Distribuzioni di probabilità

Variabili aleatorie discrete

Introduciamo il concetto di variabile aleatoria discreta partendo da un esempio: lanciamo due dadi (per distinguerli supponiamo che siano uno rosso e uno verde) e consideriamo

X = somma ottenuta lanciando due dadi

X è detta variabile aleatoria " discreta" perché può prendere, in relazione ai vari eventi che possono verificarsi, un numero finito di valori cioè

2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

Abbiamo:

$P(X=2)=\dfrac{1}{36}$: infatti c'è 1 solo caso favorevole (1,1) e 36 possibili cioè le coppie ordinate (1,1), (1,2) ecc in cui il primo numero indica, per esempio, il numero uscito sul dado rosso e il secondo numero il numero uscito sul dado verde;

$P(X=3)=\dfrac{2}{36}$: infatti ci sono due casi favorevoli (1,2) (2,1) e 36 possibili;

$P(X=4)=\dfrac{3}{36}$: infatti ci sono tre casi favorevoli (1,3) (2,2) (3,1) e 36 possibili

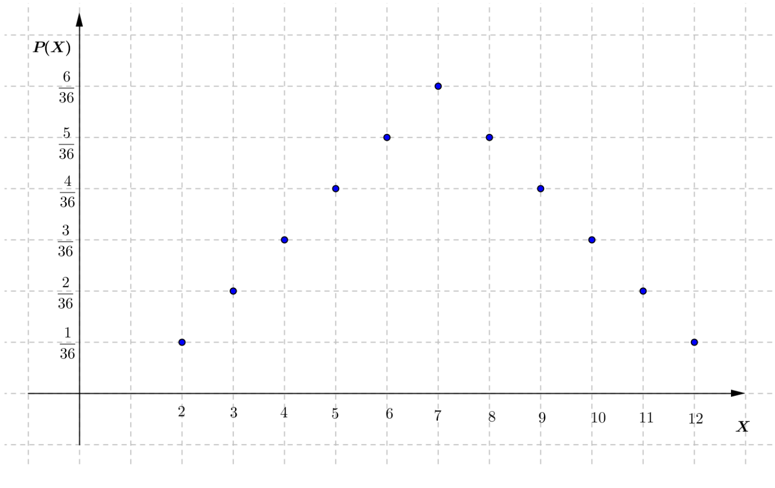
ecc.

Osserviamo che gli eventi associati ai diversi valori di X sono incompatibili e che la loro unione dà tutti i casi possibili.

Quindi $$P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+......P(X=12)=1$$

L'insieme delle probabilità che X assuma un certo valore viene chiamato "**distribuzione di probabilità di X"** e può essere rappresentato sia utilizzando un diagramma cartesiano che un istogramma.

La rappresentazione cartesiana di questa distribuzione di probabilità è la seguente:



In modo analogo alle distribuzioni di frequenze, anche per le distribuzioni di probabilità si definiscono la **media** e la **deviazione standard.**

Media di una variabile aleatoria

Se la variabile aleatoria discreta X può assumere i valori x_1, x_2, ..., x_n con probabilità p_1, p_2, ..., p_n si definisce media di X (o valore atteso o speranza matematica)

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ...x_n \cdot p_n$$

Nota: a volte il valor medio di X viene indicato con E(X) dove la E sta per l'iniziale di "expectation" (valore atteso).

Esempio: nel caso del lancio di due dadi e X = somma ottenuta lanciando due dadi abbiamo

$$M(x) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + ...10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Deviazione standard di una variabile aleatoria

La deviazione standard della variabile X (o scarto quadratico medio) si indica con la lettera σ ed è definita

$$\sigma(X) = \sqrt{(x_1 - M(X))^2 \cdot p_1 + ...(x_n - M(X))^2 \cdot p_n}$$

La deviazione standard indica quanto i valori x_1, x_2, ..., x_n sono concentrati attorno al valore medio M(X): se $\sigma(X)$ è piccolo i valori sono "vicini" a M(X).

Esempio: nel caso del lancio di due dadi e X = somma ottenuta lanciando due dadi abbiamo

$$\sigma(X) = \sqrt{(2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + ...(12-7)^2 \cdot \frac{1}{36}} \cong 2,4$$

Nota: si definisce anche la "varianza" di X

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2(X)$$

Funzione di ripartizione di una variabile aleatoria

Spesso può essere importante conoscere la probabilità che la variabile **X sia minore o uguale ad un dato valore**: se per esempio consideriamo la variabile aleatoria del nostro esempio la probabilità che X sia minore o uguale a k (cioè la probabilità di avere somma minore o uguale a k) sarà data da:

$$P(X \le k) = P(X = 2) + P(X = 3) + ...P(X = k)$$

La funzione $F(k) = P(X \le k)$ viene chiamata **funzione di ripartizione di X.**

Vediamo ora alcune distribuzioni di probabilità.

Distribuzione uniforme

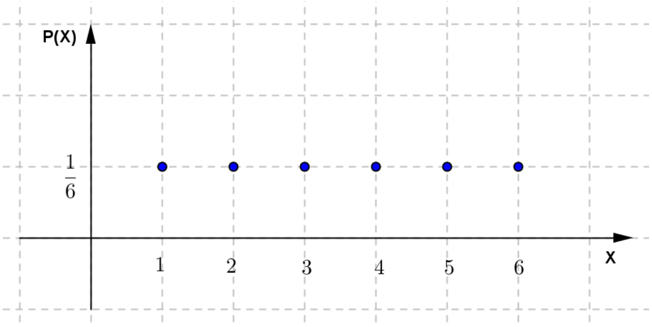
Lanciamo un dado non truccato e consideriamo X = n° uscito.

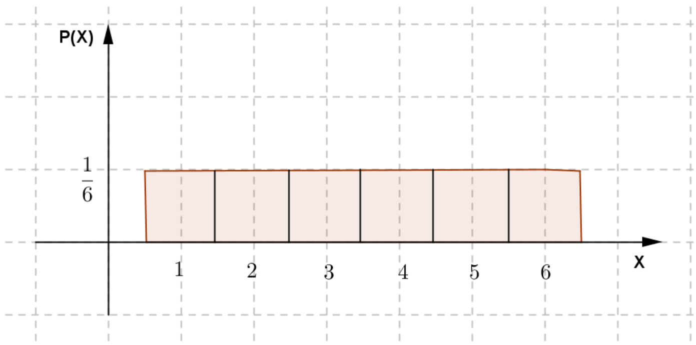
1,2,3,4,5,6 (che sono in numero finito).

In questo caso abbiamo

$$P(X=1)=\frac{1}{6},\quad P(X=2)=\frac{1}{6}....\quad P(X=6)=\frac{1}{6}$$

La rappresentazione della distribuzione di probabilità è la seguente:





Se, come in questo caso, la probabilità che la variabile assuma un dato valore è sempre la stessa si parla di **distribuzione di probabilità uniforme.**

Vediamo come risultano la media e la deviazione standard:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+....6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+....\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{35}{12}}\cong 1{,}71$$

Distribuzione binomiale

Rispondendo a caso ad un test di 10 domande vero-falso qual è la probabilità di rispondere correttamente a k domande?

