Grafico di una funzione

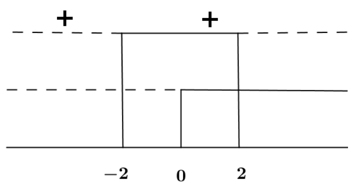
Esempio 1

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}}$

1) Per prima cosa determiniamo il dominio: $D_f = \Re \setminus \{\pm 2\}$

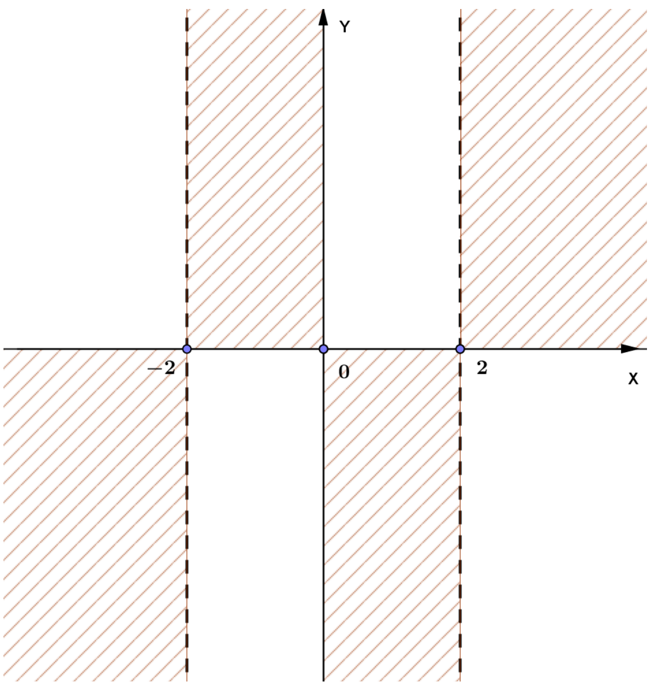
- Studiamo il segno della funzione per capire quando il grafico si trova sopra all'asse x e quando si trova sotto all'asse x.

  Studiamo: $\dfrac{x^3}{4 - x^2} > 0$



Quindi $f(x) > 0 \quad x < -2 \ \cup \ 0 < x < 2$

Cominciamo ad eliminare con un leggero tratteggio le zone dove non si trova il grafico:



- Determiniamo le eventuali intersezioni con gli assi ponendo $x = 0$ (se è nel dominio) e $y = 0$.
  Nel nostro caso troviamo solo $(0;0)$

- Verifichiamo se la funzione è pari o dispari, cioè calcoliamo
  $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{4-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ la funzione è dispari cioè il grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine.

2) Passiamo allo studio dei limiti e alla ricerca degli asintoti (se ci sono).
Nel nostro caso abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\rangle \Rightarrow x = -2 \text{ asintoto verticale}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\rangle \Rightarrow x = 2 \text{ asintoto verticale}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1 \quad (m) \\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x) + x = \ldots = 0 \quad (q) \end{array}\right\rangle \Rightarrow y = -x \text{ asintoto obliquo}$$

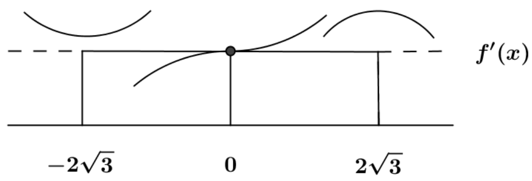
3) Calcoliamo adesso $f'(x)$, studiamo in quali punti si annulla e il suo segno:

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot (12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

Poniamo
$$\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x^2(12-x^2) = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \end{array}$$

