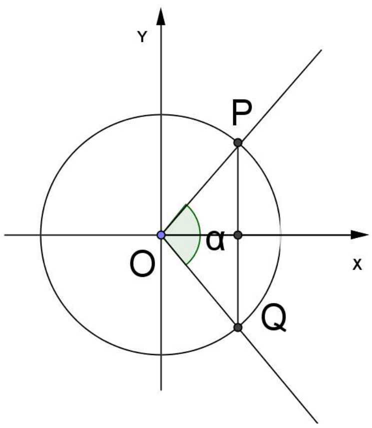
Complementi di trigonometria

Breve storia delle funzioni goniometriche

Lo studio della trigonometria nasce con gli **astronomi della scuola di Alessandria di Egitto** ed infatti la prima ad essere sviluppata fu la trigonometria sferica cioè lo studio dei triangoli sferici (tracciati sulla superficie di una sfera e i cui lati sono archi di cerchio).

Il fondatore della trigonometria è considerato **Ipparco da Rodi** (II sec a.C.) che visse ad Alessandria ma la maggior parte delle notizie sui metodi trigonometrici alessandrini ci vengono dal massimo astronomo dell'antichità, **Tolomeo** (II sec d.C.) che scrisse "Composizione matematica" mutata poi in "Grande Composizione" e chiamata infine *Almagesto* (nome arabo che deriva dal greco $\mu\epsilon\gamma\iota\sigma\tau\eta$, il massimo) in cui pose le basi della teoria astronomica.



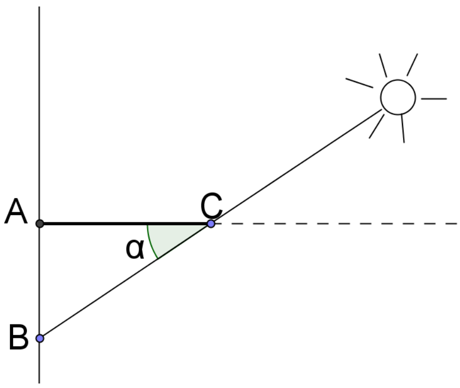
Nella trigonometria alessandrina invece di utilizzare il seno di un angolo, così come l'abbiamo definito, si usava la funzione "corda" $c(\alpha)$

$c(\alpha) = \overline{PQ}$ (**corda sottesa dall'angolo α**)

(praticamente $\overline{PQ} = 2\ sen\dfrac{\alpha}{2}$)

Il **seno come lo definiamo attualmente** fu introdotto in **India** e furono calcolati i seni degli angoli (tavola dei seni) intorno al V sec. d.C.

Furono sempre gli astronomi indiani ad introdurre il **coseno** definito come seno dell'angolo complementare e la **tangente** definita come l'ombra che un'asta infissa perpendicolarmente su un muro verticale (gnomone) e di lunghezza 1, proietta sul muro per una data altezza del sole sull'orizzonte (angolo α) (si tradusse in latino con "umbra versa"*). Il termine tangente fu introdotto solo nel 1600.

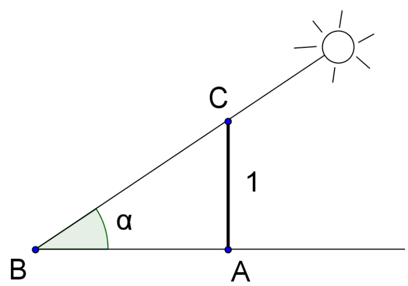


$\overline{AC} = 1$

$\overline{AB} = tg\alpha$

La cotangente (tangente dell'angolo complementare) era definita come l'ombra proiettata da un orologio orizzontale ("umbra recta")

$\overline{AB} = \text{cotg}\,\alpha$

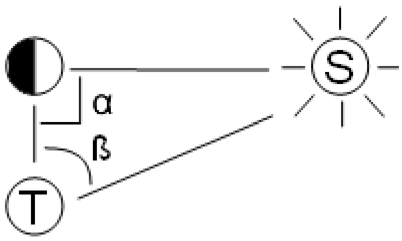


Trigonometria e astronomia

Aristarco e le distanze Terra-Sole e Terra-Luna

E' stato l'astronomo greco **Aristarco** a studiare questo problema: nell'unica sua opera a noi pervenuta, cioè il breve trattato *Sulle dimensioni e distanze del Sole e della Luna*, ha cercato di confrontare la distanza Terra-Luna e la distanza Terra-Sole.

Quando la luna è in quadratura, ossia è illuminata per metà, essa, con la Terra e il Sole, forma il triangolo rettangolo mostrato in figura ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). Misurando in tale condizione l'angolo β compreso tra la direzione Terra-Luna e la direzione Terra-Sole è possibile calcolare il rapporto tra il cateto e l'ipotenusa di un triangolo simile.



Terra, Luna e Sole durante una quadratura

Aristarco stimò l'angolo $\beta = 87°$ (di conseguenza $L\hat{S}T = 3°$) e stimò il rapporto tra la distanza Terra-Luna e Terra-Sole (il nostro sen3°) come compreso tra $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{18}$: quindi il Sole risultava circa 20 volte più lontano della Luna rispetto alla Terra.

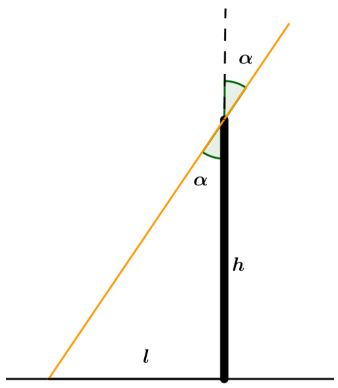
In realtà l'angolo $\beta = 89°50'$ e quindi la distanza Terra-Sole è circa 400 volte la distanza Terra-Luna, ma il metodo di Aristarco è comunque uno dei primi esempi di un metodo trigonometrico applicato per la risoluzione di un problema astronomico.

