# Simulazioni prova scritta

## SIMULAZIONE 1

**PROBLEMA 1**

Si consideri la funzione $f(x)=\dfrac{x+a}{e^{bx}}$

5. Si determinino i valori di $a$ e $b$ affinché la funzione passi dal punto $A(1;0)$ e abbia un punto di massimo in $x=2$.

6. Verificato che ciò avviene per $a=-1$ e $b=1$, si studi e si rappresenti il suo grafico $\Gamma$ in un sistema di assi cartesiani, determinando la tangente che passa per il suo punto di flesso.

7. Detto P un punto appartenente al grafico della funzione situato nel quarto quadrante, si costruisca il rettangolo ottenuto proiettando P sugli assi cartesiani in modo che tale rettangolo abbia area massima.

8. Mostrare, facendo il calcolo, che l'area del triangolo mistilineo delimitato dalla funzione e dagli assi cartesiani nel quarto quadrante è uguale all'area delimitata dalla funzione e dall'asse delle ascisse nel primo quadrante.

**PROBLEMA 2**

In un piano cartesiano ortogonale Oxy sono assegnati i punti $A(0;1)$ e $B(2;0)$. Si consideri il punto $C(x;0)$ nel semiasse negativo delle ascisse.

1. Determinare il punto C in modo che il rapporto $y=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ sia massimo.

2. Si tracci il grafico della funzione $F(x)=\dfrac{(2-x)^2}{1+x^2}=\left(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2$ indipendentemente dalla questione geometrica (si tralasci lo studio della derivata seconda).

3. Si determini l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $F(x)$ l'asse delle y e la retta di equazione $x=1$.

4. Si dimostri, con il metodo che si preferisce, che $F(x)$ non è invertibile nel suo dominio e si determini un intervallo, contenuto nel dominio, nel quale tale funzione risulti invertibile, motivando esaurientemente la scelta effettuata.

## QUESITI

1. Calcolare il valore del seguente limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x 2te^{-t^2}dt - 1}{e^{-x^2}}$

2. Determina $a$ e $b$ (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;2]$ e determina il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema. Disegna il grafico di $f(x)$.

3. Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse y del sottografico di $y = 1 - x^2$ per $0 \le x \le 1$ e dai una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

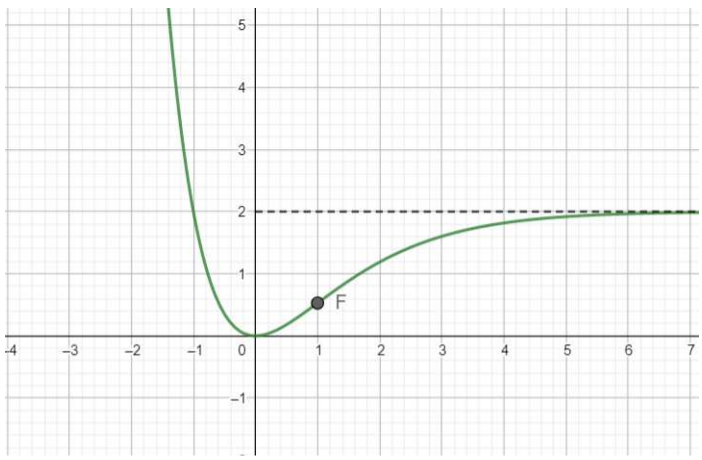
4. Stabilire per quale valore del parametro reale *k* la funzione di equazione $y = \frac{kx^2 + 1}{(k-1)x^2}$ ha valor medio uguale a 3 nell'intervallo $[1;2]$.

5. Data la funzione $F(x) = \int_0^x (t-1) \cdot e^t dt$, si dimostri che $F(x)$ ammette un punto di minimo e se ne determini il valore.

6. Sulla curva $y = \ln x$ determinare il punto P nel quale la tangente è parallela alla retta congiungente i punti $A(1;0)$ e $B(e;1)$ .