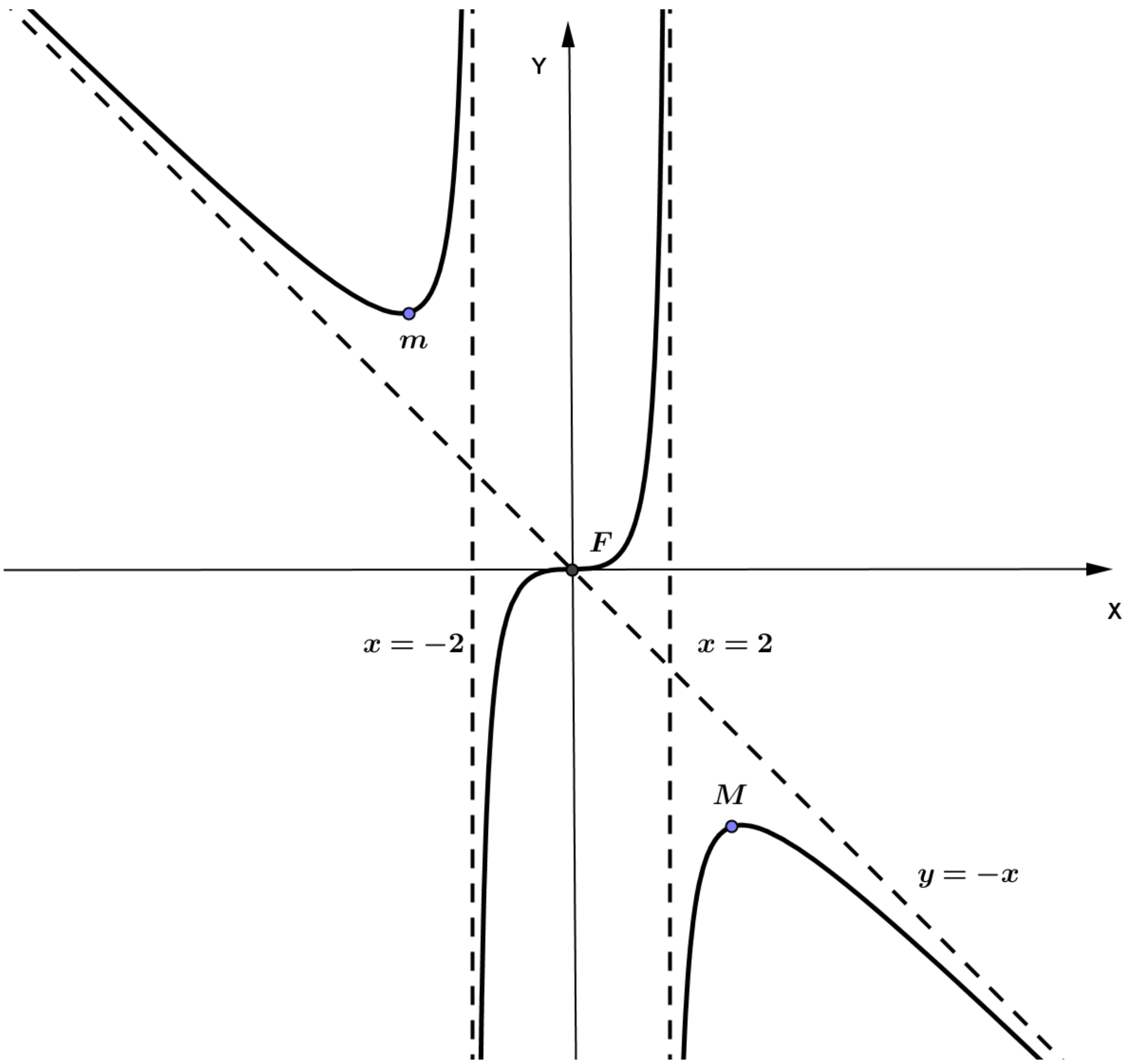
Studiamo

$$\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ \dfrac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow \quad 12 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \end{array}$$



$m\left(-2\sqrt{3};\, f\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}\right)$
$M\left(2\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right)$
$F(0;0)$

Riportiamo i nostri risultati nel disegno: il grafico dovrà necessariamente avere il seguente andamento:

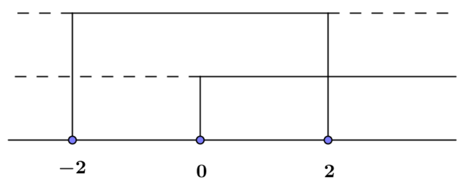


Osservazione

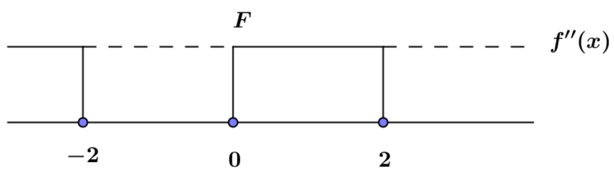
Se calcoliamo $f''(x) = ... = \dfrac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(4 - x^2)^3}$

avremo $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

e studiando $f''(x) > 0$



l'andamento del segno di $f''(x)$ sarà il seguente:



Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto per $x < -2 \quad e \quad 0 < x < 2$, verso il basso per $-2 < x < 0 \quad e \quad x > 2$ e $F(0;0)$ è un flesso.

Naturalmente $x = \pm 2$ non sono punti di flesso perché non appartengono al dominio.

Osserviamo che $F(0;0)$ **è un flesso a tangente orizzontale poiché** $f'(0) = 0$ come avevamo già trovato e quindi anche lo studio di $f''(x)$ conferma la correttezza del nostro grafico.

Nota

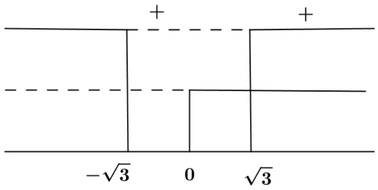
Lo studio di $f''(x)$ è indispensabile per individuare eventuali flessi a tangente obliqua mentre può essere omesso nei casi in cui , per la presenza di asintoti o per lo studio di $f'(x)$, sia chiaro come risulti il grafico come nel nostro esempio.

Esempio 2

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x) = x^3 - 3x}$

1) $D_f = \Re$

$f(x) > 0 \qquad x(x^2 - 3) > 0$



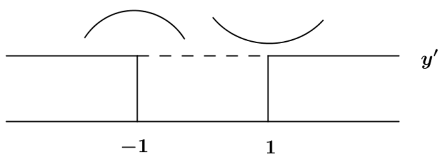
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \quad \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Quindi le intersezioni con gli assi sono $\left(-\sqrt{3};0\right)$ $(0;0)$ $\left(\sqrt{3};0\right)$.
Osserviamo che $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ e quindi la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine.

2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ma non ci sono asintoti obliqui $\left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \right)$

3) $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \quad 3(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$



