

Integrali indefiniti

FUNZIONI PRIMITIVE

Definizione

$F(x)$ si dice “funzione primitiva” di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$

Esempio

Quali sono le funzioni primitive di $f(x) = \cos x$?

Ricordando che $D(\sin x) = \cos x$ avrò che $F(x) = \sin x$ ma anche $y = \sin x + c$ (con $c \in \mathbb{R}$) risulta funzione primitiva di $f(x) = \cos x$ poiché $D(\sin x + c) = \cos x$.

Abbiamo infatti il seguente teorema:

Teorema: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x) \Rightarrow$ anche $F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$) è una primitiva di $f(x)$ ed ogni primitiva di $f(x)$ è del tipo $F(x) + c$.

Dimostrazione

Poiché $D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$ anche $F(x) + c$ è primitiva di $f(x)$.

Inoltre se $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ si ha:

$$D(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow G(x) - F(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

Definizione: l'insieme delle primitive di $f(x)$ viene indicato con il simbolo

$$\int f(x) dx$$

che si legge *integrale indefinito di $f(x)$ in dx* .

Quindi se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + c \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ prende il nome di *funzione integranda*.

Nel nostro esempio quindi scriviamo che:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

Integrali indefiniti

L'integrazione indefinita può essere considerata l'operazione inversa della differenziazione poiché

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + c) = F'(x) dx = f(x) dx$$

E' chiaro inoltre che $D\left(\int f(x)dx\right) = D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$

Proprietà dell'integrale indefinito

$$1. \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Dimostrazione

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora $k \cdot F(x)$ è primitiva di $k \cdot f(x)$ poiché $D(k \cdot F(x)) = k \cdot f(x)$

Esempio: $\int 2 \cos x dx = 2 \int \cos x dx = 2(\sin x + c)$ o anche $2 \sin x + c$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Dimostrazione

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive rispettivamente di $f(x)$ e di $g(x)$, allora $D(F(x) + G(x)) = f(x) + g(x)$ e quindi $F(x) + G(x)$ è una primitiva di $f(x) + g(x)$.

Esempio: $\int (x + \cos x) dx = \int x dx + \int \cos x dx = \frac{1}{2} x^2 + \sin x + c$

Integrali indefiniti immediati

$$1) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad \text{con} \quad \alpha \neq -1$$

$$2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (*)$$

$$3) \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cot} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(ricorda che $D a^x = a^x \cdot \ln a$)

$$\int e^x dx = e^x + c$$

(caso particolare per $a = e$)

$$(*) \text{ NOTA} \quad \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} \cdot (-1) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Esempi

$$1) \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$2) \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln|x| + c$$

$$3) \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4 \operatorname{arcsen} x + c$$

$$4) \int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + c$$

Integrazioni basate sulla derivata della funzione composta

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta, abbiamo:

$$1) \quad \boxed{\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot f^{\alpha+1}(x) + c \quad \alpha \neq -1}$$

Esempio 1: $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c$

Infatti se deriviamo $D\left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$

Esempio 2: $\int (x^2 + 1)^3 \cdot x \, dx$

Cerchiamo di riportarci al caso $\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx$ osserviamo che $D(x^2 + 1) = 2x$, mentre nella nostra funzione integranda abbiamo solo x . Per ottenere $f'(x)$ moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int (x^2 + 1)^3 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + c$$

Esempio 3: $\int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c$

Esempio 4: $\int \sqrt{x+1} \, dx$

Osserviamo che $\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ e che $D(x+1) = 1$, quindi

$$\int \sqrt{x+1} \, dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{1+x} + c$$

NOTA

Un caso significativo è:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} \, dx = -\frac{1}{f(x)} + c}$$

$$2) \quad \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c}$$

Esempio 1: $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Se ci accorgiamo che $D(x^2+x) = 2x+1$, abbiamo subito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int \frac{D(x^2+x)}{x^2+x} dx = \ln|x^2+x| + c$$

Esempio 2: $\int \frac{\text{sen}x}{\cos x} dx$

In questo caso $D(\cos x) = -\text{sen}x$ mentre noi abbiamo $\text{sen}x$ possiamo. Possiamo “aggiustare” le cose così:

$$\int \frac{\text{sen}x}{\cos x} dx = -\int \frac{(-\text{sen}x)}{\cos x} dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

3)

a) $\boxed{\int (\text{sen}f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c}$

Esempio: $\int \text{sen}2x dx$

Se $f(x) = 2x$ allora $D(f(x)) = 2$.