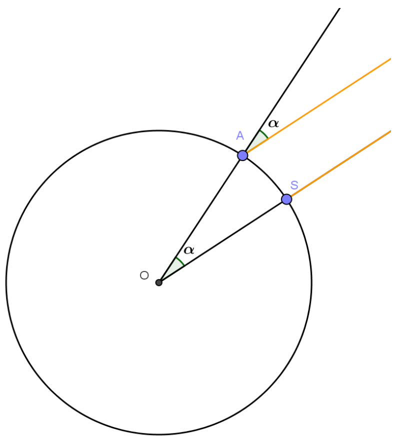
Eratostene e la misura del raggio terrestre

Il matematico, geografo ed astronomo Eratostene (III secolo a.C.), era direttore della grande biblioteca di Alessandria d'Egitto quando formulò il metodo per calcolare le dimensioni della Terra. Dai suoi studi, era venuto a conoscenza del fatto che a Syene (l'attuale Assuan), a mezzogiorno del solstizio d'estate, il Sole si trovava proprio sullo zenit, tanto che il fondo di un pozzo profondo ne veniva illuminato, perciò un bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante non avrebbe proiettato alcuna ombra in terra. Invece ad Alessandria questo non succedeva mai, gli obelischi proiettavano comunque la loro ombra sul terreno.

Eratostene perciò, per procedere con i suoi calcoli, ipotizzò la Terra perfettamente sferica ed il Sole sufficientemente distante da considerare paralleli i raggi che la investono. Inoltre assunse che Alessandria e Syene si trovassero sullo stesso meridiano.

Durante il solstizio d'estate calcolò l'angolo di elevazione del Sole ad Alessandria, misurando l'ombra proiettata proprio da un bastone piantato in terra.





Indicando con:

- h :lunghezza del palo
- l :lunghezza dell'ombra proiettata dal palo sul terreno
- α :angolo di elevazione del Sole

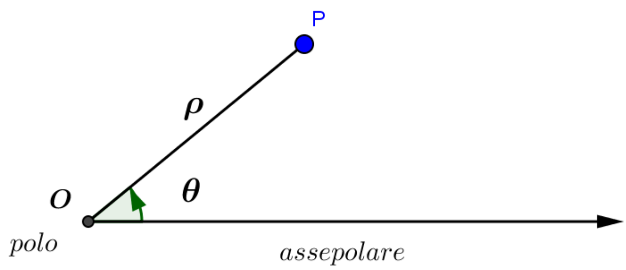
dalla misura di h e l Eratostene ricavò α che risultò circa 1/50 di angolo giro cioè 7° 12'.

Quindi anche la distanza tra le due città (che era stimata 5000 stadia e che corrisponde a circa 800 Km) doveva essere 1/50 della circonferenza terrestre che quindi risultava essere 250000 stadia cioè circa 40000 Km, valore straordinariamente vicino a quello ottenuto con metodi moderni (40.075 km).

Una volta stabilito un valore per essa, il raggio terrestre si ricavava dalla nota relazione che lega la circonferenza ed il suo raggio.

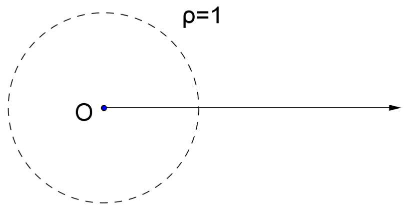
Le coordinate polari

Se nel piano fissiamo una semiretta di origine O (orientata) possiamo individuare la posizione di un qualsiasi punto P indicando la sua distanza da O e l'angolo orientato θ formato tra la semiretta fissata e la semiretta OP.

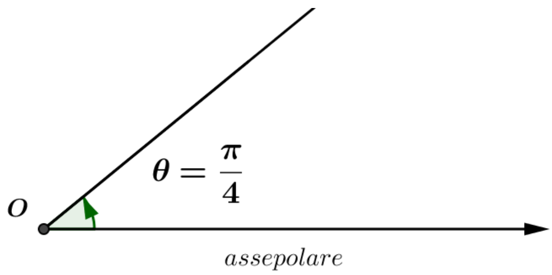


$$\overline{OP} = \rho$$
$$P(\rho, \theta)$$
$$O \leq \theta < 2\pi$$

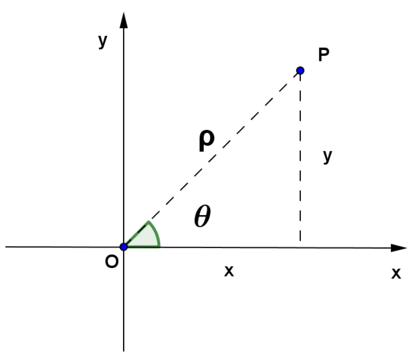
La semiretta si chiama asse polare, O si dice polo e si parla di sistema di riferimento polare.
(ρ, θ) si dicono le coordinate polari di P: ρ si chiama modulo e θ si chiama argomento.
Se scriviamo $\rho = 1$ questa risulta, in coordinate polari, l'equazione della circonferenza di centro il polo O e raggio $r = 1$ poiché tutti i suoi punti hanno distanza $\rho = 1$.



Se scriviamo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ avremo la semiretta in figura:



Nota
Possiamo passare da coordinate polari a coordinate cartesiane osservando:



$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot sen\,\theta \end{cases}$$