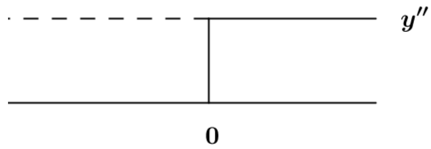
$y' > 0$

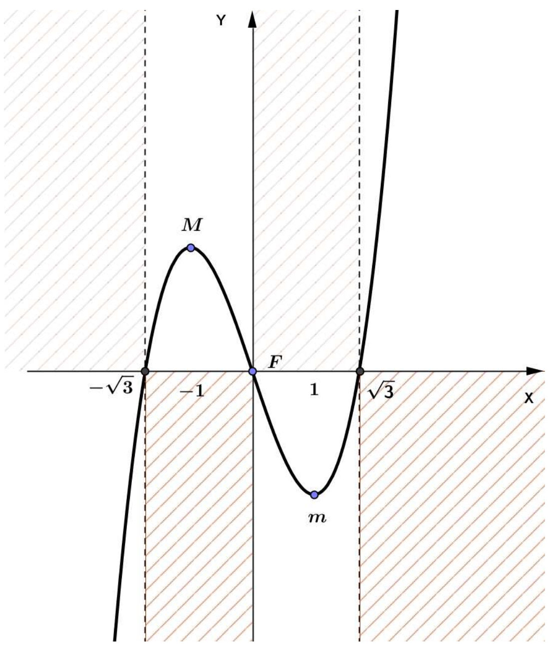
$M(-1;2) \qquad m(1;-2)$

4) $y'' = 6x \;,\; y'' = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;,$

$y'' > 0 \Leftrightarrow \quad x > 0$

$F(0;0)$ flesso a tangente obliqua





ESERCIZI
Funzioni razionali fratte

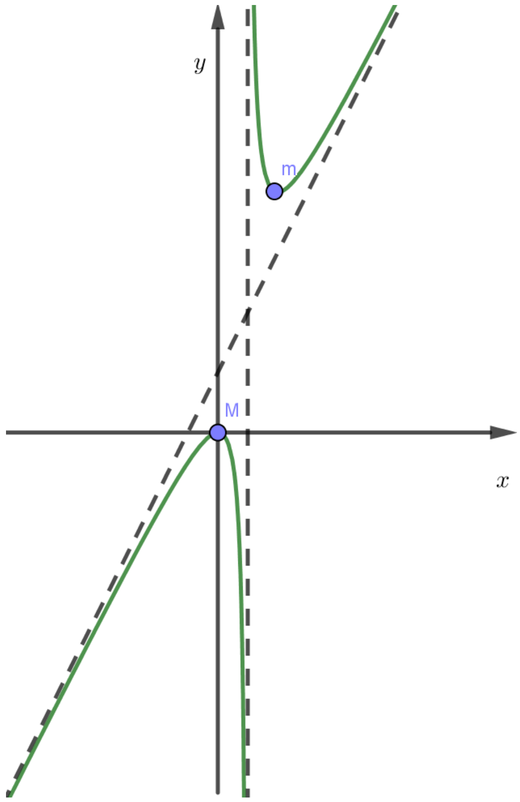
1) $y = \dfrac{2x^2}{x-2}$

Soluzione:

$D_f = \Re \setminus \{2\}$
Asintoto verticale: $x = 2$
Asintoto obliquo: $y = 2x + 4$

$$y' = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$M(0;0)$
$m(4;16)$



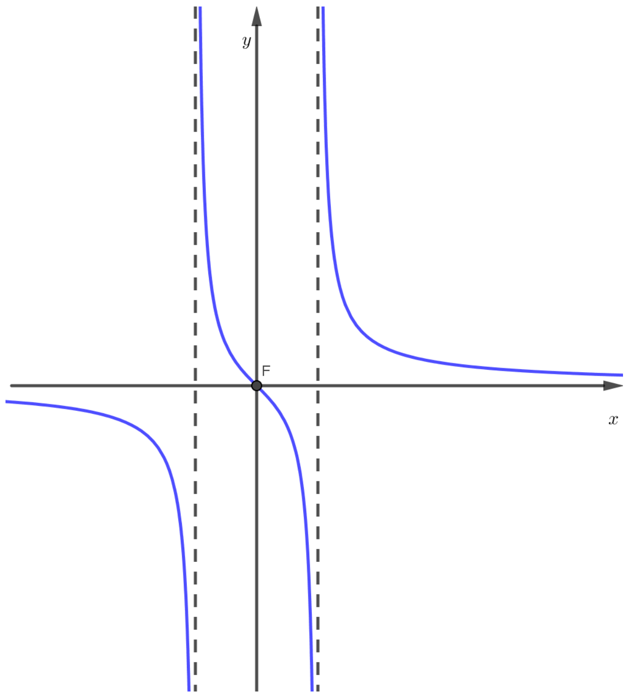
2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Soluzione:

$$y' = -\frac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Flesso a tangente obliqua: $F(0;0)$



3) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=\pm 1;\ \ as.obl.\ \ y=-x;\ \ m\left(-\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);$

$M\left(\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);\ \ F(0;0)\ \ a\ \ tg.\ \ orizz.]$

4) $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$ $\quad[\ as.v.\ \ x=4;\ \ as.obl.\ \ y=-x-1;\ \ m(2;-1)\ \ M(6;-9)\ ]$

5) $y=\dfrac{2x-1}{2x^3}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.or.\ \ y=0;\ \ M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{16}{27}\right)\qquad F\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\ \ a\ \ tg.\ \ obliqua]$

6) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ $\quad[\ as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1;\ \ m(0;0);\ \ M(-2;-4)\ ]$

7) $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$ $\quad[as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1\ ]$

8) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ m(2;3)]$

9) $y=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{2x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-\dfrac{3}{2};\ \ m(1;0)]$

10) $y=\dfrac{6x^2+2x+3}{2(2x^2+1)}$ $\quad[as.or.\ \ y=\dfrac{3}{2};\ \ m\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right);\ \ M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right);$

$F_1\left(0;\dfrac{3}{2}\right);\ \ F_2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{12+\sqrt{6}}{8}\right);\ \ F_3\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}};\dfrac{12-\sqrt{6}}{8}\right);\ \ flessi\ \ a\ \ tg.\ \ obliqua]$

11) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x}$ $\quad[as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-4;\ \ M\left(-\sqrt{3};-(2\sqrt{3}+4)\right);m\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}-4\right)\ ]$

12) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ $\quad[as.v.\ \ x=5;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ M(3;1);\ \ m(7;9)]$