Possiamo “aggiustare” le cose:

$$\int \text{sen}2x dx = \frac{1}{2} \int (\text{sen}2x) \cdot 2 dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

b) $\boxed{\int (\cos f(x)) \cdot f'(x) dx = \text{sen}(f(x)) + c}$

Esempio: $\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

$$\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

c)
$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg}(f(x)) + c$$

Esempio:
$$\int \frac{3}{\cos^2 3x} dx = \operatorname{tg} 3x + c$$

d)
$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} dx = -\operatorname{cot} g(f(x)) + c$$

Esempio:
$$\int \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2 x^3} dx = -\frac{1}{3} \operatorname{cot} gx^3 + c$$

e)
$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + c$$

Esempio:
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + c$$

f)
$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$$

Esempio:
$$\int \frac{1}{9+x^2} dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{9} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

4)
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int (e^{f(x)} \cdot f'(x)) dx = e^{f(x)} + c$$

Esempio 1:
$$\int x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2+1} + c$$
 notando che $D(x^2+1) = 2x$

Esempio 2:
$$\int \cos x \cdot 3^{\operatorname{sen} x} dx = \frac{3^{\operatorname{sen} x}}{\ln 3} + c$$

ESERCIZI
INTEGRAZIONI IMMEDIATE

1) $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$

16) $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x \, dx$

2) $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos^4 x \, dx$

17) $\int (2+x)^3 \, dx$

3) $\int (1+x)^4 \, dx$

18) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

4) $\int \sqrt{2x+1} \, dx$

19) $\int \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \, dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

20) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(2-x)} \, dx$

6) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

21) $\int \frac{1}{x^2+3} \, dx$

7) $\int \operatorname{cot} gx \, dx$

22) $\int e^{2x+1} \, dx$

8) $\int \frac{1}{2x+1} \, dx$

23) $\int \frac{x}{x^2-2} \, dx$

9) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$

24) $\int \frac{x-1}{x^2+5} \, dx$

10) $\int \frac{e^x}{2e^x+5} \, dx$

25) $\int \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$

11) $\int \cos 3x \, dx$

26) $\int x \cdot (x^2-1)^3 \, dx$

12) $\int \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \, dx$

27) $\int x \cdot \cos x^2 \, dx$

13) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(3-x)} \, dx$

28) $\int \operatorname{sen} 4x \, dx$

14) $\int x^2 \cdot e^{x^3} \, dx$

29) $\int \frac{x^2}{x^3-1} \, dx$

15) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

30) $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c$

2) $-\frac{\cos^5 x}{5} + c$

3) $\frac{(1+x)^5}{5} + c$

4) $\frac{1}{3} \cdot (2x+1) \cdot \sqrt{2x+1} + c$

5) $-\sqrt{1-x^2} + c$

6) $-\ln|\cos x| + c$

7) $\ln|\operatorname{sen} x| + c$

8) $\frac{1}{2} \ln|2x+1| + c$

9) $\ln|\ln x| + c$

10) $\frac{1}{2} \ln(2 \cdot e^x + 5) + c$

11) $\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + c$

12) $\frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

13) $\cot g(3-x) + c$

14) $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$

15) $2e^{\sqrt{x}} + c$

16) $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + c$

17) $\frac{(2+x)^4}{4} + c$

18) $\frac{3}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + c$

19) $-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + c$

20) $\cot g(2-x) + c$

21) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

22) $\frac{1}{2} e^{2x+1} + c$

23) $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 2| + c$

24) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + c\right)$

25) $\ln|e^x - 1| + c$

26) $\frac{1}{8} (x^2 - 1)^4 + c$

27) $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + c$

28) $-\frac{1}{4} \cos 4x + c$

29) $\frac{1}{3} \ln|x^3 - 1| + c$

30) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + c$

Integrazione mediante semplici trasformazioni

1) $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

In questo caso conviene semplicemente “separare” i termini al numeratore:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