7. Tra tutti i coni circoscritti ad un cilindro di raggio *r* ed altezza *h* si trovi quello di minimo volume.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui sotto in cui F è un punto di flesso, determina un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate



# SIMULAZIONE 2

**PROBLEMA 1**
In un piano cartesiano ortogonale è assegnata la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$$

con $a$ parametro non nullo.

1. Si determini il valore del parametro $a^2$ in modo che la funzione ammetta un flesso nel punto di ascissa $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

2. verificato che $a^2 = 4$, si tracci il grafico della funzione $f_2(x)$ così ottenuta;

3. si tracci una parallela all'asse x che incontri $f_2(x)$ in due punti A e B; si proiettino A e B sull'asintoto, individuando i punti A' e B' e si determini l'equazione della parallela che rende massima l'area del rettangolo ABB'A';

4. si calcoli, infine, l'area della regione di piano compresa tra asintoto e grafico.

**PROBLEMA 2**

In un piano cartesiano ortogonale Oxy è assegnata la funzione $f(x)$) tale che:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \text{ e } f(4) = \frac{8}{9}.$$

1. Determina l'espressione analitica di $f(x)$.

2. Verificato che $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$, traccia il grafico di $f(x)$ indicando con O e B le sue intersezioni con l'asse delle ascisse e verificando che il grafico della funzione non ammette flessi.

3. Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in O ed indica con A l'ulteriore intersezione di tale tangente con il grafico di $f(x)$.

4. Determina il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo mistilineo OAB, cioè formato dal segmento OA e dall'arco AB del grafico di $f(x)$, attorno all'asse x.

## QUESITI

1. Determinare le coppie di valori $(a,b)$ per le quali risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{e^{ax}+bx-1}=\frac{1}{8}$$

2. Determinare il valore di $a$, $b$ (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & 0\le x<1 \\ -2x^2+3x+b & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;2]$ determinando il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema e, successivamente, se ne disegni il grafico.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse y del sottografico di $y=4-x^2$ per $0\le x\le 2$ e si dia una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

4. Si determini il valor medio di $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ nell'intervallo $[2;5]$, interpretando geometricamente il risultato. Inoltre, si motivi adeguatamente perché non esiste il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo $[0;2]$.

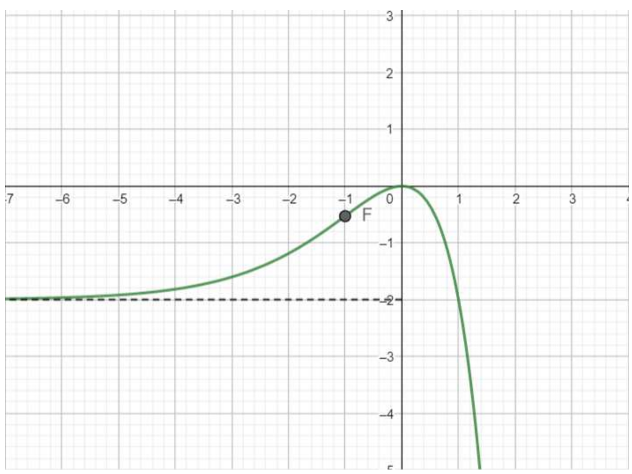
5. Data la funzione $F(x)=\int_0^x (t-1)\cdot e^t\,dt$, si dimostri che $F(x)$ ammette un punto di minimo e se ne determini il valore.

6. Dimostrare, che l'equazione $x\cdot\ln x-1=0$ ammette una ed una sola soluzione reale e si individuino i numeri interi tra cui si trova.

7. Si deve costruire un deposito cilindrico, aperto superiormente, di 3 $m^3$ di capacità. Il materiale per costruirlo costa 10 $euro/m^2$. Calcolare le dimensioni del deposito in modo che il costo sia il minore possibile.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui accanto, si determini un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate.

N.B.: F è il punto di flesso di $f(x)$.