13) $y=\dfrac{x^2-4x}{1-x}$ $\quad[as.v.\ \ x=1;\ \ as.obl.\ \ y=-x+3]$

14) $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ $\quad[as.v.\ \ x=0\ \ \ as.or.\ \ y=\dfrac{1}{2}\ ]$

Funzioni irrazionali

Esempio

Consideriamo la funzione irrazionale: $\boxed{y = x - \sqrt{x^2 - 1}}$

- D_f : $\quad x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \ \vee \ \geq 1$

  Intersezioni con gli assi:

  Per $y = 0 \qquad \Rightarrow x = \sqrt{x^2 - 1} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \cancel{x}^2 = \cancel{x}^2 - 1 \ \nexists \ sol. \end{cases}$

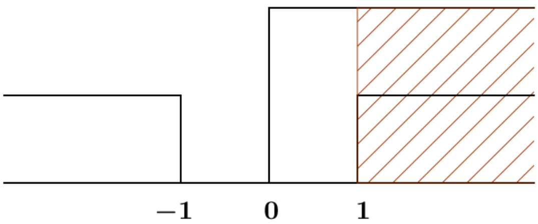
  Quindi non ci sono intersezioni con gli assi.

  Segno della funzione:

  $y > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$

  $x > \sqrt{x^2 - 1}$

  $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow x \leq -1 \ \vee x \geq 1 \\ x^2 > x^2 - 1 \qquad \forall x \end{cases}$



  $x \geq 1$

- Studio dei limiti:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

  $\Rightarrow \quad y = 0 \qquad$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

  Ricerca asintoto obliquo:

  - $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}} = 2$$

  - $$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{\left(x^2 - x^2 + 1\right)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

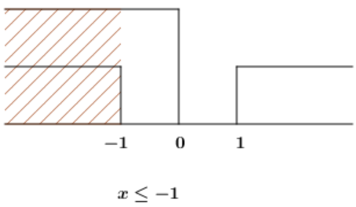
  $\Rightarrow \quad y = 2x \qquad$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

- Studio della derivata

$$y' = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 = x^2 \quad \nexists \quad sol. \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > x \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \quad \nexists \quad sol. \end{cases}$$

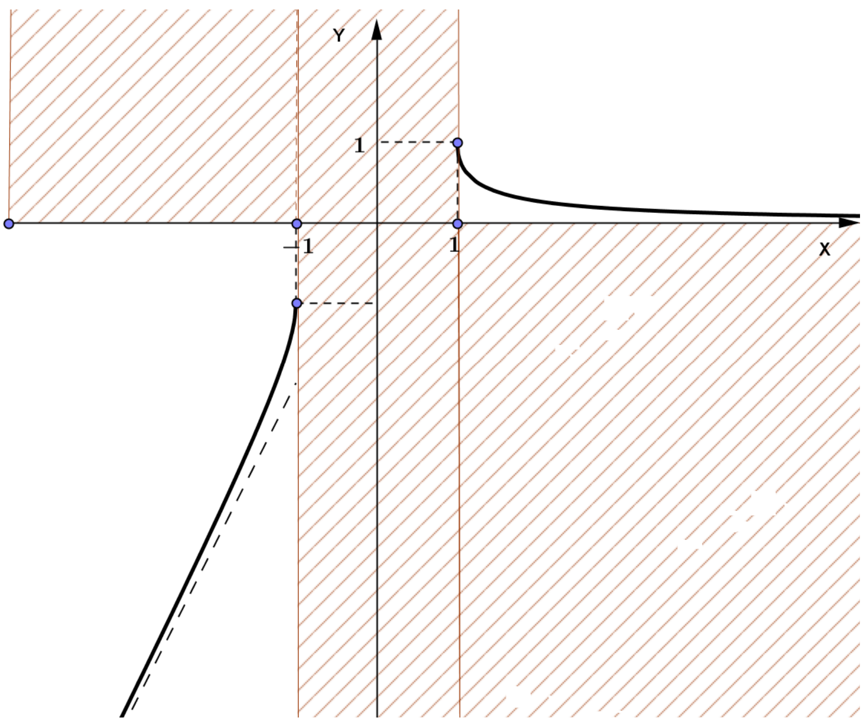


Quindi la funzione è crescente per $x \leq -1$ (e decresce per $x \geq 1$).

Osserviamo che $x = \pm 1$ sono punti a tangente verticale con: $\lim_{x \to -1^-} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -1^+} f'(x) = -\infty$

Nota: per tracciare il grafico occorre calcolare $y(-1) = -1$ e $y(1) = 1$ ma non è necessario lo studio di y''.

Il grafico è il seguente:



ESERCIZI
Funzioni irrazionali

1) $y=\sqrt{x^2-3x}$ $\quad[as.obl.\ \ y=x-\frac{3}{2}\ per\ \ x\to+\infty;\ \ as.obl.\ \ y=-x+\frac{3}{2}\ per\ \ x\to-\infty;$
$x=0\ \ x=3\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

2) $y=\frac{\sqrt{x^2-9}-1}{x}$ $\quad[\ as.or.\ \ y=1per\ \ x\to+\infty;\ \ as.or.\ \ y=-1per\ \ x\to-\infty;$
$x=\pm3\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

3) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $\quad[as.v.\ \ x=\pm2;\ \ m\left(0;\frac{1}{2}\right)]$

4) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ $\quad[as.v.\ \ x=-1;\ \ as.or.\ \ y=1;\ \ x=1\ \ p.to\ \ tg\ \ ver]$

5) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\quad[as.v.\ \ x=-1;\ \ x=1\ \ p.to\ \ tg\ \ vert.;\ \ F\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ \ flesso\ \ tg\ \ obl]$

