

# Funzioni continue

**Definizione:**  $f(x)$  si dice continua in  $x_0 \in D_f$  quando

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Definizione:**  $f(x)$  si dice continua in  $I \subset D_f$  se è continua  $\forall x \in I$ .

Avevamo già dato questa definizione parlando del  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

## Punti di discontinuità

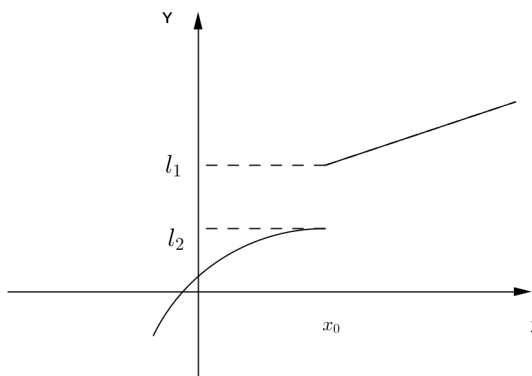
Un punto  $x_0$  (per il quale abbia senso calcolare  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  cioè un punto di accumulazione<sup>(\*\*)</sup> del dominio) si dice punto di discontinuità per  $f(x)$  quando non si verifica la (\*).

(\*\*)  $x_0$  è un punto di accumulazione quando posso avvicinarmi quanto voglio ad  $x_0$  da destra e/o da sinistra all'interno del dominio di  $f(x)$ .

Si possono avere tre tipi di discontinuità:

- **Discontinuità di prima specie** quando

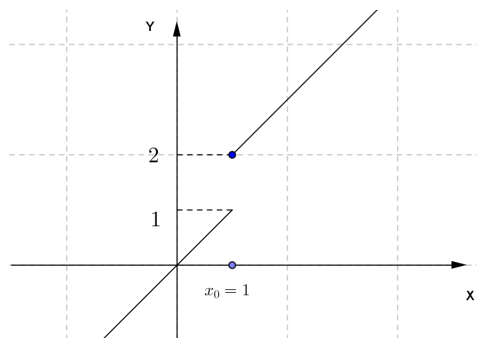
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= l_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= l_2 \end{aligned} \quad \text{con} \quad l_1 \neq l_2$$



Si dice anche che la funzione ha un “salto” in  $x_0$ .

## Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



Poiché  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$  la funzione ha in  $x_0 = 1$  una discontinuità di prima specie.

- **Discontinuità di seconda specie** quando almeno uno dei due limiti (destro o sinistro)

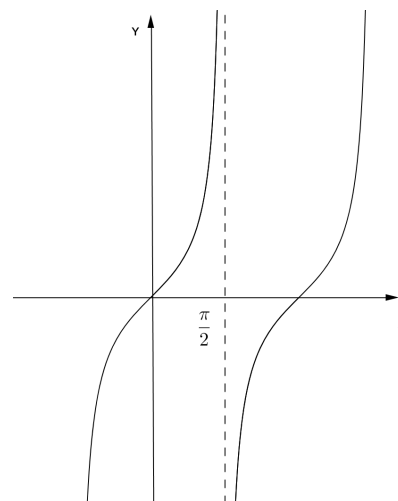
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ è infinito oppure non esiste.}$$

**Esempi**

1)  $f(x) = \operatorname{tg} x$

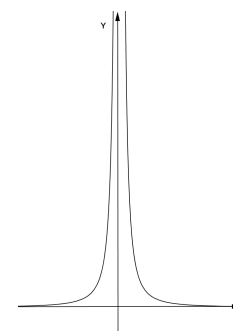
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2} \text{ è un punto di discontinuità di } 2^{\text{a}} \text{ specie}$$



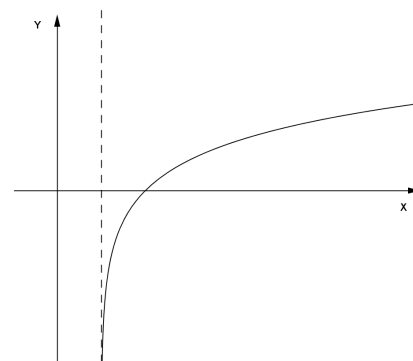
2)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x_0 = 0 \text{ è un punto di discontinuità di } 2^{\text{a}} \text{ specie}$$