In questo caso possiamo considerare la variabile aleatoria X = n° risposte corrette: sappiamo che

$$(*)\quad P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

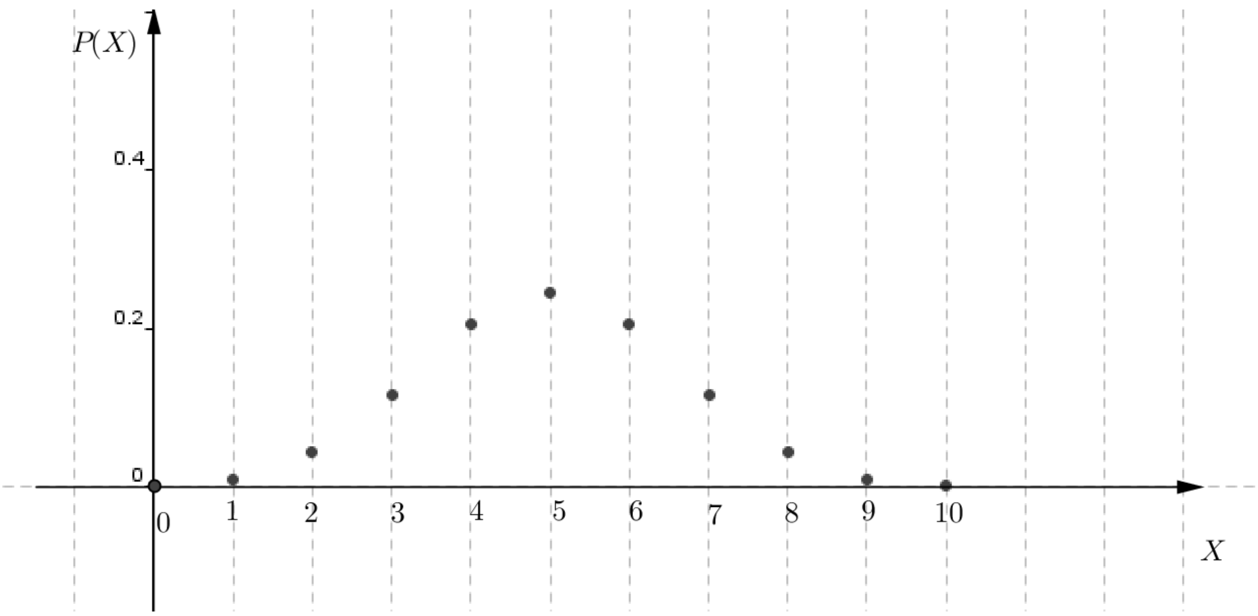
Infatti considerando il riempimento del test come una successione di n eventi indipendenti per avere un test con k risposte corrette devo "azzeccare" *k* risposte ognuna con probabilità $p=\frac{1}{2}$ e sbagliare *10-k* risposte con probabilità $q=1-p=\frac{1}{2}$, per il teorema della probabilità composta di eventi indipendenti la probabilità di riempire un test con *k* risposte corrette e *10-k* risposte errate è

$$p^{k}\cdot q^{10-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

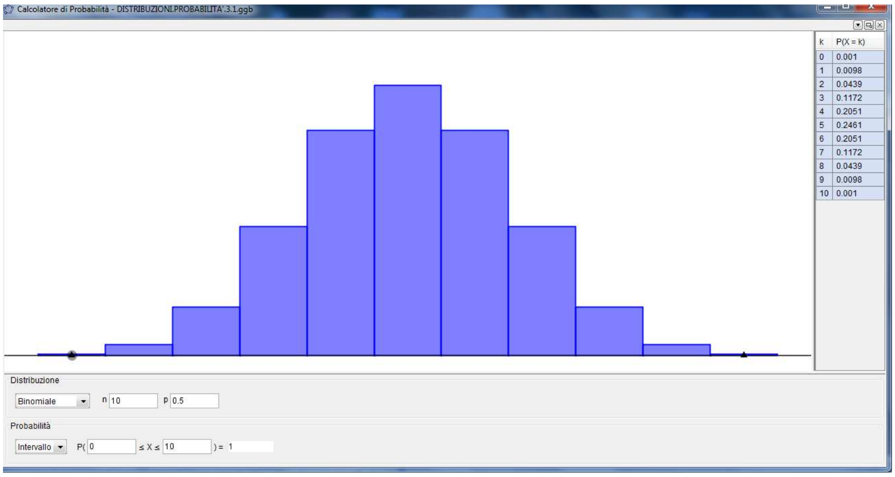
Ma d'altra parte le k risposte corrette possono essere scelte in $\binom{10}{k}$ modi diversi e quindi, per il teorema della probabilità totale, otteniamo la formula (*).

$$P(X=0)=\frac{1}{2^{10}},\quad P(X=1)=\frac{10}{2^{10}},\quad P(X=2)=\frac{45}{2^{10}}\cong 0{,}044,\quad P(X=3)=\frac{120}{2^{10}}\cong 0{,}12,\quad ecc$$

La distribuzione di probabilità di X per la presenza del coefficiente binomiale viene chiamata **distribuzione "binomiale"**.
Ecco la sua rappresentazione cartesiana:



Possiamo anche rappresentare questa distribuzione con un istogramma (in figura abbiamo riportato quello che fornisce il "calcolatore di probabilità" presente nella vista Foglio di calcolo di Geogebra selezionando distribuzione binomiale, n=10 e p=0,5):



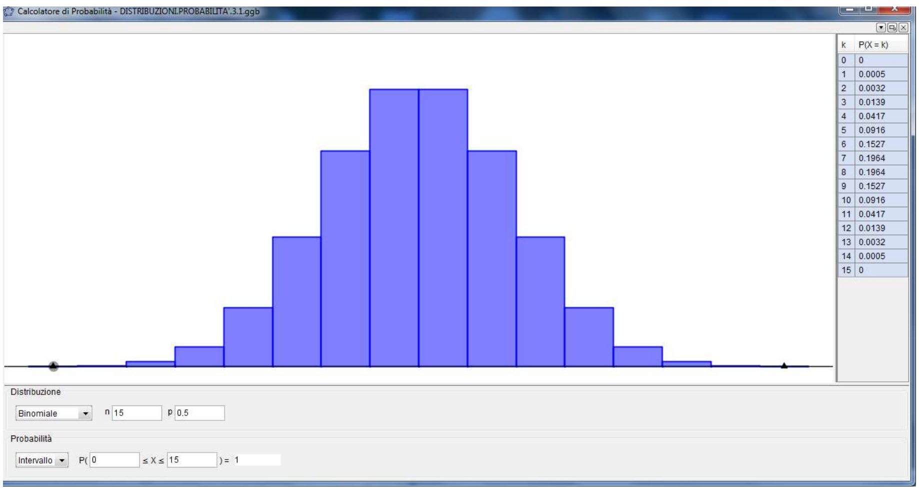
In generale se X = n° di successi in n prove indipendenti ciascuna con probabilità p di successo (e $q = 1 - p$ di insuccesso) si ha

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

S
i dice che X ha una **distribuzione di probabilità "binomiale" di parametri *n* e *p*** e si scrive

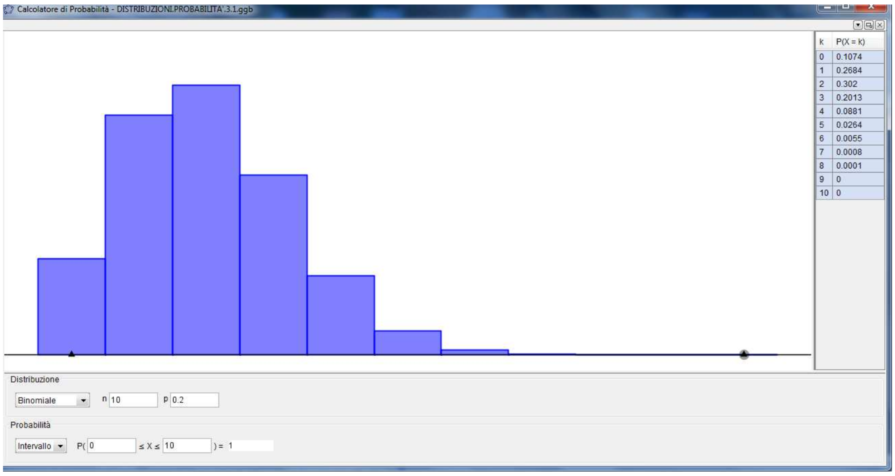
$$X \sim B(n,p)$$

Osservazione: possiamo osservare che solo se $p = q = \frac{1}{2}$ la distribuzione di probabilità è simmetrica rispetto al valore centrale $\frac{n}{2}$ e se n è dispari la distribuzione ha due valori di massima probabilità come nella figura seguente (in cui n=15).

