

Funzioni continue

Definizione: $f(x)$ si dice continua in $x_0 \in D_f$ quando

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione: $f(x)$ si dice continua in $I \subset D_f$ se è continua $\forall x \in I$.

Avevamo già dato questa definizione parlando del $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

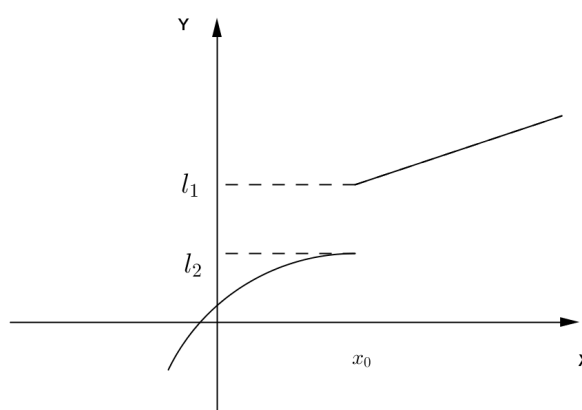
Punti di discontinuità

Un punto x_0 (per il quale abbia senso calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ cioè un punto di accumulazione del dominio (cioè posso avvicinarmi quanto voglio ad x_0 da destra e/o da sinistra all'interno del dominio) si dice punto di discontinuità per $f(x)$ quando non si verifica la (*).

Si possono avere tre tipi di discontinuità:

- **Discontinuità di prima specie** quando

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= l_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= l_2 \end{aligned} \quad \text{con} \quad l_1 \neq l_2$$

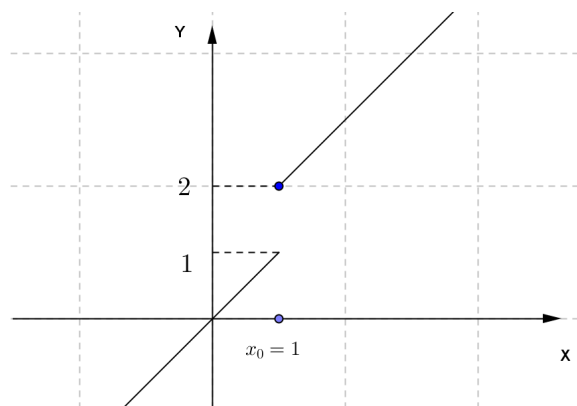


Si dice anche che la funzione ha un “salto” in x_0 .

Esempio: consideriamo per esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

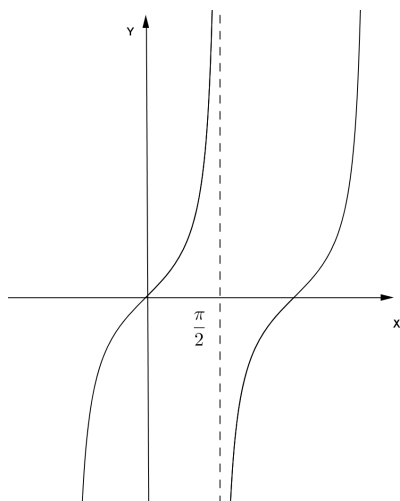
Poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ la funzione ha in $x_0 = 1$ una discontinuità di prima specie.



- **Discontinuità di seconda specie** quando almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) è infinito oppure non esiste.

Esempi:

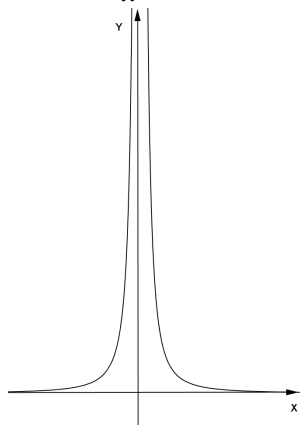
1) $f(x) = \operatorname{tg}x$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