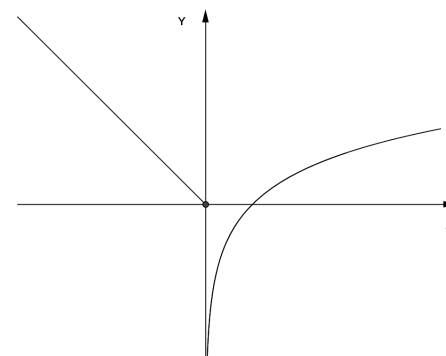
3)  $f(x) = \ln(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 1 \text{ è punto di discontinuità di } 2^{\text{a}} \text{ specie.}$$



4)  $f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \text{ ma } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x_0 = 0 \text{ punto di discontinuità di } 2^{\text{o}} \text{ specie.}$$



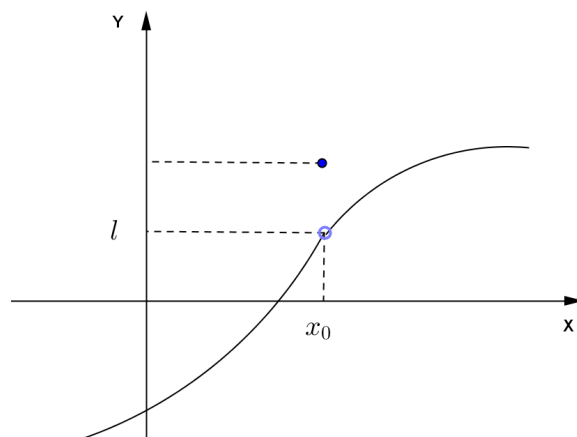
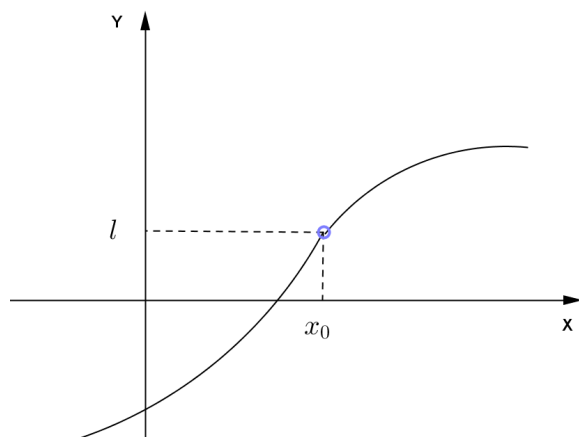
5)  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ non esiste (vedi cap. sui limiti) e quindi } x_0 = 0 \text{ è un punto di discontinuità di } 2^{\text{o}} \text{ specie.}$$

• **Discontinuità di terza specie** quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ ma } f(x) \text{ non è definita in } x_0 \text{ oppure } f(x_0) \neq l$$

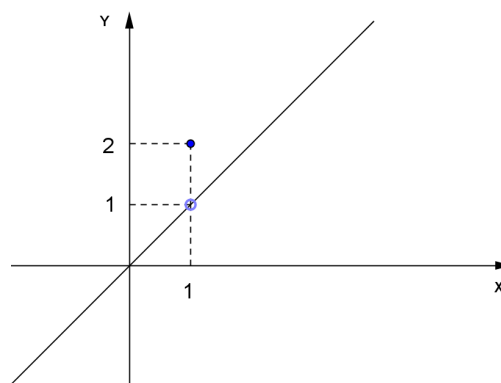
Questa specie di discontinuità viene anche detta discontinuità “eliminabile” perché se  $f(x)$  non è definita in  $x_0$  possiamo porre  $f(x_0) = l$  oppure, se era già definita, cambiare la definizione di  $f(x)$  in  $x_0$  ponendo appunto  $f(x_0) = l$  e rendendola così continua in  $x_0$ .



