocità istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

L'accelerazione istantanea di P all'istante t_0 risulta:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) = s''(t_0)$$

Esempi

1. Se consideriamo $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ (*moto uniformemente accelerato*) troviamo:

$$v(t) = s'(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = v'(t) = a$$

2. Se considero $s(t) = s_0 \operatorname{sen} \omega t$ (*moto armonico*)

$$v(t) = s'(t) = \omega s_0 \cos \omega t$$

$$a(t) = v'(t) = -\omega^2 s_0 \operatorname{sen} \omega t$$

come abbiamo visto studiando il moto armonico.

SCHEDA DI VERIFICA 1
DERIVATE

1) Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a) $y = \ln(3x-1)$

b) $y = \dfrac{\cos x - 3senx}{1 + senx}$

c) $y = \sqrt{1 - e^{2-x}}$

d) $y = 3^{\frac{1}{x}}$

e) $y = e^{4x+1}$

f) $y = arctg\dfrac{x}{3}$

g) $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

h) $y = sen(2x+1)$

2) Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata e disegnane il grafico.

a) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-4}$

b) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

Problemi

1) Disegna la funzione omografica $\Im$ di equazione $y = \dfrac{2x}{x+1}$ e la parabola di equazione $y = 2x - x^2$. Verifica che in (0,0) hanno la stessa tangente e determina l'equazione della tangente comune.

2) Disegna la parabola $y = x^2 - 2x$ e determina la tangente in (0;0). Determina anche la tangente alla parabola nel suo punto di ascissa $x = 2$.

3) Considera un punto materiale che si muove di moto armonico con legge oraria $s(t) = 3sen(2\pi \cdot t)$. Determina la sua velocità e la sua accelerazione al tempo $t = 1$ (s).

SCHEDA DI VERIFICA 2

DERIVATE

1. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

a. $D(senx \cdot \cos x)$

b. $D\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

c. $D\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$

d. $D(ln^3(1-2x))$

e. $D\left(\sqrt{1-x}\right)$

f. $D(\sqrt{lnx-1})$

g. $D\left(e^{2x}-1\right)$

h. $D(sen4x)$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni determina dominio, asintoti, punti di discontinuità, derivata e disegna il grafico:

a. $y=\frac{1}{x-1}$

b. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Problemi

1)Disegna la parabola $y=4x-x^2$ e determina l'equazione della tangente in (0;0). Come risulta l'equazione della tangente nel punto (4;0)?

2) Disegna il grafico della funzione $y=\frac{1}{x-2}$ e determina l'equazione della tangente nel suo punto di ascissa $x=3$. Disegna la funzione e la tangente.

3) Un punto materiale si muove con legge oraria $s(t)=t^3$. Determina la sua velocità e accelerazione all'istante $t=1$ (s).