2) $\int \operatorname{sen}^2 x dx$

Ricordiamo che $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, quindi:

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + c$$

3) $\int \cos^2 x dx$

Analogamente al precedente ricordando che $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

4) $\int \operatorname{sen}^3 x dx$

Possiamo scrivere: $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos^2 x$ quindi

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = \int \operatorname{sen} x dx - \int \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

5) $\int \cos^3 x dx$

Possiamo scrivere $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x) = \cos x - \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x$ e si procede come nel caso precedente.

Integrali indefiniti

$$6) \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$$

In questo caso conviene sostituire $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ e poi separare i due termini:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \\ &= -\ln|\cos x| + \ln|\operatorname{sen} x| + c \end{aligned}$$

$$7) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$8) \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$$

Se poniamo $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ e ritroviamo un integrale simile al n°6:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx &= \int \frac{1}{2\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \int \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx = -\ln\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \ln\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| + c \end{aligned}$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Consideriamo una funzione razionale fratta $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ con grado di $D(x) \leq 2$.

Distinguiamo due casi:

- a) **Se il grado del numeratore $N(x)$ è maggiore o uguale al grado del denominatore $D(x)$ si esegue la divisione.**

Esempio: $\int \frac{x^2+1}{x+3} dx \implies$

x^2	$0x$	1	$x+3$
$-x^2$	$-3x$		$x-3$
$=$			$-3x$
	$3x$	9	
$=$			10

Quindi $x^2 + 1 = (x-3)(x+3) + 10$

e sostituendo

$$\int \frac{x^2+1}{x+3} dx = \int \frac{(x-3)(x+3)+10}{x+3} dx = \int (x-3) dx + \int \frac{10}{x+3} dx = \frac{(x-3)^2}{2} + 10 \cdot \ln|x+3| + c$$

- b) **Se grado di $N(x) <$ grado di $D(x)$**

- Se il grado di $D(x)$ è 1, allora il grado di $N(x)$ sarà 0 (quindi $N(x) =$ costante) e l'integrale si risolve facilmente.

Esempio: $\int \frac{10}{x+3} dx = 10 \int \frac{1}{x+3} dx = 10 \cdot \ln|x+3| + c$

- Se il grado di $D(x)$ è 2, allora $D(x) = ax^2 + bx + c$ e distinguiamo tre casi a seconda che il discriminante dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ (Δ) sia positivo, nullo o negativo.

Caso 1: $\Delta > 0$

In questo caso ci si riconduce a $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

Esempio: $\int \frac{2x-7}{x^2-x-2} dx$

Considerando il denominatore si ha che $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$: cerchiamo due costanti, che chiameremo A e B, in modo che si abbia:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Basta sviluppare al secondo membro dell'uguaglianza e porre, per il principio di identità dei polinomi, l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)(x-2)}$$

Uguagliando i coefficienti si ha il sistema:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-1 \end{cases}$$

Perciò: $\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2}$ e quindi:

$$\int \frac{2x-7}{x^2-x-2} dx = \int \frac{3}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = 3\ln|x+1| - \ln|x-2| + c$$

Attenzione

Se nel polinomio al denominatore $a \neq 1$ occorre ricordare che $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Esempio: $\int \frac{1}{2x^2-5x-3} dx$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$ ammette come radici $x_1 = 3; x_2 = -\frac{1}{2}$, perciò la sua scomposizione sarà:

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(x-3)\left(\frac{2x+1}{2}\right) = (x-3)(2x+1), \text{ da cui } \frac{1}{2x^2-5x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+1}$$

e, procedendo come nell'esempio precedente, si giunge alla soluzione.