**Esempio**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

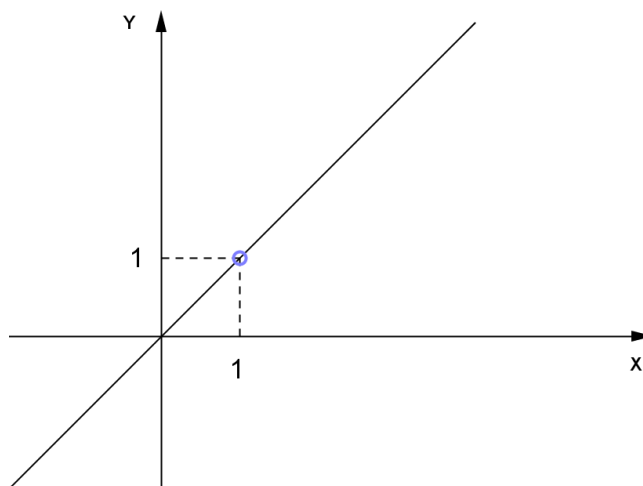
ma  $\frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$



Quindi  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  ma  $f(1) = 2 \Rightarrow x_0 = 1$  è un punto di discontinuità di 3<sup>a</sup> specie.

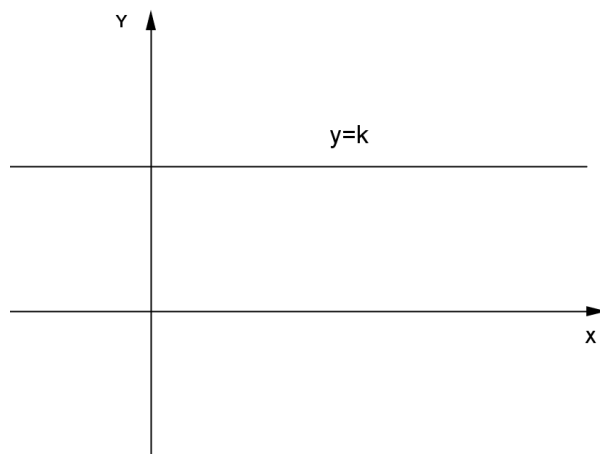
**Nota:** anche  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$  ha in  $x_0 = 1$  un punto di discontinuità di 3<sup>a</sup> specie poiché

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$  (quindi il limite esiste ed è finito) ma la funzione non è definita in  $x_0 = 1$ .

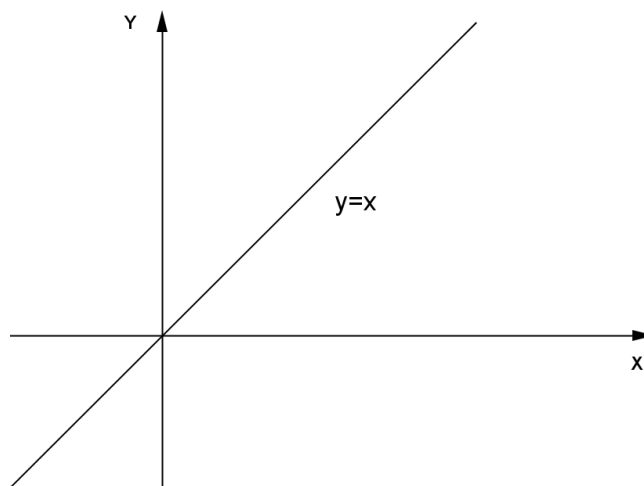


## Esempi di funzioni continue

- La funzione costante  $f(x) = k$  è continua  $\forall x \in \mathfrak{R}$   
 Infatti qualunque sia  $x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$  ( $= f(x_0)$ )



- La funzione  $f(x) = x$  è continua  $\forall x \in \mathfrak{R}$  poiché  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  ( $= f(x_0)$ )