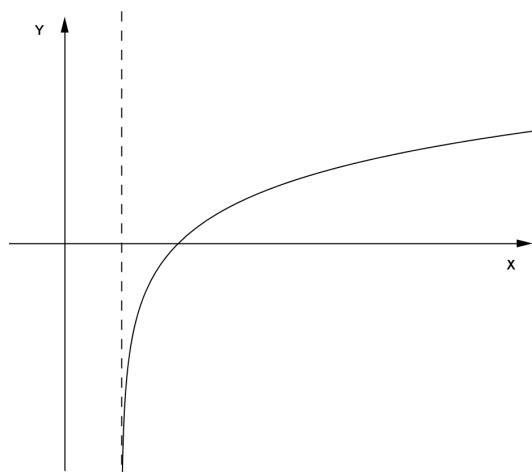
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} \text{ è un punto di discontinuità di 2ª specie}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x_0 = 0 \text{ è un punto di discontinuità di 2ª specie}$$

3) $f(x) = \ln(x-1)$

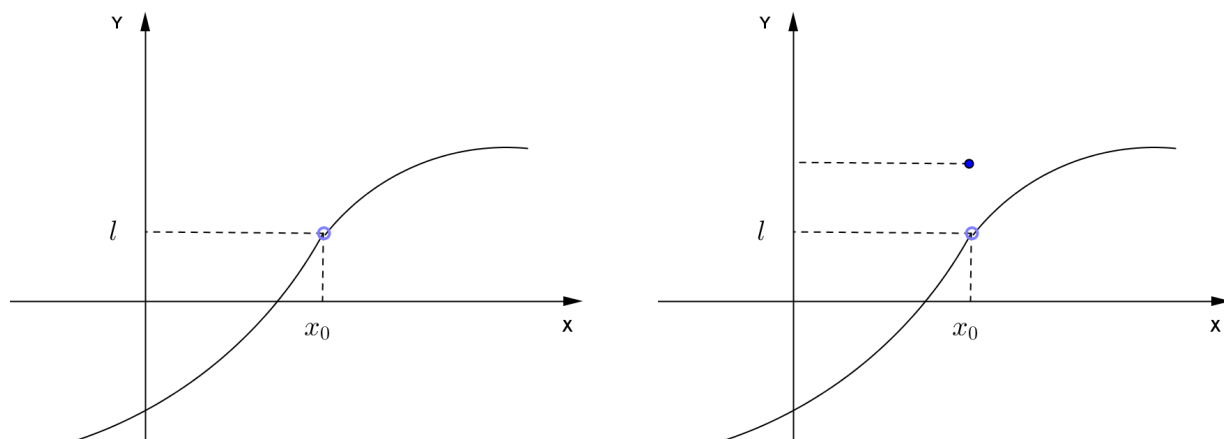


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 1 \text{ è punto di discontinuità di 2ª specie.}$$

• **Discontinuità di terza specie** quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ ma } f(x) \text{ non è definita in } x_0 \text{ oppure } f(x_0) \neq l$$

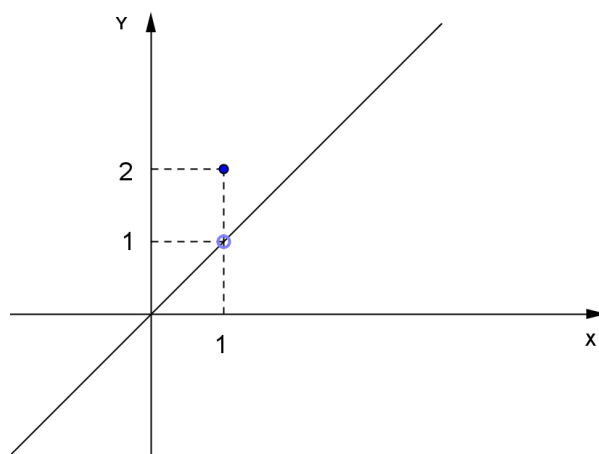
Questa specie di discontinuità viene anche detta discontinuità “eliminabile” perché se $f(x)$ non è definita in x_0 possiamo porre $f(x_0) = l$ oppure, se era già definita, cambiare la definizione di $f(x)$ in x_0 ponendo appunto $f(x_0) = l$ e rendendola così continua in x_0 .