6) $y=x-2-\sqrt{x^2-2x-3}$ $\quad[as.or.\ \ y=-1\ \ per\ \ x\to+\infty;$
$as.obl.\ \ y=2x-3\ \ per\ \ x\to-\infty;\ \ x=-1\ \ x=3\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

7) $y=x-3-\sqrt{x^2-1}$ $\quad[as.or.\ \ y=-3\ \ per\ \ x\to+\infty;$
$as.obl.\ \ y=2x-3\ \ per\ \ x\to-\infty;\ \ x=\pm1\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

8) $y=\frac{x}{2-\sqrt{x^2-5}}$ $\quad[as.v.\ \ x=\pm3;\ \ as.or.\ \ y=-1\ \ per\ \ x\to+\infty;$
$as.or.\ \ y=1\ \ per\ \ x\to-\infty;\ \ x=\pm\sqrt{5}\ \ p.ti\ \ tg\ \ vert.]$

9) $y=\sqrt[3]{x^2+x}$ $\quad[m\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right);\ \ F_1(-1;0)\ \ F_2(0;0)\ \ flessi\ \ tg\ \ vert.]$

10) $y=\sqrt[3]{x^2(3+x)}$ $\quad[as.obl.\ \ y=x+1;\ \ M\left(-2;\sqrt[3]{4}\right)$
$(0;0)\ \ cuspide;\ \ F(-3;0)\ \ flesso\ \ tg\ \ vert.]$

Funzioni goniometriche

Esempio

Consideriamo la funzione goniometrica $\boxed{y=\dfrac{3\cos x}{2\cos x-1}}$

Dominio:

$$\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$D_f=\Re-\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$$

Periodo: poiché nella nostra funzione compare $\cos x$ il periodo sarà quello del coseno, cioè 2π: quindi $T=2\pi$

Quindi possiamo limitare il nostro studio all'intervallo $I=[0,2\pi]$.

Note

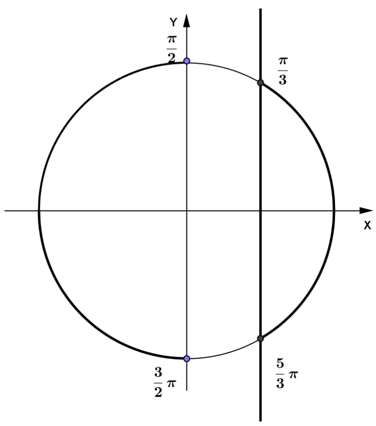
Se nella funzioni compaiono funzioni goniometriche di *periodo diverso* occorre determinare il **"minimo" multiplo comune.** Se per esempio abbiamo $sen2x$ e $senx$ il periodo sarà 2π poiché $sen2x$ ha periodo $\pi=\left(\frac{2\pi}{2}\right)$ e $senx$ periodo 2π. Se abbiamo insieme $sen2x$ e $\cos 3x$ il periodo sarà 2π cioè il primo multiplo comune tra i periodi delle due funzioni π e $\frac{2}{3}\pi$.

Inoltre considerare un dato intervallo di studio non vuol dire che la funzione sia definita in tutto l'intervallo. Nel nostro caso studiamo la funzione in $I=[0,2\pi]$ ricordando però che $x\neq\frac{\pi}{3}$ $x\neq\frac{5}{3}\pi$ (infatti $x\neq\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$).

Intersezioni con gli assi e segno della funzione:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y=0 \\ \cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{2};0\right) \quad \left(\dfrac{3}{2}\pi;0\right) \end{array}$$

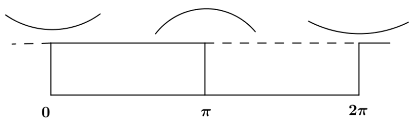
$$y>0 \Rightarrow \quad \frac{3\cos x}{2\cos x-1}>0 \Rightarrow \quad \cos x<0 \ \vee \cos x>\frac{1}{2}$$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{5}{3}\pi} f(x)=\infty \qquad x=\frac{\pi}{3},\ \ x=\frac{5}{3}\pi \qquad \text{asintoti verticali}$$

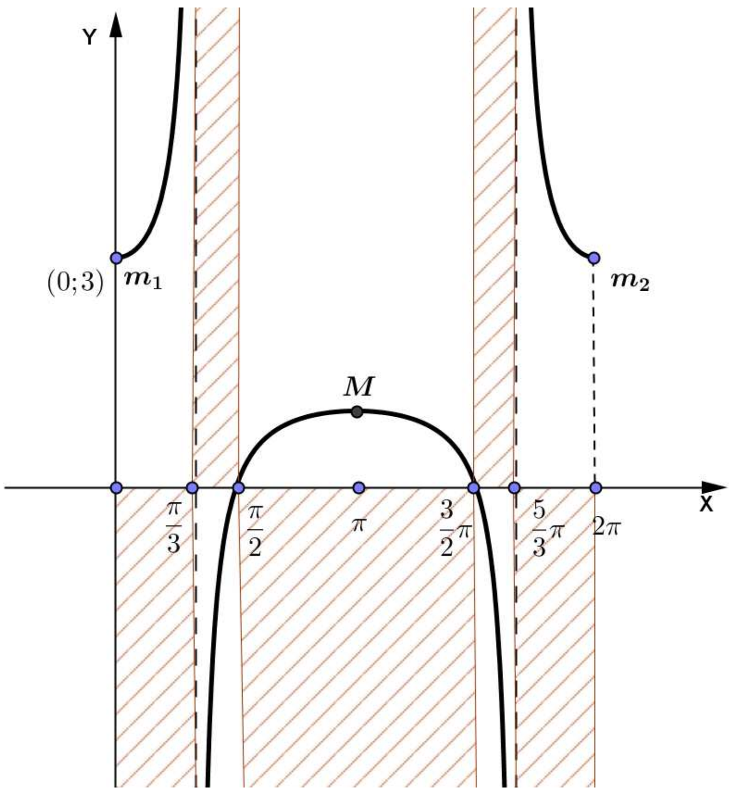
Ricordiamo che non ha senso studiare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ per una funzione periodica.