- Le funzioni polinomiali  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  sono continue  $\forall x \in \mathfrak{R}$
- Le funzioni razionali fratte  $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$  sono continue  $\forall x : D(x) \neq 0$
- Le funzioni goniometriche  $y = \text{sen}x$ ,  $y = \text{cos}x$  sono continue  $\forall x \in \mathfrak{R}$  mentre  $y = \text{tg}x$  è continua  $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- La funzione esponenziale  $y = a^x$  ( $a > 0$   $a \neq 1$ ) è continua  $\forall x \in \mathfrak{R}$
- La funzione logaritmica  $y = \log_a x$  ( $a > 0$   $a \neq 1$ ) è continua  $\forall x > 0$

## I teoremi sulle funzioni continue (solo enunciati)

1) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono funzioni continue in  $x_0$  allora

$$\begin{aligned} & f(x) \pm g(x) \\ & f(x) \cdot g(x) \\ & \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{se } g(x_0) \neq 0) \end{aligned}$$

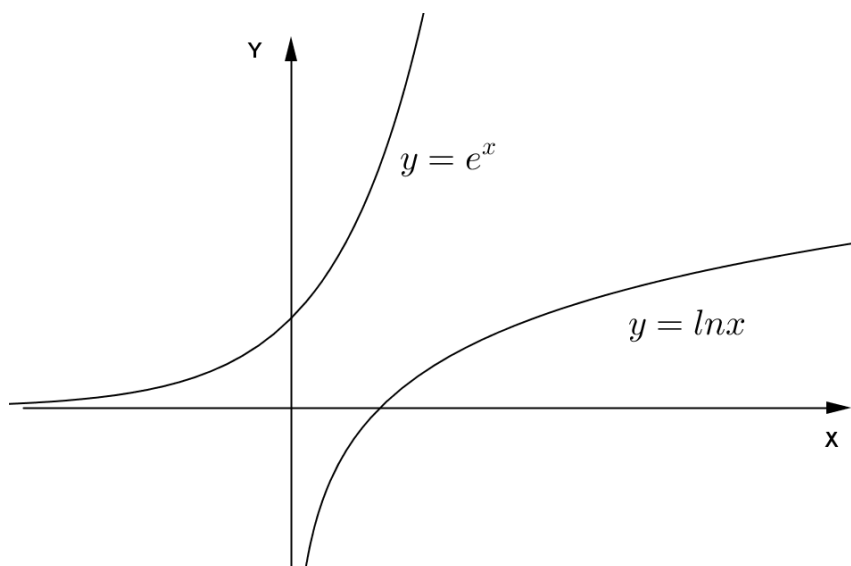
sono ancora funzioni continue in  $x_0$ .

(La dimostrazione si basa sulle operazioni con i limiti...)

2) Se  $g(x)$  è una funzione continua in  $x_0$  e  $f$  è continua in  $g(x_0)$  allora  $f \circ g$  è continua in  $x_0$ .

3) Se  $f(x)$  è una funzione continua in un intervallo  $I$  e strettamente crescente (o decrescente) in  $I$  allora la funzione  $f^{-1}$  è continua in  $f(I)$  (immagine di  $I$ )

**Esempio:**

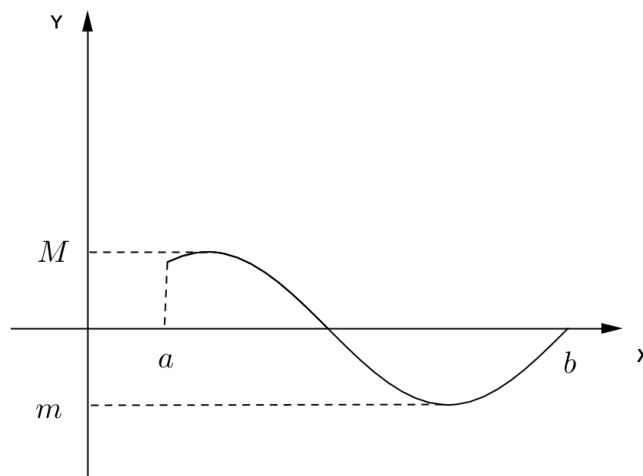


La funzione esponenziale  $y = e^x$  è continua in  $\mathfrak{R}$  e strettamente crescente.