Esempio:

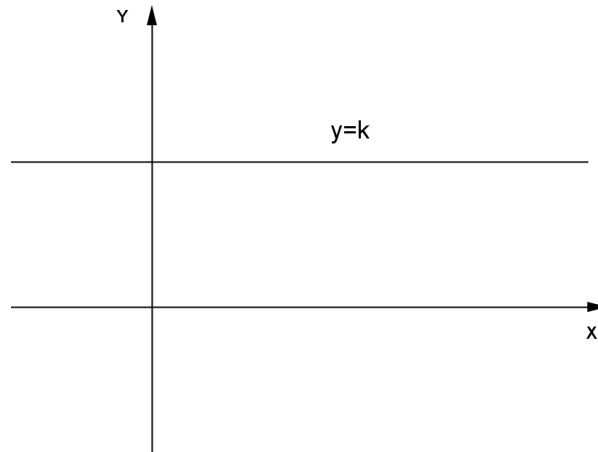
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ma} \quad \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ma $f(1) = 2 \Rightarrow x_0 = 1$ è un punto di discontinuità di 3^a specie.

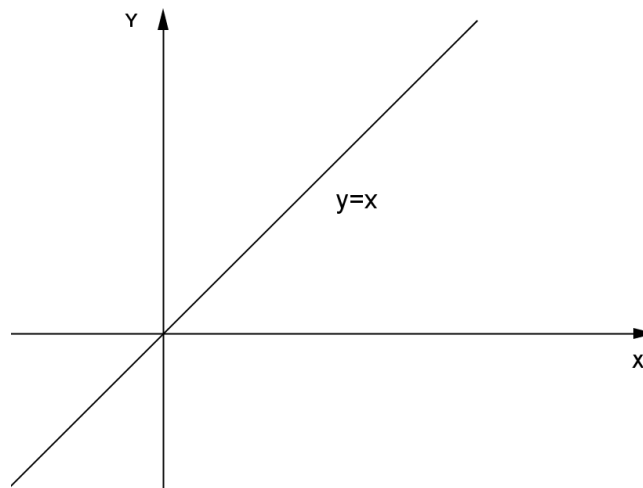


Esempi di funzioni continue

- La funzione costante $f(x) = k$ è continua $\forall x \in \mathfrak{R}$
 Infatti qualunque sia x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$ ($= f(x_0)$)



- La funzione $f(x) = x$ è continua $\forall x \in \mathfrak{R}$ poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ($= f(x_0)$)



- Le funzioni polinomiali $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ sono continue $\forall x \in \mathfrak{R}$
- Le funzioni razionali fratte $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$ sono continue $\forall x : D(x) \neq 0$
- Le funzioni goniometriche $y = \text{sen}x$, $y = \text{cos}x$ sono continue $\forall x \in \mathfrak{R}$ mentre $y = \text{tg}x$ è continua $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- La funzione esponenziale $y = a^x$ ($a > 0$ $a \neq 1$) è continua $\forall x \in \mathfrak{R}$
- La funzione logaritmica $y = \log_a x$ ($a > 0$ $a \neq 1$) è continua $\forall x > 0$

Teoremi sulle funzioni continue (solo enunciati)

1) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in x_0 allora

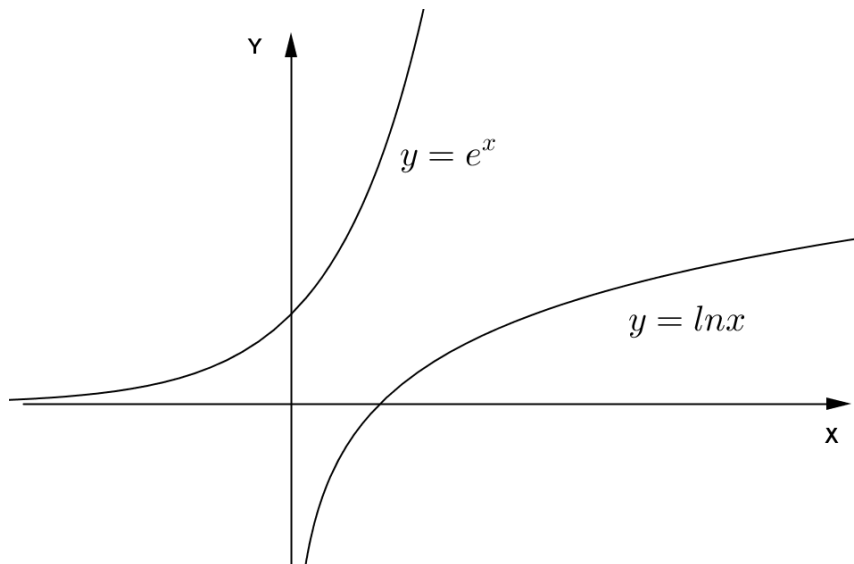
$$\begin{aligned} & f(x) \pm g(x) \\ & f(x) \cdot g(x) \\ & \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{se } g(x_0) \neq 0) \end{aligned}$$

sono ancora funzioni continue in x_0 .
(La dimostrazione si basa sulle operazioni con i limiti.)

2) Se $g(x)$ è una funzione continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è continua in x_0 .

3) Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo I e strettamente crescente (o decrescente) in I allora la funzione f^{-1} è continua in $f(I)$ (immagine di I)

Esempio:

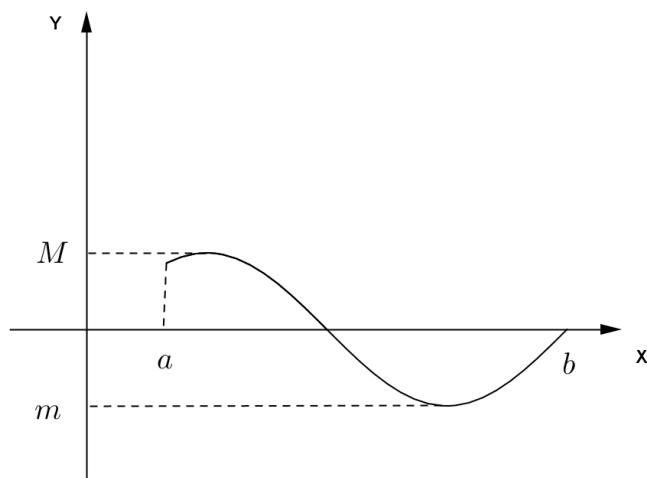


La funzione esponenziale $y = e^x$ è continua in \mathfrak{R} e strettamente crescente.

La funzione logaritmo $y = \ln x$ è continua quando $x > 0$ (infatti il codominio di $y = e^x$ sono i reali positivi).

4) **Teorema di Weierstrass**

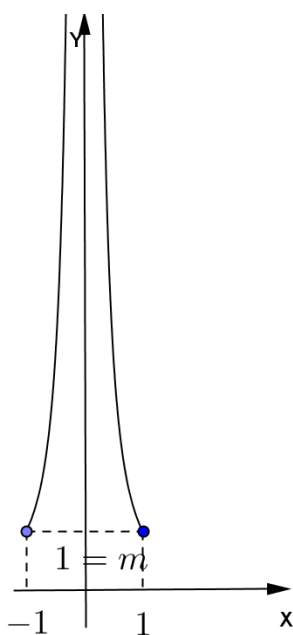
Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m .



Nota: se la funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato ma non è continua in tutti i suoi punti può non avere massimo e minimo assoluti.