Caso 2: $\Delta = 0$

In questo caso il polinomio al denominatore è un quadrato e ci si può ricondurre a

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$$

Esempio 1: $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1}$

$4x^2 - 4x + 1$ è il quadrato di $(2x - 1)$ perciò l'integrale assegnato può essere scritto come:

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{(2x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2x-1)} + c$$

Esempio 2: $\int \frac{x+5}{9x^2 - 6x + 1} dx$

Prima di “spezzare” il numeratore dobbiamo vedere quello che può essere utile affinché il numeratore possa essere riportato ad essere la derivata del denominatore.

$$D(9x^2 - 6x + 1) = 18x - 6 = 18 \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

Quindi possiamo scrivere $x + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{16}{3}$

$$\int \frac{x - \frac{1}{3}}{9x^2 - 6x + 1} dx + \frac{16}{3} \int \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} dx = \frac{1}{18} \ln(9x^2 - 6x + 1) - \frac{16}{9} \frac{1}{(3x-1)} + c$$

Nota: la prima parte della risoluzione può anche essere scritta come

$$\frac{1}{18} \ln(3x-1)^2 = \frac{1}{18} \cdot 2 \cdot \ln|3x-1| = \frac{1}{9} \cdot \ln|3x-1|$$

Caso 3: $\Delta < 0$

In questo caso il polinomio al denominatore non si può scomporre. Proviamo a fare in modo che nel denominatore ci sia un quadrato (metodo del completamento del quadrato) in modo da poter applicare

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$$

Esempio 1: $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 6}$

$$x^2 - 4x + 6 = (x^2 - 4x + 4) + 2 = (x - 2)^2 + 2, \text{ quindi:}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 6} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 2}$$

Ora mettiamo in evidenza il 2 in modo da avere 1 e poter applicare l'integrale dell'arcotangente:

$$\int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 2} = \int \frac{dx}{2 \left[\left(\frac{x - 2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left[\left(\frac{x - 2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - 2}{\sqrt{2}} \right) + c$$

Esempio 2: $\int \frac{3x + 1}{x^2 + 4} dx$

In questo caso possiamo “spezzare” il numeratore, ma prima vediamo come risulta la derivata del denominatore:

$$D(x^2 + 4) = 2x$$

Quindi basterà spezzare:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 4} &= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{dx}{4 \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right)} = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \int \frac{dx}{4 \left[\left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right]} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left[\left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

ESERCIZI

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

1) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

2) $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

3) $\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$

4) $\int \frac{2}{x^2 - 3} dx$

5) $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 16}$

6) $\int \frac{x+1}{x^2 - 2x+1} dx$

7) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$

8) $\int \frac{x}{x^2 + x + 2} dx$

Soluzioni degli esercizi

- 1) $\frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$
- 2) $-\ln|x-1| + \ln|x-2| + c = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c$
- 3) $\frac{1}{30} \ln|3x-5| - \frac{1}{30} \ln|3x+5| + c = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{3x-5}{3x+5} \right| + c$
- 4) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + c$
- 5) $-\frac{1}{x+4} + c$
- 6) $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 1| - \frac{2}{x-1} + c = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + c$
- 7) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c$
- 8) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 2) - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}} \right) + c$

Integrazione per sostituzione

Esempio 1: $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

L'integrale non è immediato e, per cercare di renderlo tale, poniamo $t = \sqrt{x}$.

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2 \cdot t \, dt$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{1}{t^2 + t} \cdot 2t \, dt = 2 \int \frac{t}{t(t+1)} dt = 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \cdot \ln|t+1| + c$$

Tornando alla variabile x (essendo $t = \sqrt{x}$) abbiamo:

$$2 \ln|\sqrt{x} + 1| + c$$

Esempio 2: $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

In questo caso se poniamo $x = \text{sent}$ da cui $dx = \cos t \, dt$ avremo:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-(\text{sent})^2} \cos t \, dt = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt \\ &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \text{sen} 2t + c \end{aligned}$$

Visto che $x = \text{sent}$, si ha $t = \arcsen x$ da cui, sostituendo nella soluzione dell'integrale abbiamo in conclusione:

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{4} 2 \text{sent} \cos t + c = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{1-x^2} + c$$

Per esempio abbiamo $\int \sqrt{4-x^2} \, dx$ possiamo ricondurci all'esempio precedente mettendo in evidenza il 4 e portandolo fuori della radice:

$$2 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx$$

A questo punto se poniamo $\frac{x}{2} = \text{sent}$ possiamo procedere in modo analogo al precedente.