La funzione logaritmo  $y = \ln x$  è continua quando  $x > 0$  (infatti il codominio di  $y = e^x$  sono i reali positivi).

#### 4) Teorema di Weierstrass

Se  $f(x)$  è continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  allora esistono il massimo assoluto  $M$  e il minimo assoluto  $m$ .

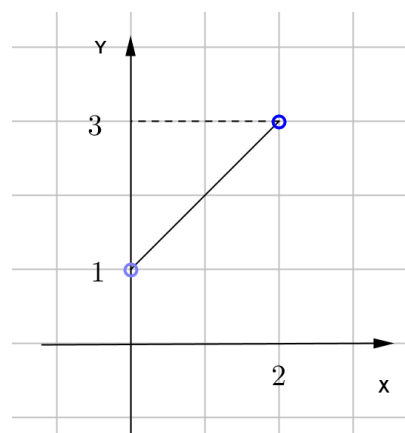


**Osservazione:** se alcune ipotesi del teorema non sono verificate non è detto infatti che  $f(x)$  ammetta massimo e minimo assoluti.

- Se per esempio  $f(x)$  è continua su un intervallo non limitato può non avere massimo e minimo assoluti (es.  $y = x$ ;  $y = e^x$ )
- Se la funzione è continua in  $(a, b)$  (intervallo limitato ma aperto) può non avere massimo e minimo assoluti.

Esempio :  $f(x) = x + 1$   $0 < x < 2$

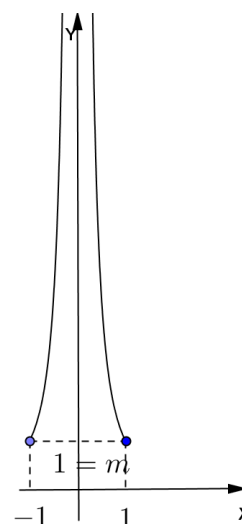
In questo caso i valori 1 e 3 sono estremo inferiore e superiore ma non appartenendo al codominio di  $f(x)$  non sono minimo e massimo assoluti.



- Se la funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato ma non è continua in tutti i suoi punti può non avere massimo e minimo assoluti.

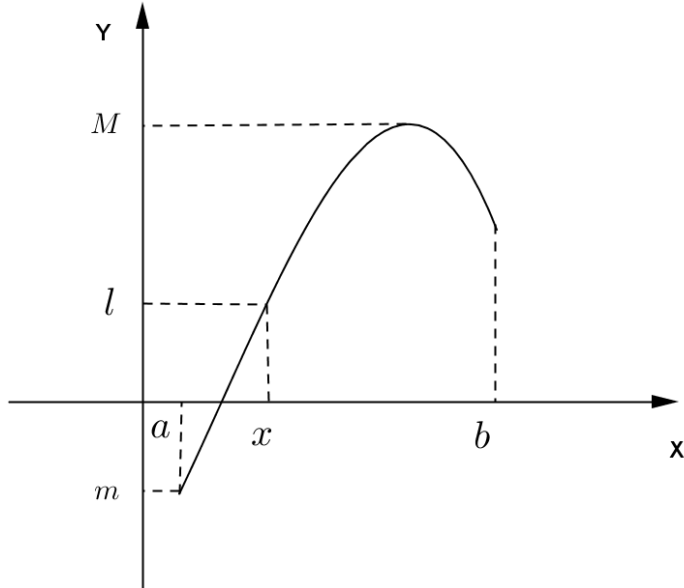
Esempio:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$   $-1 \leq x < 1$  ( $x \neq 0$ )

Il minimo assoluto è  $m=1$  ma non c'è massimo assoluto.



**5) Teorema dei valori intermedi**

Se  $f(x)$  è una funzione continua in  $[a,b]$  allora  $f(x)$  assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo assoluto.