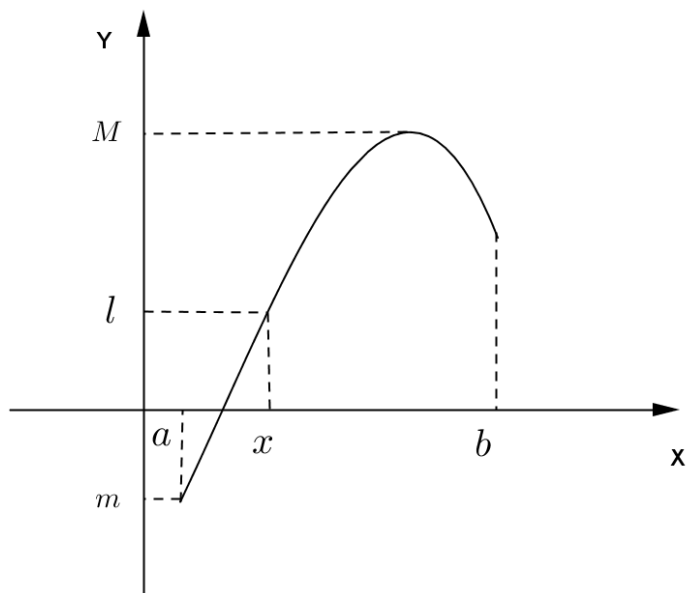
Esempio: $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad -1 \leq x < 1 \quad (x \neq 0)$

Il minimo assoluto è $m=1$ ma non c'è massimo assoluto.



5) Teorema dei valori intermedi

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo assoluto.

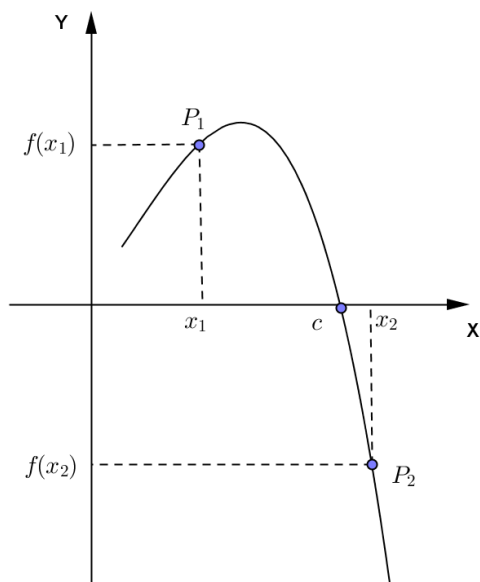


Per ogni $m \leq l \leq M$
 esiste almeno un $x \in [a,b]$:
 $f(x) = l$

6) Teorema di esistenza degli zeri

Se $f(x)$ è continua in un intervallo I ed esistono x_1, x_2 con $x_1 < x_2$ aventi immagini $f(x_1), f(x_2)$ discordi allora esiste (almeno) un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(c) = 0$

(c si dice **zero** della funzione)



$f(x_1), f(x_2)$ di segno opposto
 $x_1 < c < x_2$
 $f(c) = 0$

Infatti è intuitivo che per passare da P_1 (per esempio sopra all'asse x) a P_2 (sotto all'asse x) con un grafico "continuo" almeno una volta il grafico taglierà l'asse x .

Nota : Questo teorema è spesso utilizzato per studiare l'esistenza di soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$

ESERCIZI
FUNZIONI CONTINUE

1) Studia i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ [$x = \pm 2$ discontinuità di seconda specie]

b) $f(x) = \frac{x}{x + 3}$ [$x = -3$ discontinuità di seconda specie]

c) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ [$x = -1$ discontinuità di terza specie]

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ [$x = 0$ discontinuità di seconda specie]

f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ [$x = 0$ discontinuità di prima specie]

2) La funzione $f(x) = x^2 + x$ ammette massimo e minimo assoluti in $[-1, 1]$? Determina m ed M.

$$\left[m = -\frac{1}{4}; M = 2 \right]$$

3) Si può applicare il teorema di Weierstrass alla funzione $y = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[-1, 1]$? Perché?

[no]

4) L'equazione $x^3 + x^2 - 4 = 0$ ha (almeno) uno zero appartenente all'intervallo $[1, 2]$? Motiva la risposta.

[si]

5) La funzione $f(x) = \ln x + x$ ha (almeno) uno zero appartenente all'intervallo $(0; 1]$? Motiva la risposta.

[sì]