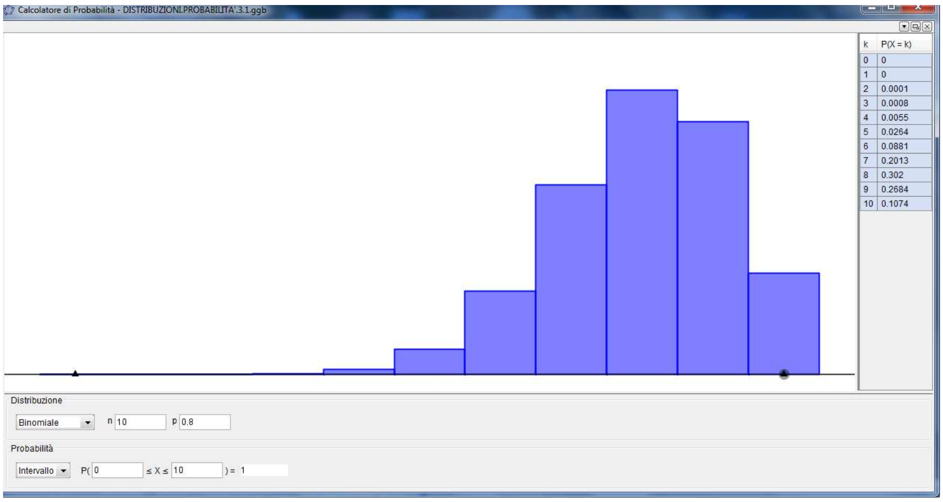


Se $p \neq \frac{1}{2}$ le distribuzioni di probabilità sono "sbilanciate".

Se per esempio n=10 e p=0,2 il valore di massima probabilità si ha per X=2.



Se invece n=10 e p=0,8 il valore di massima probabilità si ha per X=8.



Vediamo nel caso di X ~ $B(10, \frac{1}{2})$ come risultano media e deviazione standard:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{2^{10}} + 1 \cdot \frac{10}{2^{10}} + 2 \cdot \frac{45}{2^{10}} + ... + 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{(0-5)^2 \cdot \frac{1}{2^{10}} + ... + (10-5)^2 \cdot \frac{1}{2^{10}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cong 1{,}58$$

Nota

Si può dimostrare che se X ~ B(*n*,*p*) $\boxed{M(X) = n \cdot p}$ e $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$

Infatti nel nostro esempio, in cui X ~ $B(10, \frac{1}{2})$ abbiamo trovato:

$$M(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cong 1{,}58$$

(*)Dimostriamo la formula relativa a M(X):

$$M(X)=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+....n\cdot p_n=1\cdot\binom{n}{1}\cdot p\cdot q^{n-1}+2\cdot\binom{n}{2}\cdot p^2\cdot q^{n-2}+...+n\cdot\binom{n}{n}\cdot p^n=$$

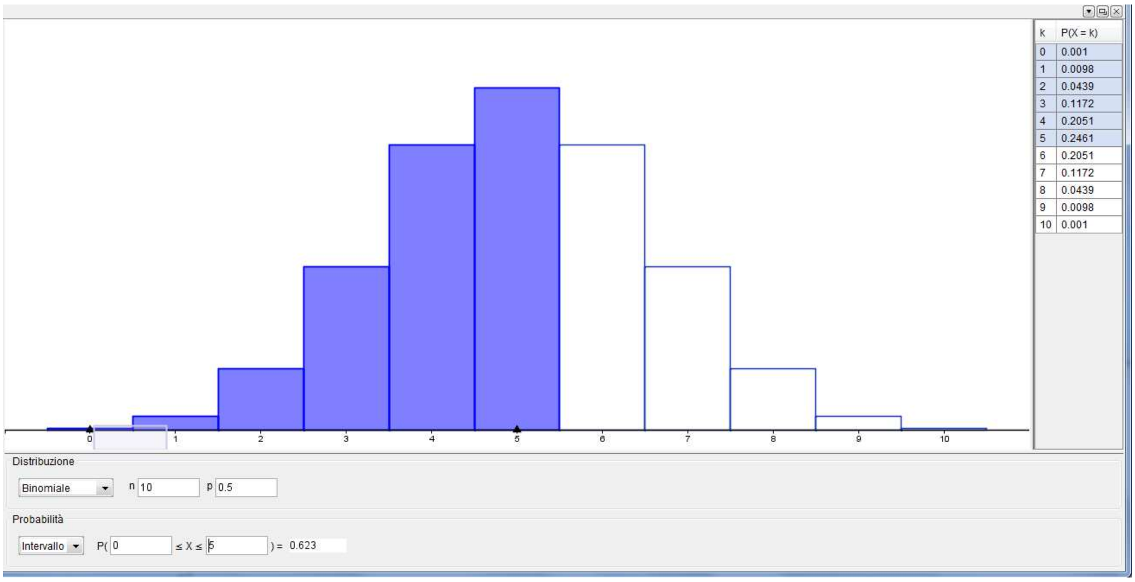
$$=n\cdot p\cdot q^{n-1}+2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^2\cdot q^{n-2}+...+n\cdot p^n=n\cdot p\cdot[q^{n-1}+(n-1)\cdot p\cdot q^{n-2}+..p^{n-1}]=n\cdot p\cdot(p+q)^{n-1}=$$

$$=n\cdot p\cdot 1=n\cdot p$$

Osservazione

Se rispondendo a caso ad un test di 10 domande vero-falso voglio determinare la probabilità di **rispondere correttamente al massimo a 5 domande** calcolerò la funzione di ripartizione:

$$F(5)=P(X\leq 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+...+P(X=5)\cong 0{,}423$$



Nota

Se invece voglio determinare **la probabilità che X assuma valori maggiori di un dato valore k** devo considerare l'evento complementare e quindi scrivere

$$P(X>k)=1-P(X\leq k)=1-F(k)$$

Per esempio rispondendo a caso ad un test di 10 domande vero-falso la probabilità di rispondere correttamente a più di 5 domande (probabilità di prendere la "sufficienza") è $P(X>5)=1-F(5)\cong 1-0{,}423=0{,}577$