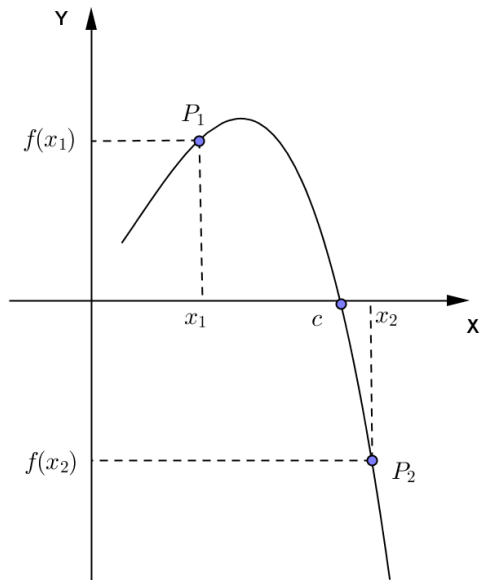


Per ogni  $m \leq l \leq M$   
 esiste almeno un  $x \in [a,b]$ :  
 $f(x) = l$

**6) Teorema di esistenza degli zeri**

Se  $f(x)$  è continua in un intervallo  $I$  ed esistono  $x_1, x_2$  con  $x_1 < x_2$  aventi immagini  $f(x_1), f(x_2)$  discordi allora esiste (almeno) un punto  $c$  compreso tra  $x_1$  e  $x_2$  tale che  $f(c) = 0$

(  $c$  si dice **zero** della funzione)



$f(x_1), f(x_2)$  di segno opposto  
 $x_1 < c < x_2$   
 $f(c) = 0$

Infatti è intuitivo che per passare da  $P_1$  (per esempio sopra all'asse  $x$ ) a  $P_2$  (sotto all'asse  $x$ ) con un grafico "continuo" almeno una volta il grafico taglierà l'asse  $x$ .

**NOTA** : Questo teorema è utilizzato per studiare l'esistenza di soluzioni di un'equazione  $f(x) = 0$

## Funzioni continue

**Esempio:** utilizzando il teorema di esistenza degli zeri possiamo dimostrare che un'equazione di 3° grado ammette sempre una soluzione reale.

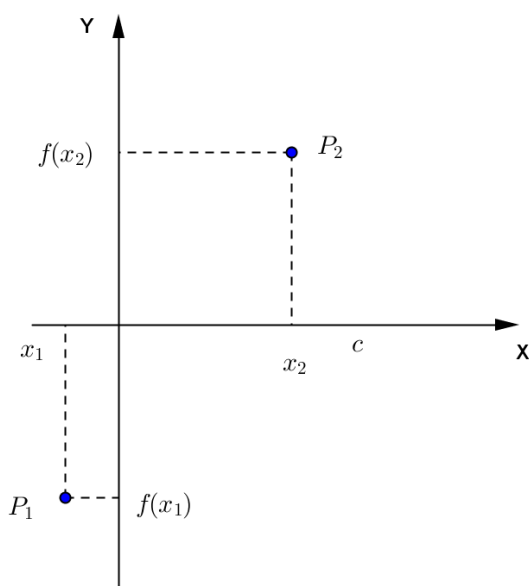
Infatti risolvere l'equazione  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  significa trovare gli zeri di

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Consideriamo, per semplicità,  $a > 0$  (se  $a$  fosse negativo basta cambiare segno...) e studiamo i limiti di  $f(x)$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