Integrazione per parti

Ricordando la regola di derivazione del prodotto:

$$D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \rightarrow f'(x) \cdot g(x) = D(f(x) \cdot g(x)) - f(x) \cdot g'(x)$$

ed integrando:
$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

che viene detta regola di “integrazione per parti” in cui $f'(x)$ prende il nome di fattore derivato e $g(x)$ è detto fattore finito.

Esempio 1:
$$\int x \cdot \cos x dx$$

Possiamo considerare $\cos x$ come fattore derivato cioè $\cos x = D(\sin x)$:

$$\int x \cdot D(\sin x) dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

NOTA: se avessimo scelto come fattore derivato x ($x = D\left(\frac{x^2}{2}\right)$), avremmo solo complicato la situazione senza risolvere l'integrale.

Esempio 2:
$$\int x \cdot e^x dx$$

$$\int x \cdot e^x dx = \int x \cdot D(e^x) dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Esempio 3:
$$\int x \cdot \ln x dx$$

$$\int x \cdot \ln x dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Esempio 4:
$$\int \arctg x dx$$

In casi come questo, possiamo sempre pensare che la funzione sia moltiplicata per un fattore

$$1 = D(x)$$

e quindi
$$\int 1 \cdot \arctg x dx = \int D(x) \cdot \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Esempio 5:
$$\int \ln x dx$$

$$\int 1 \cdot \ln x dx = \int D(x) \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

Esercizi di ricapitolazione sugli integrali indefiniti

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

3) $\int \frac{(\arcsen x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

5) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

6) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

7) $\int \frac{x+1}{x^2+5} dx$

8) $\int \frac{dx}{\cos x}$

9) $\int \ln^2 x dx$

10) $\int e^x \sen x dx$

11) $\int \ln x dx$

12) $\int \frac{\cos x - \sen x}{\cos x + \sen x} dx$

13) $\int \cos x \cdot \sen 2x dx$

14) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

15) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$

16) $\int \frac{x+1}{x^2-25} dx$

17) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

18) $\int \frac{dx}{x^2+10x+25}$

19) $\int \frac{1}{\cos x+1} dx$

20) $\int x^2 e^x dx$

21) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}} dx$

22) $\int \sqrt{x+1} dx$

23) $\int \frac{x+1}{x^2+4} dx$

24) $\int \frac{dx}{\sen x+1}$

25) $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$

26) $\int \frac{x+3}{x^2+9} dx$

27) $\int x \arctg x dx$

28) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

29) $\int \frac{2x+3}{x+5} dx$

30) $\int \sqrt{5-x^2} dx$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{1}{2} \arcsen 2x + c$

2) $-\ln|x-2| + \ln|x-3| + c$

3) $\frac{1}{4} (\arcsen x)^4 + c$

4) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$

5) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{3} \right) + c$

6) $2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x}-1) + c$

7) $\frac{1}{2} \ln(x^2+5) + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) + c$

8) $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + c$

9) $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$

10) $\frac{1}{2} e^x (\sen x - \cos x) + c$

11) $x \ln x - x + c$

12) $\ln|\cos x + \sen x| + c$

13) $-\frac{2}{3} \cos^3 x + c$

14) $\frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c$

15) $\frac{1}{3} \ln|x^3+1| + c$

16) $\frac{3}{5} \ln|x-5| + \frac{2}{5} \ln|x+5| + c$

17) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) + c$

18) $-\frac{1}{x+5} + c$

19) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + c$

20) $e^x (x^2 - 2x + 2) + c$

21) $\frac{1}{4} \arcsen(2x^2) + c$

22) $\frac{2}{3} (x+1) \sqrt{1+x} + c$

23) $\frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + c$

24) $-\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)} + c$

25) $-\frac{1}{x-2} + c$

26) $\frac{1}{2} \ln(x^2+9) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) + c$

27) $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$

28) $\frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + c$

29) $2x - 7 \ln|x+5| + c$

30) $\frac{5}{2} \arcsen \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{5-x^2} + c$