Distribuzione binomiale e tavola di Galton

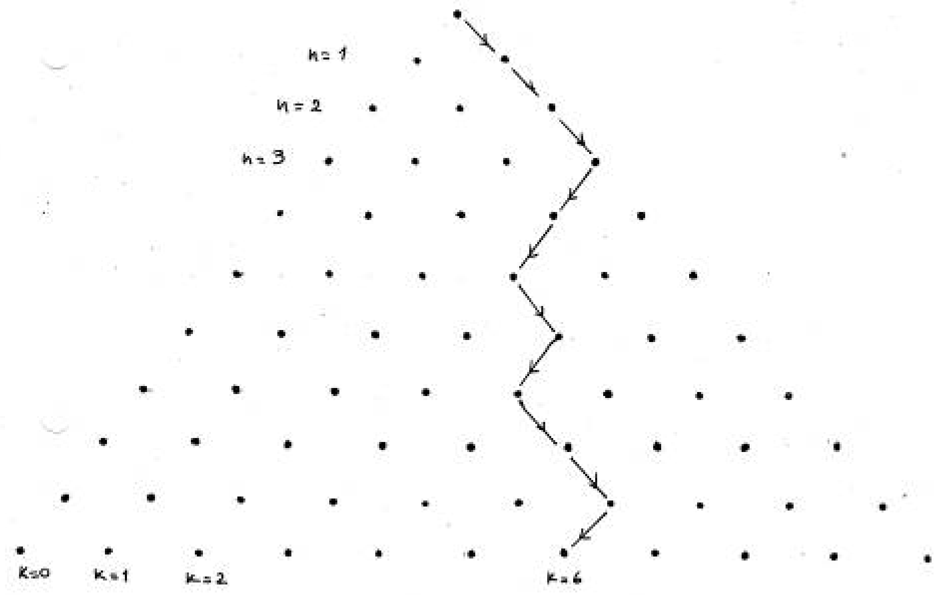
Consideriamo una tavola disposta verticalmente su cui sono fissati dei chiodi come in figura e alla base della quale ci sono dei contenitori a forma di tubi cilindrici.

Lasciamo cadere una pallina di dimensioni tali che rimbalzando ad ogni chiodo la pallina possa scendere spostandosi a destra o a sinistra con la stessa probabilità fino a cadere in uno dei tubi raccoglitori dopo aver fatto un certo percorso..
Cosa succede se faccio cadere un grande numero di palline? Come si disporranno nei tubi?

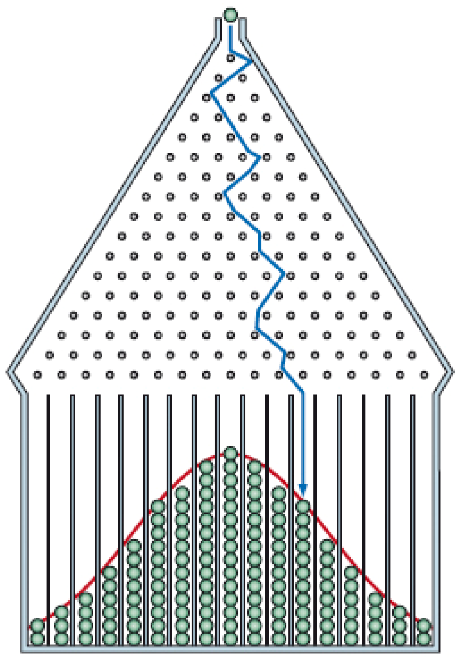
Questo dispositivo è chiamato **tavola di Galton** dal nome di chi l'ha ideato.

Il percorso casuale seguito dalla pallina può essere considerato equivalente al riempimento di un test vero-falso fatto rispondendo a caso: possiamo pensare che lo spostamento a destra corrisponda al successo S cioè al caso in cui diamo la risposta corretta e viceversa quello a sinistra corrisponda al caso in cui diamo la risposta errata (E).

Se per esempio la tavola ha 10 file di chiodi questo numero corrisponde al numero di domande del test.
Se una pallina arriva nella posizione finale $k = 6$ (vedi figura) vuol dire che per 6 volte su 10 rimbalzi è scesa a destra (6 successi-risposte esatte) e sappiamo che ci sono $C_{10,6} = 210$ modi per scegliere 6 elementi in un insieme di 10 elementi cioè ci sono 210 cammini diversi che possono portare la pallina a quella posizione.



Facendo scendere un numero N molto grande di palline se indichiamo con N_k il numero di palline che arrivano nella posizione k il rapporto $\frac{N_k}{N} \cong p_k$ (la frequenza relativa si avvicina alla probabilità di avere k successi su 10 prove indipendenti) e quindi la distribuzione delle palline nei tubi fornirà un "istogramma" della distribuzione di probabilità binomiale con $p = \frac{1}{2}$



Distribuzione di Poisson

Ad un centralino di un numero verde arrivano in media 120 telefonate in un'ora di punta.
Qual è la probabilità che in un'ora di punta arrivino 100 telefonate?

Possiamo considerare X = n° di telefonate che arrivano al centralino in un'ora di punta e considerare X ~ $B(n, p)$ in cui

- n = numero degli utenti potenziali
- p = probabilità che un utente telefoni al centralino

E' chiaro che n è un numero grande mentre p è piccolo: in queste condizioni si può dimostrare che

$$P(X = K) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cong \frac{(np)^k}{k!} \cdot e^{-np}$$

Poiché $M(X) = np$ e nel nostro caso **conosciamo proprio il valor medio** di X (120) **ma non *n* e *p*** possiamo proprio utilizzare questa relazione.

Se poniamo $\boxed{\lambda = np}$ abbiamo:

$$\boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}$$

Questa distribuzione viene chiamata **distribuzione di Poisson di parametro** λ (dal nome del matematico che l'ha studiata) in cui λ è il numero medio di eventi per intervallo di tempo ed è indicata con $P(\lambda)$.

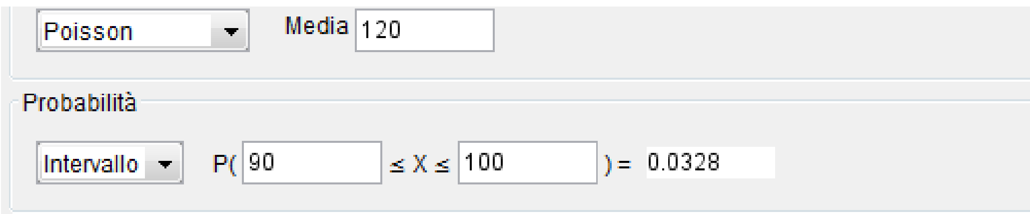
Quindi nel nostro caso avremo: $P(X = 100) = \dfrac{120^{100}}{100!} \cdot e^{-120} \cong 0{,}0068$

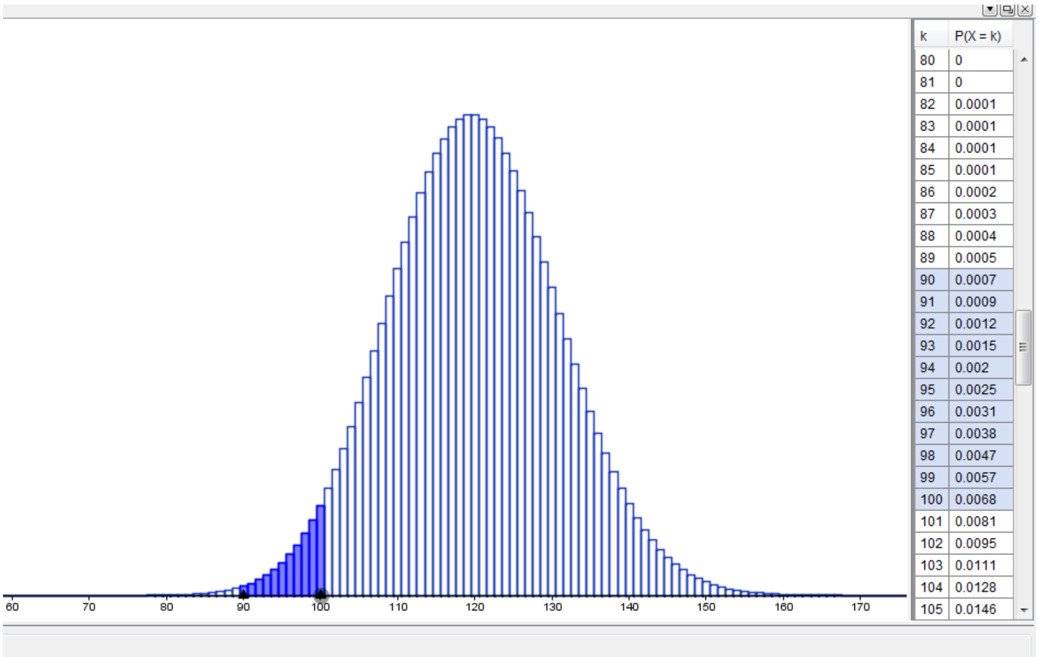
E' chiaro che la probabilità di avere un numero preciso di telefonate è molto bassa e non molto interessante.