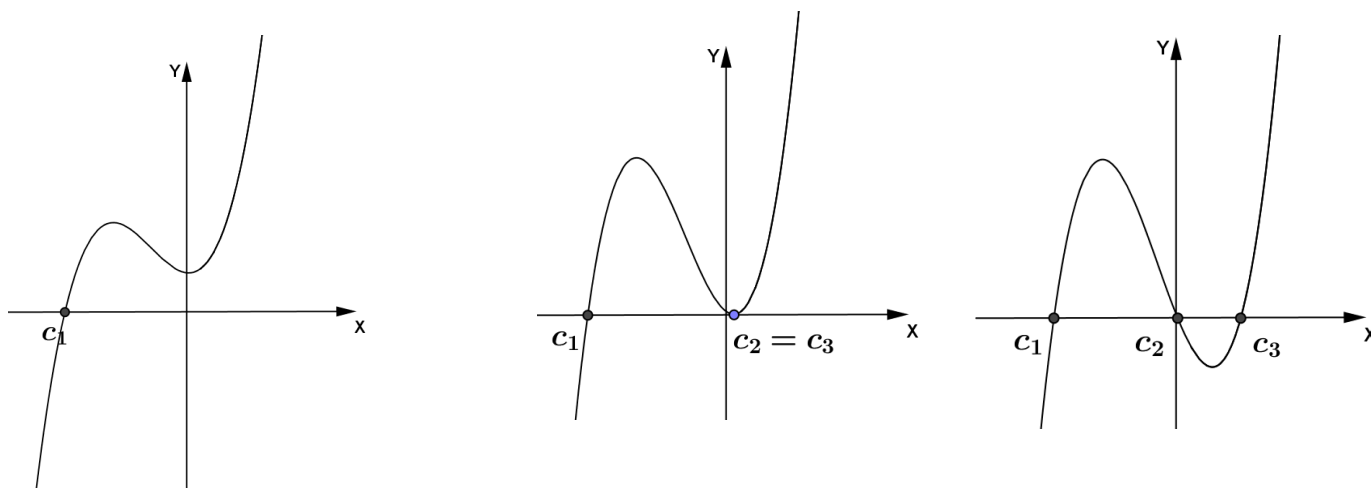
(sono forme indeterminate ma basta mettere in evidenza  $x^3 \dots$ )



Allora esisteranno  $x_1 < x_2$  :  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  sono discordi (più precisamente  $f(x_1)$  negativo e  $f(x_2)$  positivo)

Ma allora, per il teorema di esistenza degli zeri (la funzione è chiaramente continua in  $\mathbb{R}$ ), esisterà almeno un valore  $c$ , con  $x_1 < c < x_2$  :  $f(c) = 0$  e quindi l'equazione  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ha almeno una soluzione reale.

Osserviamo inoltre che l'equazione di 3° grado o ha 1 sola soluzione reale oppure ne ha tre (nella figura centrale due sono coincidenti) (più di 3 non può averne).





**ESERCIZI**  
TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

1) Studia i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$  [  $x = \pm 2$  discontinuità di seconda specie ]

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$  [  $x = -1$  discontinuità di terza specie ]

c)  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  [  $x = 0$  discontinuità di terza specie ]

d)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  [  $x = 0$  discontinuità di seconda specie ]

e)  $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$  [  $x = -1$  discontinuità di prima specie ]

f)  $f(x) = \ln(x+1)$  [  $x = -1$  discontinuità di seconda specie ]

g)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$  [  $x = 2$  discontinuità di seconda specie ]

2) La funzione  $f(x) = x^2 + x$  ammette massimo e minimo assoluti in  $[-1, 1]$ ? Determina  $m$  ed  $M$ .

$$\left[ m = -\frac{1}{4}; M = 2 \right]$$

3) Si può applicare il teorema di Weierstrass alla funzione  $y = \frac{1}{x}$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ ? Perché?

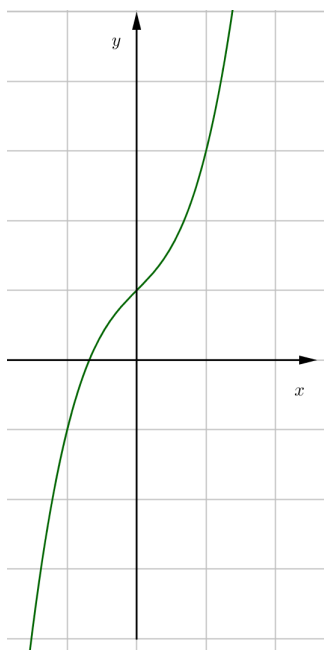
[no]