# SIMULAZIONE 3

## PROBLEMA 1

In un piano cartesiano ortogonale sono assegnate le parabole:

$$\mathcal{P}_1: y = ax^2 - 2x + 2 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2: y = 2ax^2 - 2x + 1 \qquad \text{con } a \in \Re - \{0\}$$

e si indichino con $V_1$ e $V_2$, rispettivamente, i loro vertici.

1. Per quale valore di $a$ il segmento $\overline{V_1V_2}$ ha lunghezza minima?
2. Si consideri ora la funzione $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{2x^2}}$, che esprime la lunghezza del segmento $\overline{V_1V_2}$ avendo posto $a = x$, se ne tracci il grafico determinando, in particolar modo, il punto A in cui tale grafico interseca l'asintoto orizzontale. Il candidato si limiti allo studio della derivata prima.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x il trapezoide limitato dal grafico della funzione e dalle rette $x = x_A$, $x = 3$.
4. Si ponga $a = 1$ nelle equazioni di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e si determini l'area della regione di piano racchiusa tra i grafici delle parabole così ottenute.

## PROBLEMA 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = (2 - x)e^x$$

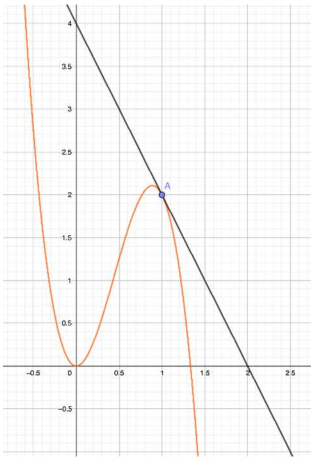
1. Si tracci il grafico della funzione $f(x)$ in un piano cartesiano ortogonale Oxy.

2. Determina l'equazione della retta *t* tangente al grafico di $f(x)$ che passa per il suo punto di flesso. Successivamente determina l'equazione della retta *s* che unisce i punti di intersezione del grafico della funzione con gli assi cartesiani. Si descriva la natura del triangolo ottenuto dall'intersezione delle rette *s, t* e dall'asse delle ascisse.

3. Detto P un punto appartenente al grafico della funzione situato nel primo quadrante, si costruisca il rettangolo ottenuto proiettando P sugli assi cartesiani. Determina P in modo che tale rettangolo abbia area massima.

4. Si calcoli l'area della regione delimitata dal grafico della funzione e dall'asintoto situata nel secondo quadrante.

## QUESITI



1. Sia $y = f(x)$ la funzione con derivata continua il cui grafico è rappresentato in figura. La retta tracciata è tangente al grafico di $f$ nel punto $A(1;2)$. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{\ln\sqrt{x}}$$

2. Determinare il valore di $a$, $b$ (parametri reali) in modo che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2 & 0\le x<2 \\ \dfrac{b}{x-1} & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;3]$ determinando il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema e, successivamente, se ne disegni il grafico.

3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse x del sottografico di $y=\dfrac{2}{\sqrt{4x-x^2}}$ per $1\le x\le 3$ e dai una rappresentazione qualitativa del solido ottenuto.

4. Si consideri la funzione $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $[2;5]$. Determinare il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo considerato interpretando geometricamente il risultato.

5. Data la funzione $F(x)=\int_1^x \ln t\ dt$, si determini l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x=e$.

6. Si dimostri, con il metodo che si preferisce, che la funzione $f(x)=2x+\ln x$ è invertibile e si calcoli la derivata della funzione inversa nel punto $y=2$.

7. Tra tutti i prismi retti di superficie totale $a^2$ (con $a>0$) che hanno come base un triangolo rettangolo isoscele, si determini quello di volume massimo.

8. Dato il grafico della funzione $f(x)$ qui accanto ( F è un punto di flesso), si determini un grafico qualitativo della funzione $f'(x)$ motivando esaurientemente le scelte operate.