E' più interessante chiedersi, per esempio, qual è la probabilità che in un'ora di punta arrivino tra le 90 e le 100 telefonate: dobbiamo in questo caso sommare le probabilità relative a

$$P(90 \le X \le 100) = P(X = 90) + P(X = 91) + \ldots. + P(X = 100)$$

e dal momento che i calcoli sono pesanti possiamo utilizzare il foglio di calcolo di Geogebra e in particolare il calcolatore di probabilità dopo aver impostato distribuzione di Poisson di media 120 e selezionato l'intervallo 90-100 con i puntatori.



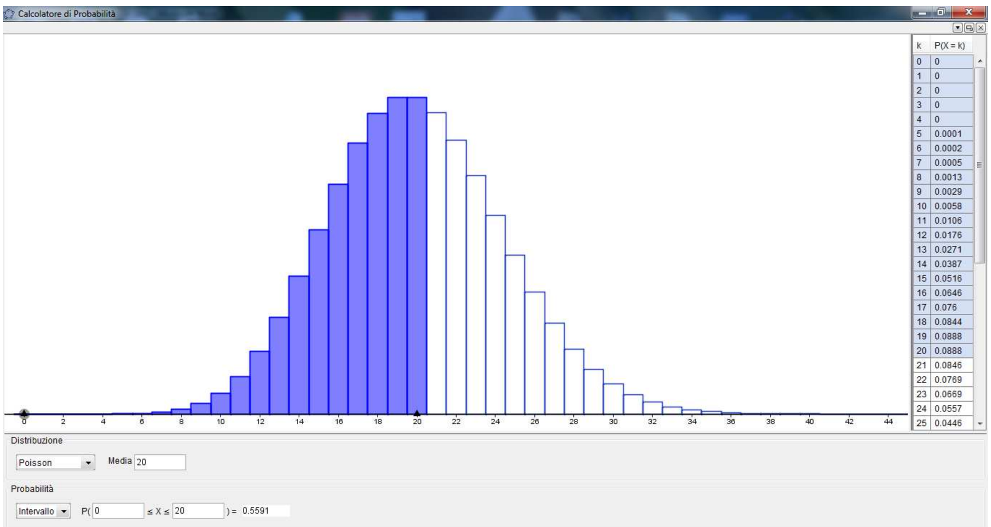


Può essere interessante anche determinare la probabilità che, per esempio, nei primi 10 minuti di un'ora di punta arrivino più di 20 telefonate: se supponiamo che le telefonate arrivino in modo "uniforme" nel tempo il numero medio di telefonate che arrivano in 10 minuti sarà

$$\frac{10}{60} \cdot 120 = 20$$

Se allora consideriamo Y = n° telefonate che arrivano nei primi 10 minuti di un'ora di punta come una variabile aleatoria di Poisson con media 20 avremo

$$P(Y > 20) = 1 - P(Y \le 20) \cong 1 - 0{,}56 = 0{,}44$$

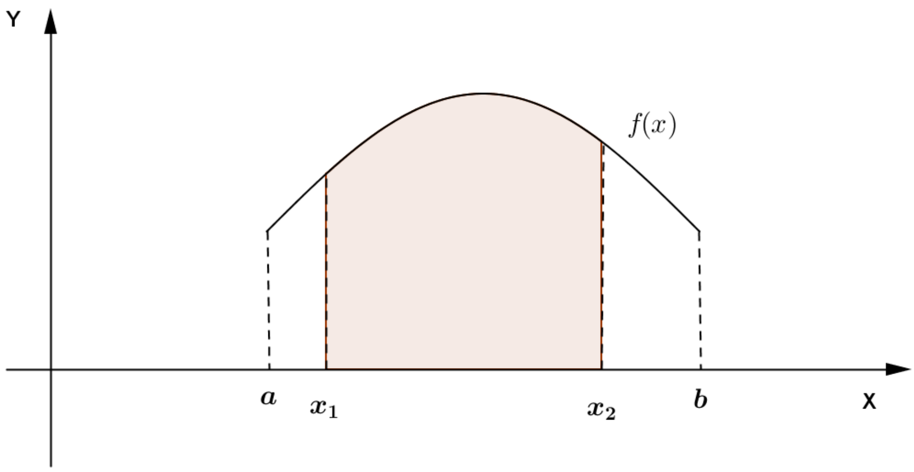


Variabili aleatorie continue

Ci sono molto situazioni in cui i valori assunti da una variabile aleatoria X non possono considerarsi in numero finito ed occorre considerare che X assuma tutti i valori reali di un dato intervallo $I = [a;b]$ e si parlerà di variabile aleatoria "continua".
Se per esempio misuriamo l'altezza degli studenti di una classe e consideriamo X = altezza (in cm) non ha senso ricercare P(X = dato valore) ma piuttosto $P(x_1 \le X \le x_2)$.

Nel caso di una variabile aleatoria continua che assume valori nell'intervallo $I = [a;b]$ si descrive l'andamento della probabilità di X attraverso una funzione $f(x)$ chiamata "**densità di probabilità di X**" tale che

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



E chiaro che $\int_a^b f(x)dx = 1$

Poiché se X prende valori appartenenti all'intervallo $I = [a;b]$ possiamo sempre porre

$$f(x) = 0 \quad per \quad x < a \cup x > b$$

possiamo considerare $f(x)$ definita su tutti i numeri reali.

Quindi se $f(x)$ è una densità di probabilità dovrà essere

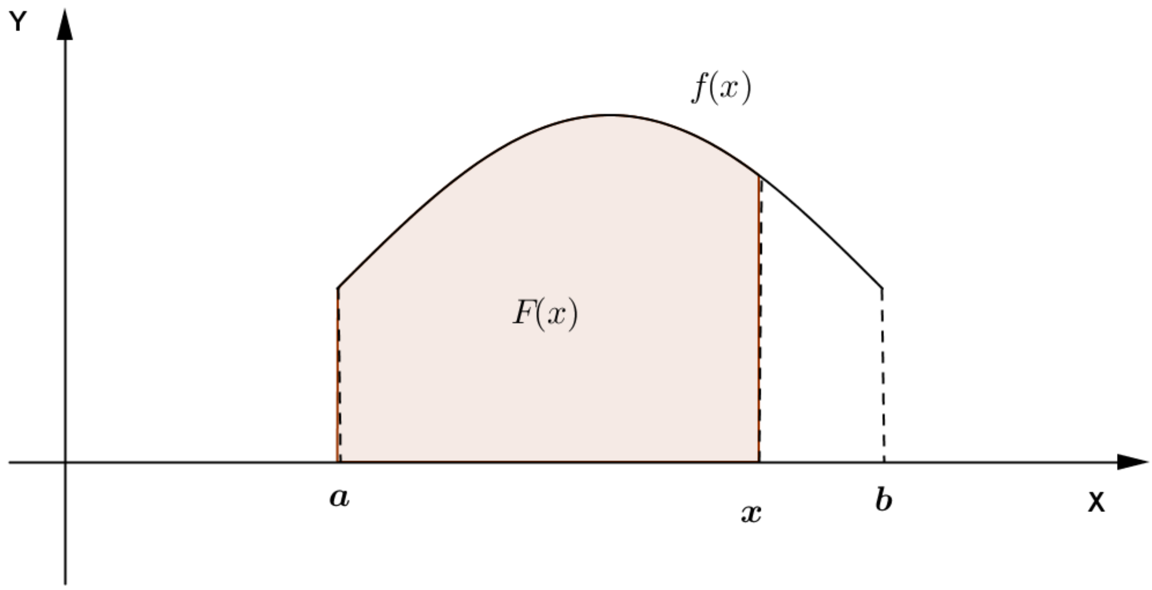
$$f(x) \ge 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Nota: la probabilità che una variabile aleatoria continua X assuma un dato valore compreso in I è sempre nulla, cioè $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in I$: la probabilità si riferisce sempre alla probabilità che X appartenga ad un dato intervallo di valori.