$$y'=\frac{-3senx(2\cos x-1)-3\cos x(-2senx)}{(2\cos x-1)^2}=\frac{3senx}{(2\cos x-1)^2}$$
$$y'=0\Rightarrow senx=0 \qquad x=k\pi \qquad x_1=0\ \ x_2=\pi\ \ x_3=2\pi$$
$$y'>0\Rightarrow senx>0$$



$$m_1(0;3) \qquad m_2(2\pi;3) \qquad M(\pi;1)$$

Il grafico è quindi il seguente:



ESERCIZI
Funzioni goniometriche

1) $y = senx - \sqrt{3}\cos x$ $[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi];\ M\left(\frac{5}{6}\pi;2\right);\ m\left(\frac{11}{6}\pi;-2\right);$

$F_1\left(\frac{\pi}{3};0\right)\ F_2\left(\frac{4}{3}\pi;0\right)$ *flessi tg obl.*]

2) $y = \dfrac{\cos x}{1-\cos x}$ $[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi]$

as.v. $x = 0; x = 2\pi;\ m\left(\pi;-\frac{1}{2}\right)$]

3) $y = \dfrac{senx - \cos x}{\sqrt{3}senx - \cos x}$ $[T = \pi \quad I = [0;\pi]$

as.v. $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{7}{6}\pi;\ F_1\left(\frac{2}{3}\pi;\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right);\ F_2\left(\frac{5}{3}\pi;\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$ *flessi tg obl.*]

4) $y = 4sen^2 x - 3$ $[T = \pi \quad I = [0;\pi]$

$m_1(0;-3);\ m_2(\pi;-3);\ ;\ M_1\left(\frac{\pi}{2};1\right);$

$F_1\left(\frac{\pi}{4};-1\right);\ F_2\left(\frac{3}{4}\pi;-1\right);$ *flessi tg obl.*]

5) $y = sen^2 x + \cos x$ $[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi];$

$m_1(0;1);\ m_2(\pi;-1);\ m_3(2\pi;1);\ M_1\left(\frac{\pi}{3};\frac{5}{4}\right);\ M_2\left(\frac{5}{3}\pi;\frac{5}{4}\right)$]

$F_1(\beta_1;...);\ F_2(\beta_2;...);\ F_3(2\pi-\beta_1;...);\ F_4(2\pi-\beta_2;...)$ *flessi tg obl.*

$\left(dove \quad \cos\beta_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8},\ \cos\beta_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$

6) $y = sen^3 x.$ $[T = 2\pi \quad I = [0;2\pi]$

$m\left(\frac{3}{2}\pi;-1\right);\ M\left(\frac{\pi}{2};1\right);\ F_1(0;0);\ F_2(\pi;0);\ F_3(2\pi;0)$ *flessi tg or.*;

$F_4(\alpha;...);\ F_5(\pi-\alpha;...);\ F_6(\pi+\alpha;...);\ F_7(2\pi-\alpha;...)$ *flessi tg. obl.*

$\left(dove \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Funzioni esponenziali

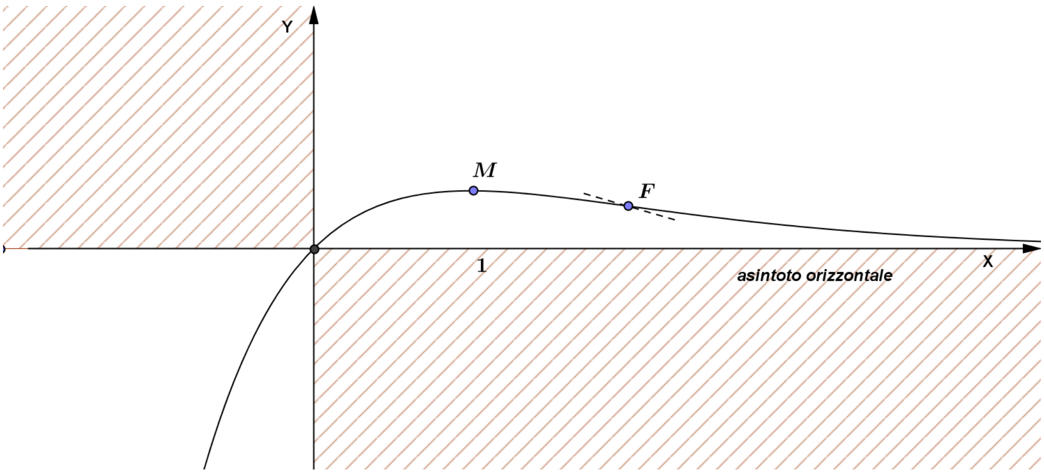
Esempio

Consideriamo la seguente funzione esponenziale: $\boxed{y = xe^{-x}}$

$D_f: \ \Re$

$y > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$x = 0 \rightarrow y = 0$



$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

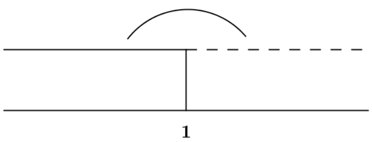
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \quad \nexists \text{ asintoto obliquo} \right)$$