## Funzioni continue

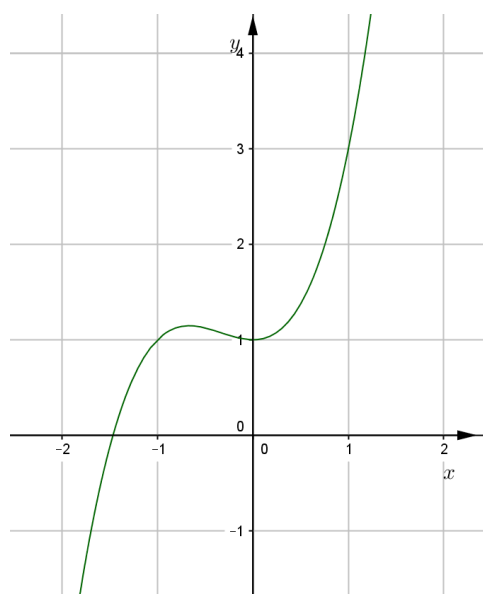
4) L'equazione  $x^3 + x^2 - 4 = 0$  ha (almeno) uno zero appartenente all'intervallo  $[1,2]$ ? Perché?

[si]

5) Disegna con Geogebra il grafico di  $y = x^3 + x + 1$  (vedi figura): utilizzando il teorema di esistenza degli zeri prova che esiste una soluzione reale dell'equazione  $x^3 + x + 1 = 0$  nell'intervallo  $[-1;0]$ .



6) Utilizzando Geogebra traccia il grafico di  $y = x^3 + x^2 + 1$  (vedi figura). Approssima la soluzione  $x_0$  dell'equazione  $x^3 + x^2 + 1 = 0$  utilizzando il teorema degli zeri.



$[-1.5 < x_0 < -1.4]$

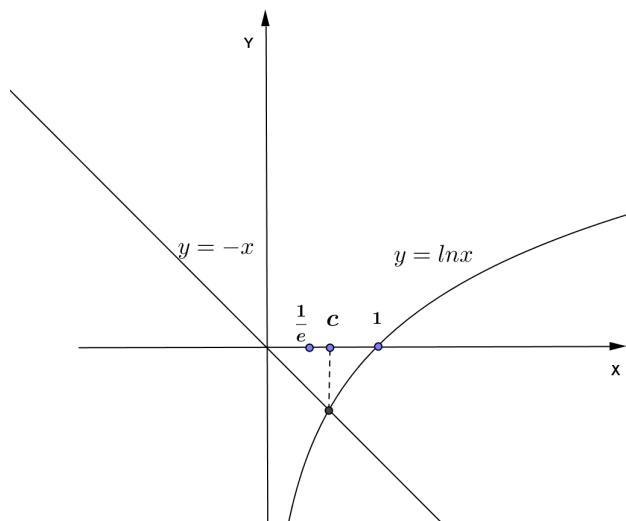
## Funzioni continue

7) Studia l'equazione  $\ln x + x = 0$

Per capire se l'equazione ha soluzioni possiamo scrivere l'equazione come

$$\ln x = -x$$

e considerare che le soluzioni possono essere pensate come le ascisse dei punti di intersezione tra la curva  $y = \ln x$  e la retta  $y = -x$ .



Quindi graficamente vediamo che c'è una soluzione dell'equazione poiché c'è una intersezione tra i due grafici.

Per approssimare la soluzione dell'equazione possiamo usare quindi il teorema di esistenza degli zeri: considerando la funzione  $f(x) = \ln x + x$  osserviamo che:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{1}{e} < 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 0 + 1 = 1 > 0 \quad \text{e quindi} \quad \exists c, \quad \frac{1}{e} < c < 1 : f(c) = 0$$

Possiamo poi approssimare meglio la soluzione dell'equazione “stringendo” l'intervallo  $(x_1, x_2)$  in

$$\text{cui si trova lo zero andando a calcolare } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{e} + 1}{2}\right) = \dots \dots$$