Analogamente a quanto visto per le variabili aleatorie discrete abbiamo:

- valore medio $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$
- deviazione standard $\sigma(X)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx}$
- varianza $\operatorname{var}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx$
- funzione di ripartizione $F(x)=P(X \le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Quindi F(x) è una primitiva della densità f(x) e $P(x_1 \le X \le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$



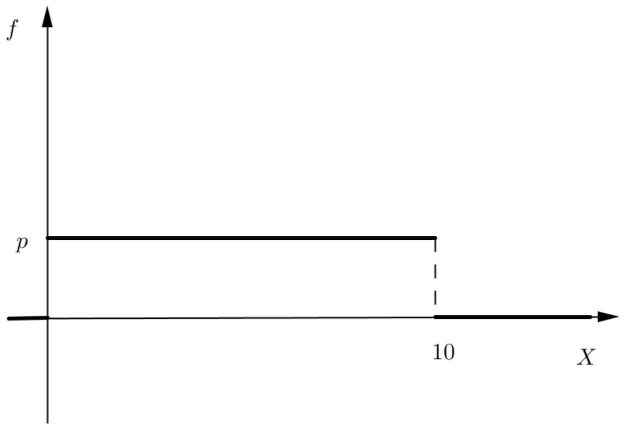
Distribuzione uniforme continua

Si dice che X ha una distribuzione uniforme continua quando la sua densità di probabilità è una funzione

$$f(x)\begin{cases} 0 & x < a \\ p & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

dove essendo $p \cdot (b-a) = 1)$ si ha che $p = \dfrac{1}{b-a}$.

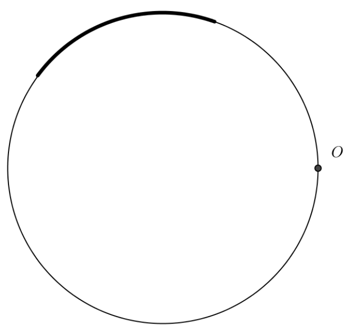
Come esempio di distribuzione uniforme continua consideriamo un punto materiale P che sta compiendo un moto circolare uniforme su una circonferenza di lunghezza 10 cm e supponiamo di osservarlo ad un determinato istante: se supponiamo di non aver dati sufficienti per sapere in quale posizione si trovi in quell'istante e consideriamo come variabile casuale X la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{OP}$ (misurato nel verso antiorario) dove O è un punto di riferimento sulla circonferenza, possiamo dire che la distribuzione di probabilità di X è uniforme continua.
Il grafico della distribuzione di probabilità $f(x)$ di X risulta



Poiché $\qquad p \cdot 10 = 1 \qquad \Rightarrow p = \dfrac{1}{10}$

Ricordiamo che per le distribuzioni continue la probabilità che il valore della variabile casuale sia uguale ad un dato numero k è nulla, cioè $P(X = k) = 0$, mentre si determina sempre la probabilità che il valore della variabile casuale appartenga ad un dato intervallo cioè si calcola $P(a \le X \le b)$.

Se per esempio nel nostro caso vogliamo determinare la probabilità che il punto P si trovi ad una distanza compresa tra 2 e 4 (cm) misurata sulla circonferenza in senso antiorario (vedi figura) avremo:



$$P(2 \le X \le 4) = \int_2^4 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5}$$

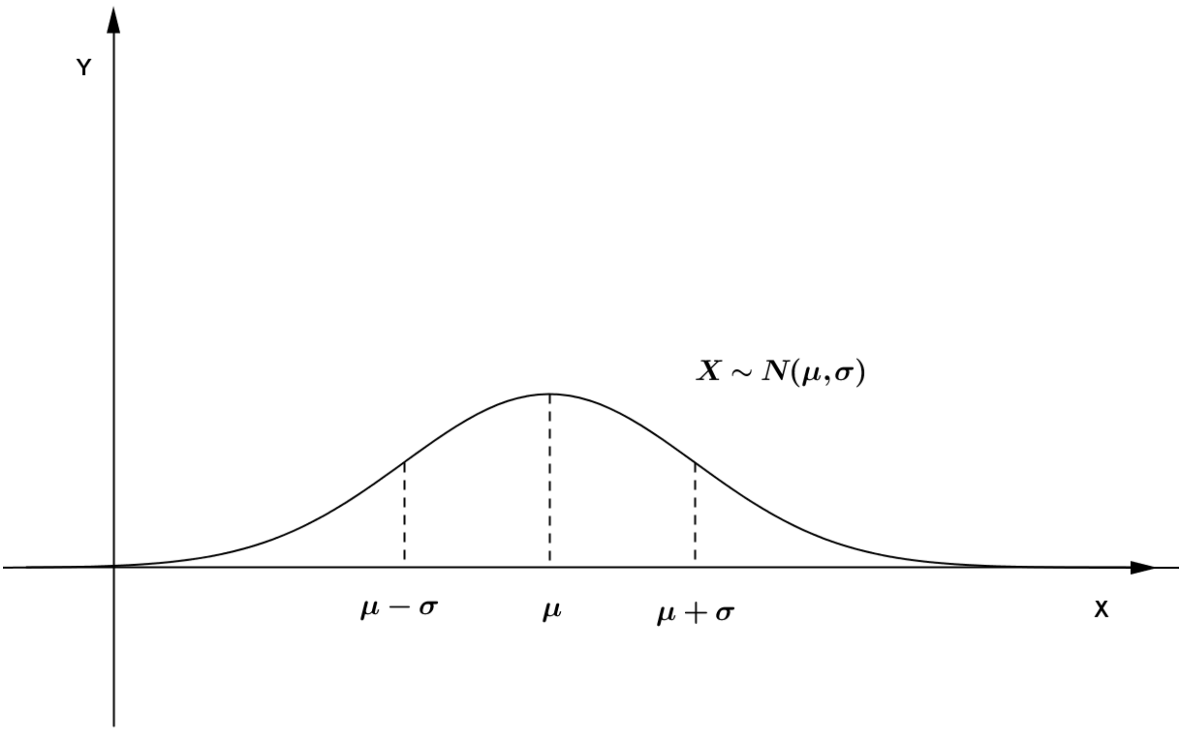
Distribuzione normale

Quando misuriamo le altezze o il peso di un grande numero di persone oppure misuriamo una grandezza in modo diretto utilizzando uno strumento di una data sensibilità se consideriamo come variabile aleatoria

X = misurazione ottenuta

riportando in un grafico l'andamento della distribuzione di frequenze relative vediamo che il grafico si avvicina ad una curva chiamata **curva normale** (proprio perché è il modello che rappresenta l'andamento che si ha di "norma" per molte distribuzioni di frequenza) o curva di Gauss (dal nome del matematico che l'ha studiata) avente equazione