$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$y' = 0 \quad x = 1$

$y' > 0 \Leftrightarrow x < 1$

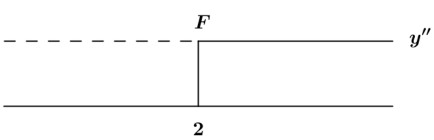


$M(1; e^{-1}) \approx (1; \ \ 0{,}37)$

$y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$

$y'' = 0 \quad x = 2$

$y'' > 0 \quad x > 2$



$F(2; 2e^{-2}) \approx (2; \ \ 0{,}27)$

Funzioni logaritmiche

Esempio

Consideriamo la seguente funzione logaritmica $\boxed{y=\dfrac{x^2}{\ln x}}$

$$D_f: \quad x>0 \quad \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$y>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$$

$$y=0 \rightarrow x=0 \notin D_f$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\left(\dfrac{1}{0^-}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=1 \quad \textit{as.verticale}$$

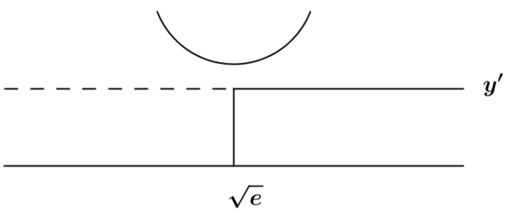
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\overset{\overset{H}{\downarrow}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \quad \nexists \quad \textit{as.obliquo}\right)$$

$$y'=\left(2x\ln x-x^2\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\ln^2 x}=\frac{x}{\ln^2 x}(2\ln x-1)$$

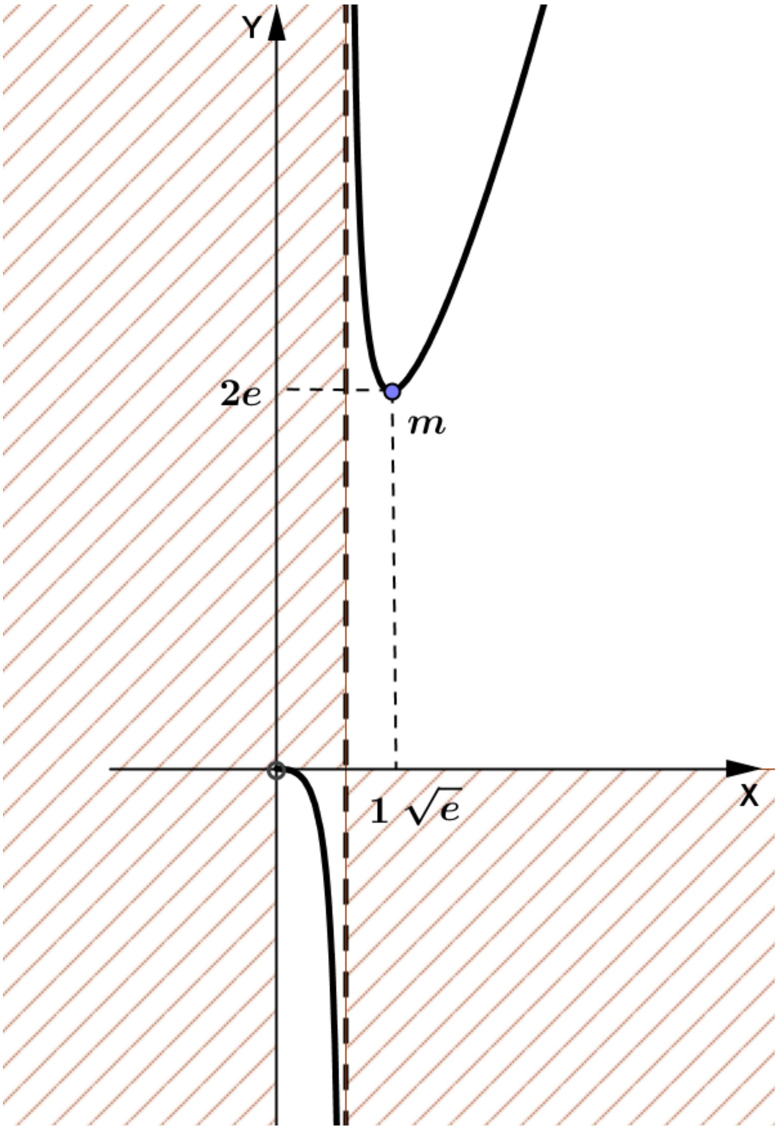
$$y'=0 \quad \ln x=\frac{1}{2} \rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$$

$$y'>0 \Leftrightarrow \ln x>\frac{1}{2} \rightarrow x>e^{\frac{1}{2}}$$



$m(\sqrt{e};2e) \approx (1{,}64; \quad 5{,}4)$

Il grafico quindi risulta:



Osservazione:

$$\lim_{x\to 0^+} y' = \lim_{x\to 0^+} x\underbrace{\left(\frac{2\ln x - 1}{\ln^2 x}\right)}_{\to 0} = 0 \qquad \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x - 1}{\ln^2 x} \overset{H}{\downarrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \right)$$

e quindi la tangente in (0;0) è orizzontale.