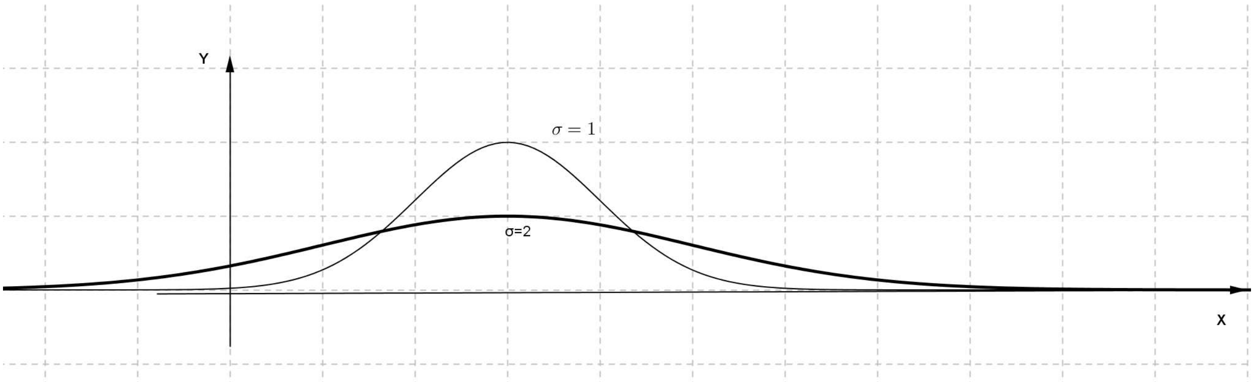
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}},$$



Questa densità di probabilità viene chiamata anche **curva degli errori accidentali** o **curva "a campana"** per la sua forma ed indicata con $N(\mu,\sigma)$.

Nota: si può dimostrare che la distribuzione normale approssima bene anche la distribuzione binomiale per *n* grande e $p = \frac{1}{2}$ ponendo $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np \cdot (1-p)}$

La curva assume il valore massimo per $X = \mu$ e risulta $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$ ed ha due flessi per $x = \mu \pm \sigma$ come si può verificare facilmente studiando la derivata prima e seconda.
Possiamo osservare che all'aumentare di σ la curva si appiattisce e c'è maggiore dispersione dei valori intorno al valore medio poiché l'ordinata del massimo dipende da σ: se σ è piccolo allora l'ordinata del massimo della distribuzione normale è grande e viceversa quando σ è grande l'ordinata del massimo è piccola e la curva si appiattisce.



Inoltre non è difficile verificare che

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \mu$$

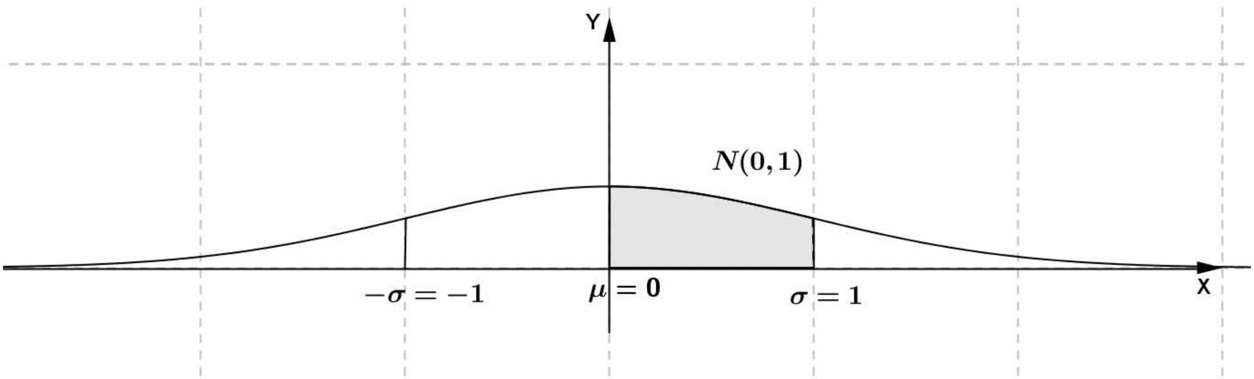
$$\sigma(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx = \sigma$$

cioè μ **e** σ **sono proprio il valore medio e la deviazione standard di X.**

Nota

Se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si parla di **distribuzione normale standard** e l'equazione risulta

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}$$



Se X ~ $N(\mu,\sigma)$ possiamo ricondurci ad una variabile normale standard considerando

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Per determinare la probabilità che X appartenga ad un dato intervallo $[a,b]$ dobbiamo calcolare

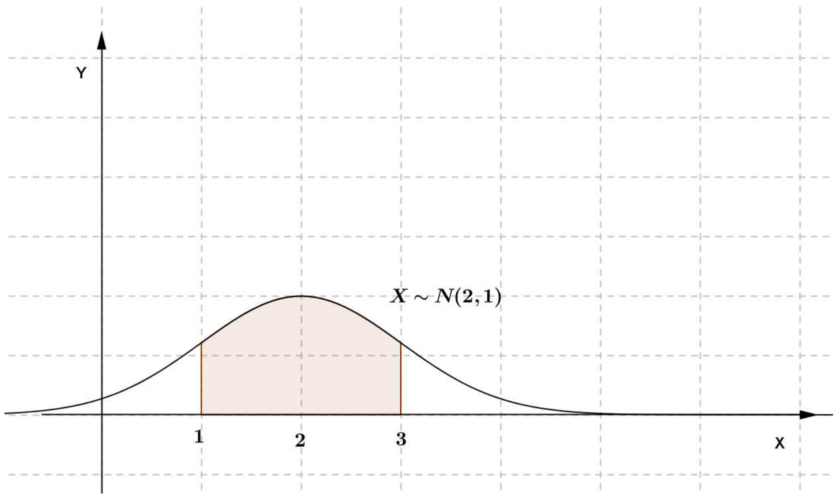
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

dove $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ è la funzione di ripartizione.

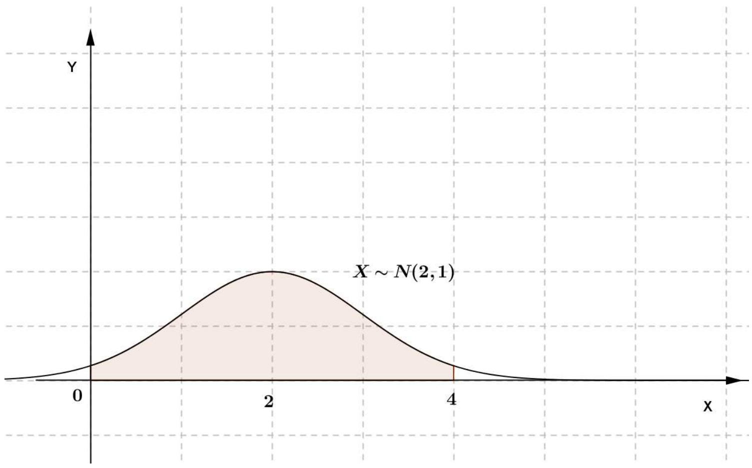
Ma questo integrale non può essere espresso mediante le usuali funzioni che conosciamo (funzioni elementari) ed occorrono metodi di calcolo approssimato.
I valori di F(x) relativi a X~ $N(0,1)$ sono stati calcolati e riportati in delle apposite "tavole" .

Esempio
Se X ~ $N(2,1)$ per calcolare la probabilità che X appartenga ad un dato intervallo, passiamo alla variabile standard e usiamo le tavole. Per esempio:

$$P(1 < X < 3) = P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot P(0 \leq Z \leq 1) = 2(F(1) - F(0)) \cong 2 \cdot (0{,}84 - 0{,}5) = 0{,}68$$



$$P(0 < X < 4) = P(-2 < Z < 2) = 2 \cdot P(0 \leq Z \leq 2) = 2 \cdot (F(2) - F(0)) \cong 0{,}96$$



In generale se X ~ $N(\mu,\sigma)$ abbiamo:

$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \cong 2\cdot 0{,}34 = 0{,}68$$
$$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \cong 0{,}96$$
$$P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \cong 0{,}99$$

Tabella della funzione di ripartizione F(X) *della distribuzione normale standard* $N(0{,}1)$

X	***F(X)***
0	0,50000
0,1	0,53983
0,2	0,57926
0,3	0,61791
0,4	0,65542
0,5	0,69146
0,6	0,72575
0,7	0,75804
0,8	0,78814
0,9	0,81594
1	0,84134
1,1	0,86650
1,2	0,88686
1,3	0,90490
1,4	0,92073
1,5	0,93448
1,6	0,94630
1,7	0,95637
1,8	0,96485
1,9	0,97193
2	0,97778
2,1	0,98257
2,2	0,98645
2,3	0,98956
2,4	0,99202
2,5	0,99396
2,6	0,99547
2,7	0,99664
2,8	0,99752
2,9	0,99819
3	0,99869

ESERCIZI
DISTRIBUZIONI BINOMIALE

1. Un test è costituito da 10 domande, ognuna con 4 possibili risposte di cui solamente una è corretta. Se uno studente risponde a caso, qual è la probabilità che:

   a) non risponda correttamente a nessuna domanda
   b) risponda correttamente ad almeno 6 domande

   [0,056 ; 0,02]

2. Comprando un gratta - e - vinci c'è una probabilità dell'1% di vincere qualcosa. Calcola la probabilità che, comprando 10 biglietti, si vinca almeno 1 premio.

   [0,1]

3. Se si lancia una moneta per 20 volte, qual è la probabilità che esca Testa almeno 10 volte?

   [0,588]

4. Se si lancia un dado, non truccato, per 10 volte, qual è la probabilità che non esca mai il 6?

   [circa 0,16]

5. Un tiratore scelto ha la probabilità del 98% di fare centro. Qual è la probabilità che, sparando 10 colpi, colpisca sempre il bersaglio?

   [circa 0,82]

ESERCIZI
DISTRIBUZIONE DI POISSON

1. Secondo alcune stime sulla Terra in un anno si verificano in media 20 terremoti di grande entità (magnitudo superiore a 6).
   Se si suppone che X = n° terremoti di grande entità all'anno si possa considerare come una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson, calcola la probabilità che:

   a) non si verifichi alcun terremoto di grande entità in un anno;
   b) si verifichino 10 terremoti di grande entità in un anno;
   c) si verifichino tra i 5 e i 10 terremoti di grande entità in un anno.

   [$2\cdot 10^{-9}$; 0,006; 0,011]

2. Un campione radioattivo contiene circa $2\cdot 10^{10}$ nuclei, ciascuno dei quali ha probabilità 10^{-10} di decadere in 1 secondo. Calcola:

   a) il numero medio di decadimenti in 1 secondo;
   b) la probabilità di osservare 2 decadimenti in 1 secondo;
   c) la probabilità di osservare al più 2 decadimenti in un secondo.

   [2 ; $2\cdot e^{-2}$; $5\cdot e^{-2}$]

3. Un macchinario produce pezzi difettosi con probabilità $p = 0{,}005$. Calcola la probabilità che su 500 pezzi:

   a) nessuno sia difettoso;
   b) i pezzi difettosi siano in numero tra 2 e 4.

   [0,082 ; 0,604]

4. Al servizio di guardia medica festivo arrivano in media 90 richieste in 24 ore. Calcola la probabilità che in un'ora:

   a) vi siano 5 chiamate;
   b) vi siano al massimo 2 chiamate.

   [0,145 ; 0,277]

5. Ad uno sportello bancario arrivano in media 20 persone all'ora. Determina la probabilità che in 15 minuti:

   a) arrivi solo una persona;
   b) arrivino al massimo 5 persone.

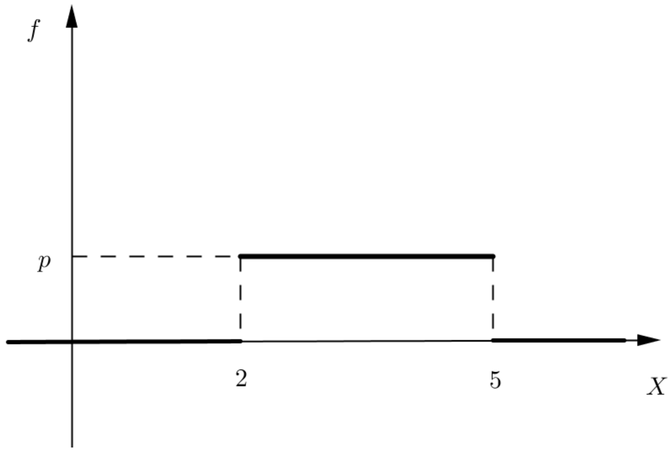
   [0,034; 0,616]

ESERCIZIO
DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA

Determina la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo $[2,5]$ con una distribuzione uniforme. Determina il valor medio, la varianza e la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $\frac{5}{2} \leq X \leq 4$.

Svolgimento

Poiché il grafico è del tipo seguente



dovrà essere $p \cdot 3 = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

Calcoliamo il valor medio

$$M(X) = \int_2^5 x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{25}{2} - 2\right) = \frac{7}{2}$$

Osserviamo che $M(X) = \frac{2+5}{2}$

Calcoliamo la varianza e la deviazione standard

$$\operatorname{var}(X) = \int_2^5 \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(x - \frac{7}{2})^3}{3}\right]_2^5 = \ldots = \frac{3}{4} \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{\operatorname{var}(X)} \cong 0{,}87$$

Calcoliamo infine $P(3 \leq X \leq 4) = \int_{\frac{5}{2}}^4 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}\left[4 - \frac{5}{2}\right] = \frac{1}{2}$

ESERCIZI
DISTRIBUZIONE NORMALE

1. Il tempo di attesa (in minuti) a uno sportello di un ufficio postale si può modellare con una variabile aleatoria normale con media $\mu = 10$; $\sigma = 5$. Qual è la probabilità di dover attendere:

   a) tra 5 e 10 minuti;
   b) tra 10 e 15 minuti;
   c) tra 10 e 20 minuti.

   [0,34 ; 0,34 ; 0,48]

2. Delle barrette d'acciaio prodotte da un macchinario hanno una lunghezza X ~ $N(\mu = 10cm, \sigma = 0{,}5cm)$. La lunghezza delle barrette è ritenuta accettabile se è compresa tra 9,5 cm e 10,5 cm. Qual è la percentuale di barrette che vengono prodotte nei limiti di tolleranza?

   [68%]

3. Per un campione di 1000 persone è stato registrato il peso che è risultato distribuito in modo "normale" con $\mu = 82Kg$ e $\sigma = 12Kg$. Calcola quante persone hanno peso compreso tra 70 Kg e 90 Kg

   [circa 590]

4. La distribuzione delle altezze di un gruppo di 500 persone può essere approssimato con una distribuzione normale: la media risulta 170 cm con deviazione standard 5 cm. Quante sono, teoricamente, le persone con un'altezza compresa tra 160 cm e 180 cm?

   [circa 480]

5. Il peso di una scatola di pelati confezionata automaticamente si distribuisce normalmente . Se il peso medio è 8 Kg con deviazione standard 0,05 Kg, qual è l'intervallo di peso in cui si concentra circa il 99% delle scatole confezionate?

   [7,85 Kg – 8,15 Kg]