Controlliamo anche la concavità del grafico:

$$y'' = D\left(\frac{2x}{\ln x} - \frac{x}{\ln^2 x}\right) = \ldots = \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}$$

$y'' = 0$ nessuna soluzione (non ci sono flessi)

$y'' > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$ (concavità verso l'alto)

ESERCIZI
Funzioni logaritmiche ed esponenziali

1) $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$ $[\,as.v.\quad x = 0;\quad as.or.\quad y = 0\quad per\quad x \to -\infty\quad as.or.\quad y = 2\quad per\quad x \to +\infty\,]$

2) $y = x^2 \cdot e^{-x}$ $[\,as.or.\quad y = 0\quad per\quad x \to +\infty;\quad m(0;0)$

$M(2;4e^{-2});\quad F_1(2-\sqrt{2};...);\quad F_2(2+\sqrt{2};...)\,flessi\quad tg\quad obl.]$

3) $y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ $[\,as.v.\quad x = 0;\quad as.obl.\quad y = x - 1;\quad M(-1;-e);\quad \lim_{x \to 0^+} y' = 0]$

4) $y = x - \ln x$ $[\,as.v.\quad x = 0;\quad m(1;1)\,]$

5) $y = \ln\sqrt{x^2 - 4}$ $[\,as.v.\quad x = \pm 2\,]$

6) $y = x \cdot \ln x$ $[\,\lim_{x \to 0^+} y = 0\quad m(e^{-1};-e^{-1})\,]$

7) $y = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^2}$ $[\,as.v.\quad x = 0;\quad as.or.\quad y = 0;\quad m\left(e;-\dfrac{1}{e^2}\right)$

$F\left(e^{\frac{4}{3}};f\left(e^{\frac{4}{3}}\right)\right)\quad flesso\quad tg\quad obl.]$

8) $y = \ln x \cdot (\ln x + 1)$ $[\,as.v.\quad x = 0;\quad m\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}};-\dfrac{1}{4}\right);\quad F\left(\sqrt{e};\dfrac{3}{4}\right)\quad flesso\quad tg\quad obl.]$

SCHEDA DI LAVORO 1

GRAFICI PER VISUALIZZARE L'ANDAMENTO DI UN FENOMENO

Lo studio dei grafici non è importante solo in ambito matematico perché un grafico può servire a "visualizzare" *l'andamento di un "fenomeno" nel tempo*: questo accade tutte le volte che la variabile x rappresenta il tempo e per questo viene indicata con la lettera t.
I fenomeni possono essere di vario tipo.

Si possono avere fenomeni di tipo naturale cioè fenomeni fisici o biologici quali:

- il valore dell'intensità di corrente che scorre in un filo metallico;
- l'intensità del campo magnetico all'interno di una bobina;
- il numero degli individui di una popolazione di animali o di piante:
- ecc.

In genere si riesce a determinare l'equazione della funzione $f(t)$ che descrive il fenomeno cioè una funzione che dipende dalla variabile tempo.

Oppure si possono considerare fenomeni legati ad attività umane e in questo caso i grafici derivano da tabelle di dati cioè non c'è un'equazione della funzione da rappresentare e servono a visualizzarne l'andamento temporale:

- la quotazione di un dato titolo in borsa;
- il fatturato mensile di una data azienda;
- il quantitativo del grano prodotto ogni anno in Italia;
- il numero degli abitanti di un dato paese negli ultimi anni;
- il numero giornaliero dei nuovi contagiati in una data epidemia;
- ecc.

Scegli un esempio di fenomeno di tipo "fisico", uno di tipo "biologico" e uno legato ad una "tabella" magari anche facendo una ricerca sul web e per ciascuno rappresenta il grafico.

SCHEDA DI LAVORO 2

DAL GRAFICO DI f(x) AL GRAFICO DI f'(x)

OSSERVAZIONI

Se conosciamo il grafico di una funzione f(x) continua e derivabile, possiamo dedurre l'andamento del grafico della su funzione derivata f'(x)?

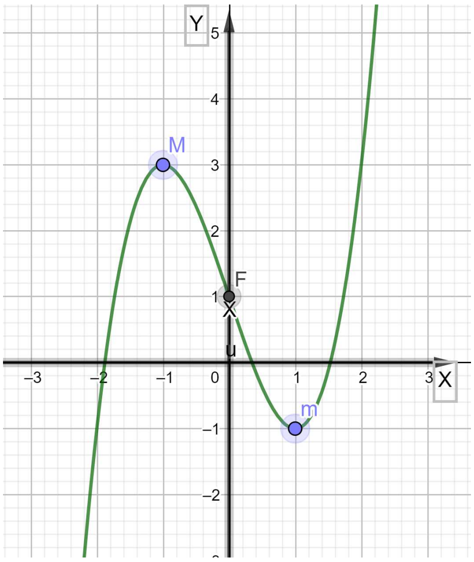
Ricordiamo che:

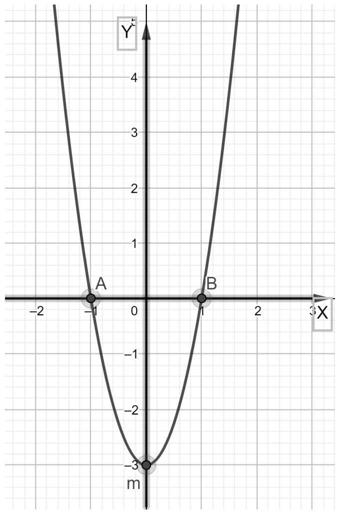
- Nei punti di massimo o minimo o flesso a tangente orizzontale il grafico di f'(x) taglia l'asse x (la derivata si annulla);
- Negli intervalli in cui f(x) è crescente avremo $f'(x) > 0$, mentre dove f(x) decresce avremo $f'(x) < 0$;
- Nei punti di flesso di f(x) si avranno massimi o minimi o flessi a tangente orizzontale per $f'(x)$ dal momento che $f''(x) = D(f'(x))$

ESEMPIO

Considera il grafico in figura: possiamo dire che il grafico di $f'(x)$ dovrà:

- essere sopra all'asse x per $x < -1 \cup x > 1$;
- tagliare l'asse x in $x = \pm 1$;
- essendo $F(0;1)$ un punto di flesso per f(x) la derivata avrà un minimo in x=0





Esercizio

Disegna l'andamento della derivata della funzione avente il seguente grafico: