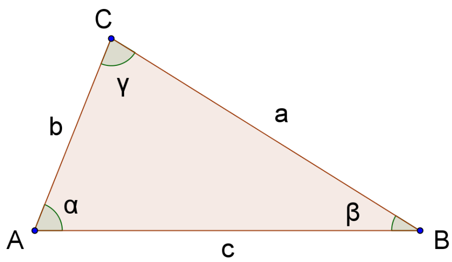
Triangoli qualsiasi

Consideriamo un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ e adottiamo la seguente notazione: nel vertice A l'angolo è α, nel vertice B $\rightarrow \beta$, nel vertice C $\rightarrow \gamma$ e indichiamo con a il lato opposto ad A, con b quello opposto a B e con c quello opposto a C.

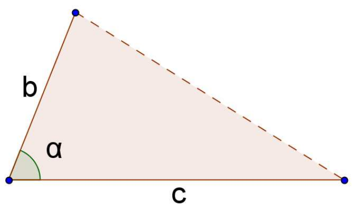


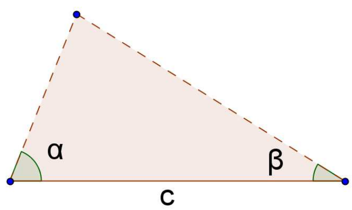
Risolvere un triangolo significa determinare, dalla conoscenza di alcuni elementi, tutti gli altri elementi (lati, angoli). Ricordiamo che, grazie ai criteri di congruenza dei triangoli, un triangolo è determinato se si assegnano:

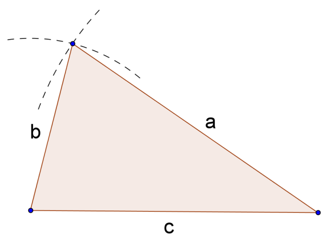
1) due lati e l'angolo compreso;
2) un lato e due angoli;
3) i tre lati (purché naturalmente sia rispettata la relazione che ciascun lato sia minore della somma degli altri due)

Nota: se ordiniamo i lati in modo decrescente cioè se per esempio $a \geq b \geq c$ basterà verificare che $a < b + c$ poiché per b e c sarà verificato sicuramente.

Infatti in ognuno di questi casi è possibile costruire, con riga, compasso e goniometro, un unico triangolo.



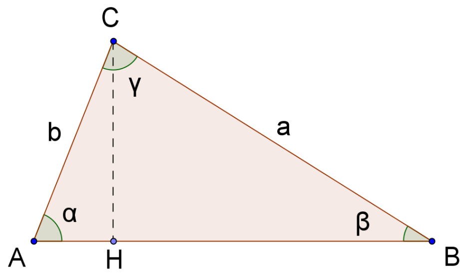




Dimostriamo due teoremi utili per la risoluzione dei triangoli qualsiasi.

Teorema dei seni

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ si ha: $\boxed{\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\gamma}}$



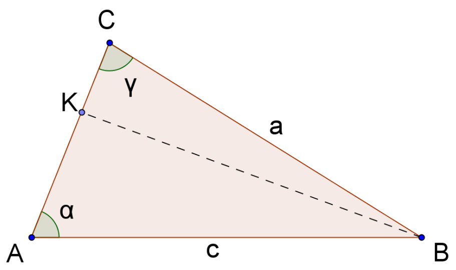
Dimostrazione
Consideriamo l'altezza CH: possiamo calcolarla in due modi

$$\overline{CH}=b\cdot sen\alpha \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{AHC}\text{)}$$

$$\overline{CH}=a\cdot sen\beta \text{ (nel triangolo } \overset{\Delta}{CHB}\text{)}$$

e quindi $a\cdot sen\beta=b\cdot sen\alpha\rightarrow\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}$

Analogamente tracciando l'altezza BK

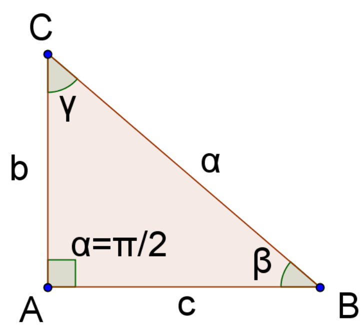


$$\left.\begin{array}{l}\overline{BK}=c\cdot sen\alpha\\ \overline{BK}=a\cdot sen\gamma\end{array}\right.\Rightarrow c\cdot sen\alpha=a\cdot sen\gamma$$

e quindi $\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{c}{sen\gamma}$

Quindi avremo che $\dfrac{a}{sen\alpha}=\dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\gamma}$

Nota: osserviamo che questo teorema vale anche per un triangolo rettangolo. Infatti se per esempio $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ abbiamo $sen\alpha=1$ e $a=\dfrac{b}{sen\beta}=\dfrac{c}{sen\gamma}$



Osservazione: possiamo calcolare quanto vale questo rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto?

Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo: i lati a, b, c possono essere considerati corde di questa circonferenza e gli angoli α, β, γ angoli alla circonferenza che insistono su queste. Avevamo dimostrato che:

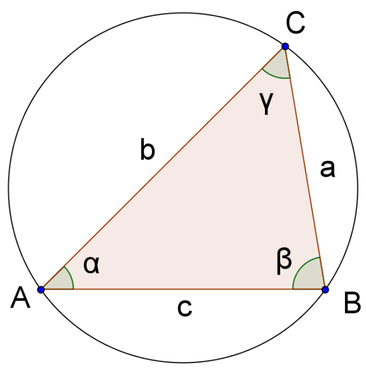
lunghezza corda = $\mathit{diametro} \cdot \mathit{seno}$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda)

e quindi

$$a = 2r \cdot sen\alpha \Rightarrow \frac{a}{sen\alpha} = 2R$$

$$b = 2r \cdot sen\beta \Rightarrow \frac{b}{sen\beta} = 2R$$

$$c = 2r \cdot sen\gamma \Rightarrow \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

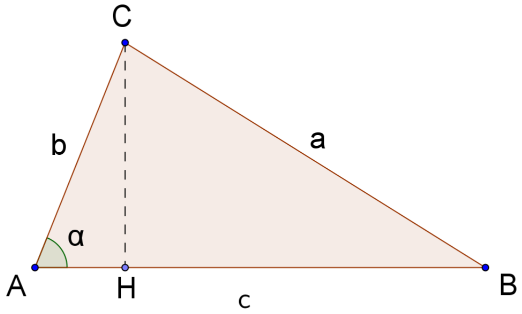


Quindi non solo abbiamo dimostrato che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è sempre lo stesso, per un dato triangolo, ma anche che è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema del coseno

In un triangolo qualsiasi $\overset{\Delta}{ABC}$ vale, per ciascun lato, la seguente relazione:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$



cioè il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto tra questi e il coseno dell'angolo compreso.

Dimostrazione

Consideriamo l'altezza CH e il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ACH}$:

avremo $\overline{CH} = b \cdot sen\alpha$

$\overline{AH} = b \cdot \cos\alpha \Rightarrow \overline{HB} = c - b \cdot \cos\alpha$

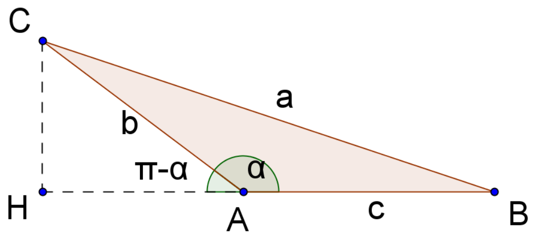
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\Delta}{CHB}$ abbiamo:

$$a^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2\left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

e quindi: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Se l'angolo α fosse ottuso avremo: $\overline{CH} = b \cdot sen(\pi - \alpha) = b \cdot sen\alpha$

$$\overline{AH} = b \cdot \cos(\pi - \alpha) = -b \cdot \cos\alpha$$



Ma poiché $\overline{HB} = \overline{AH} + AB = c - b\cos\alpha$ e quindi si ritrovano i calcoli precedenti.

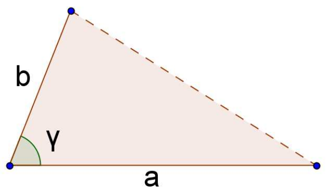
Nota: se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il teorema si riduce al teorema di Pitagora e per questo viene anche chiamato teorema di Pitagora generalizzato.

.

Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Riprendiamo la risoluzione di un triangolo.

1) Supponiamo di conoscere due lati, per esempio a e b, e l'angolo compreso γ.



Troviamo c con il teorema del coseno:

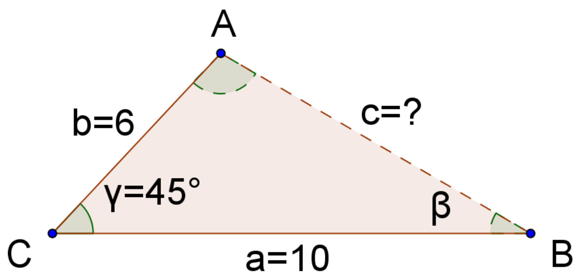
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow c = \ldots$$

Troviamo α con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma} \Rightarrow sen\alpha = \ldots \rightarrow \alpha = \ldots$$

Naturalmente $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$

Esempio: $a = 10 \quad b = 6 \quad \gamma = 45°$



$$c^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c \cong 7{,}15$$

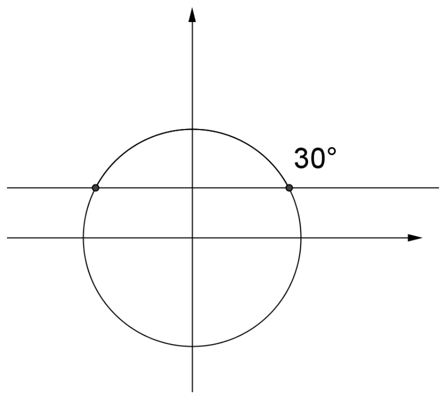
$$\frac{6}{sen\beta} = \frac{7{,}15}{sen\gamma} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}59 \Rightarrow \beta \cong 36{,}4°$$

Di conseguenza $\alpha = 180° - (45° + 36{,}4°) = 98{,}6°$

Nota

Quando usiamo la calcolatrice per trovare quale angolo ha un dato seno o un dato coseno (usando il tasto $\sin^{-1}$ o $\cos^{-1}$) dobbiamo sapere che, per definizione, $\sin^{-1}$ dà come risultati angoli tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (-90° e 90°) e $\cos^{-1}$ dà come risultati angoli tra 0 e π (0 a 180°)

Per esempio se digitiamo $\sin^{-1} 0.5$ otteniamo solo come risultato 30° ed invece sappiamo che anche 180°-30°=150° ha lo stesso seno (oltre a tutti gli angoli ottenuti con aggiungendo $2k\pi$).



Così se per esempio nel risolvere un triangolo utilizzando il teorema dei seni troviamo $sen\alpha = 0.5$ la calcolatrice ci darà solo $\alpha = 30°$ ma non è detto che questo sia il caso dell'angolo del nostro triangolo.

Ricordiamo infatti che in un triangolo con lati disuguali a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

Riprendiamo per esempio il caso del triangolo dell'esempio precedente: risolvendo $sen\beta \cong 0.59$ la calcolatrice ha fornito $\beta \cong 36.4°$. Prendiamo questo valore (e non 180°-36.4°) perché β dovrà essere minore di $\gamma = 45°$ in quanto b<c.

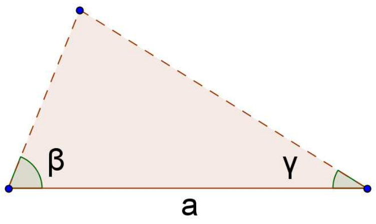
Ma se noi avessimo applicato il teorema dei seni per determinare α avremmo avuto:

$$\frac{10}{sen\alpha} = \frac{7,15}{sen45°} \Rightarrow sen\alpha \cong 0,999$$

e la calcolatrice avrebbe fornito come angolo $\alpha = 81,4°$ che ci avrebbe poi portato a $\beta = 180° - (45° + 81,4°) = 53,6°$ impossibile perché maggiore di 45°.

Quindi in questo caso 81,4° non è il nostro angolo ma dobbiamo prendere $\alpha = 180° - 81,4° = 98,6°$ che infatti ci riporta a $\beta = 180° - (45° + 98,6°) = 36,4°$.

2) Supponiamo di conoscere un lato, per esempio a , e due angoli, per esempio β e γ .



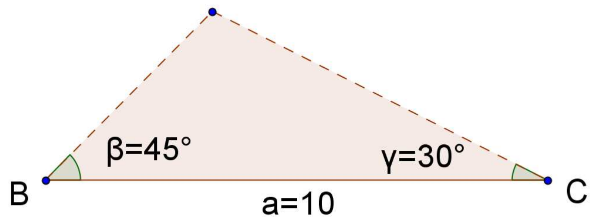
Troviamo b con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \qquad * \; sen\alpha = sen(\pi - (\beta + \gamma)) = sen(\beta + \gamma) = sen\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot sen\gamma$$

$$\Rightarrow b...$$

Analogamente troviamo c.
Naturalmente $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$.

Esempio: $a = 10 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 30°$



$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow b = \frac{20}{\sqrt{3}+1} \cong 7{,}33$$

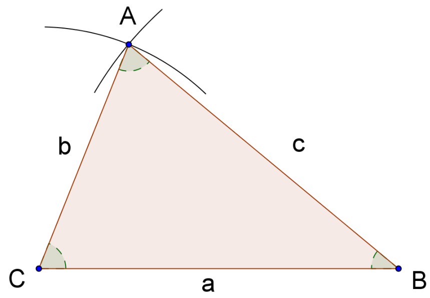
$$* \; sen\alpha = sen(\pi - (\beta + \gamma)) = sen(\beta + \gamma) = sen\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot sen\gamma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} \Rightarrow c \cong 5{,}2$$

Naturalmente $\alpha = 180° - (45° + 30°) = 105°$

3) Supponiamo di conoscere i tre lati a, b, c (ognuno minore della somma degli altri due e maggiore della differenza).



Possiamo applicare il teorema del coseno per trovare un angolo, per esempio α :

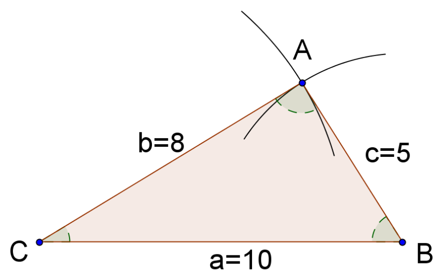
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = ... \Rightarrow \alpha = ...$$

A questo punto applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = ... \Rightarrow \beta = ...$$

Infine $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$

Esempio: $a = 10 \quad b = 8 \quad c = 5$



$$10^2 = 8^2 + 5 \quad - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha \cong -0{,}14 \Rightarrow \alpha \cong 98°$$

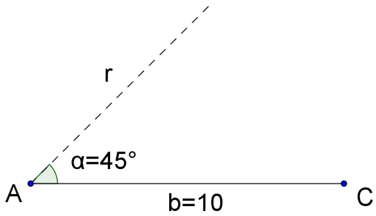
$$\frac{10}{sen98°} = \frac{8}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta \cong 0{,}792 \Rightarrow \beta \cong 52{,}4°$$

Naturalmente $\gamma = 180° - (52{,}4° + 98°) = 29{,}6°$

Problema

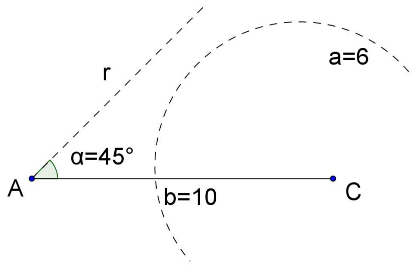
Se conosciamo due lati, per esempio a e b , e l'angolo opposto ad uno di essi, per esempio α , possiamo individuare il triangolo?

Proviamo a disegnare il lato b e l'angolo α considerando per esempio b=10 $\alpha = 45°$.

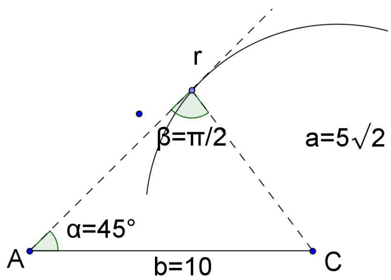


Per tracciare il lato a possiamo puntare il compasso in C con apertura a e ci sono vari casi:

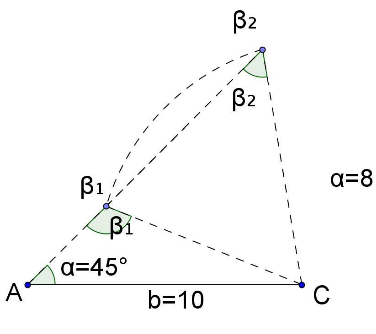
- la circonferenza non interseca la semiretta r e quindi non si ottiene nessun triangolo (per esempio nella figura $a = 6$)



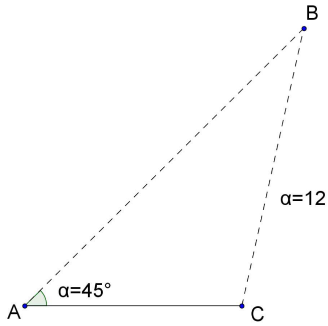
- la circonferenza è tangente alla semiretta e quindi si trova un triangolo rettangolo $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$ e in questo caso si ha $a = b \cdot sen\alpha$ (infatti in figura $a = 10 \cdot sen\frac{\pi}{4} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \cdot \sqrt{2}$).



- la circonferenza è secante con la semiretta in due punti e ci sono 2 triangoli (in figura $a = 8$)



- la circonferenza taglia la semiretta in un solo punto (e interseca in un altro punto il suo prolungamento) e quindi trovo 1 triangolo (in figura $a = 12$)



Infatti applicando il teorema dei seni ho:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = \frac{b \cdot sen\alpha}{a}$$

e quindi abbiamo:

se $sen\beta > 1$ cioè $a < b \cdot sen\alpha$ non si trova nessun β;

se $sen\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$ e $a = b \cdot sen\alpha$ abbiamo 1 triangolo (rettangolo);

se $sen\beta < 1$ i sono due casi: se $b \cdot sen\alpha < a < b$ abbiamo due triangoli oppure se $a \geq b$ 1 solo triangolo.

Infatti se per esempio a=8 (caso in cui $b \cdot sen\alpha < a < b$) abbiamo:

$$\frac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{10}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = \frac{10}{8\sqrt{2}} (\cong 0{,}886)$$

$$\beta_1 \cong 62°$$

$$\beta_2 \cong 117{,}5°$$

abbiamo 2 triangoli

Se invece a=12 $(a > b)$ abbiamo

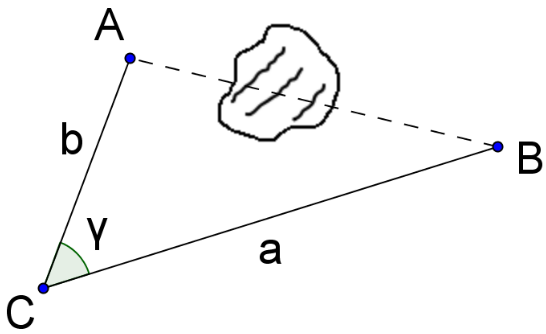
$$\frac{12}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{10}{sen\beta} \rightarrow sen\beta = \frac{10}{12\sqrt{2}} (\cong 0{,}59) \rightarrow \beta_1 \cong 36{,}2° (\beta_2 \cong 143° non..acc.)$$

abbiamo 1 triangolo

Applicazioni

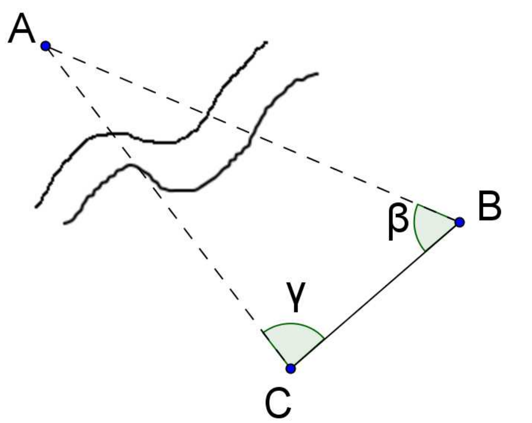
La risoluzione di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi è importante per la topografia.

1) Supponiamo per esempio di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo ma entrambi "accessibili". Posso prendere un 3° punto C, misurare $\overline{AC}, \overline{BC}$ e l'angolo γ.



Quindi conosco, del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, 2 lati e l'angolo compreso. Posso determinare $\overline{AB} = c$.

2) Supponiamo di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo e di cui solo un punto sia "accessibile" (B). Posso fissare un terzo punto C, misurare $\overline{BC}$ e gli angoli β e γ.



Quindi conosco, nel triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, un lato e i due angoli adiacenti. Il triangolo si può "risolvere" e posso determinare $\overline{AB}$.

PROBLEMI
TRIANGOLI QUALSIASI

1) Risolvi e costruisci con riga, compasso e goniometro oppure con il software Geogebra i seguenti triangoli:

a. $a = 8 \quad b = 4 \quad \gamma = 30°$ $\quad [c \cong 5 \quad \alpha \cong 126{,}9° \quad \beta \cong 23{,}1°]$

b. $a = 8 \quad \beta = 60° \quad \gamma = 45°$ $\quad [b \cong 7{,}2 \quad c \cong 5{,}9 \quad \alpha \cong 75°]$

c. $a = 5 \quad b = 10 \quad c = 9$ $\quad [\alpha = 29{,}9° \quad \beta = 85{,}5° \quad \gamma = 64{,}6°]$

d. $a = 8 \quad b = 5 \quad \gamma = 60°$ $\quad [c = 7 \quad \alpha \cong 81{,}3° \quad \beta \cong 38{,}7°]$

e. $a = 5 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 30°$ $\quad [b \cong 3{,}7 \quad c \cong 2{,}6 \quad \alpha \cong 105°]$

f. $a = 8 \quad b = 10 \quad c = 5$ $\quad [\alpha \cong 52{,}4° \quad \beta \cong 98° \quad \gamma = 29{,}6°]$

g. $a = 10 \quad b = 12 \quad \gamma = 30°$ $\quad [c \cong 6 \quad \alpha \cong 56{,}4° \quad \beta \cong 93{,}6°]$

2) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma sono entrambi accessibili. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{AC} = 48$ metri, $\overline{BC} = 40$ metri e $A\hat{C}B = 40°$ Determina $\overline{A\mathbf{B}}$.

[$\overline{AB} \cong 31$ metri]

3) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma solo B è accessibile. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{BC} = 100$ metri, $A\hat{B}C = 50°$, $A\hat{C}B = 70°$. Determina $\overline{AB}$.

[$\overline{AB} \cong 108{,}5$ metri]

4) Si può costruire un triangolo con b=10 , $\alpha = 60°$ e a = 8 ?

[no]

5) Fissati b=10 e $\alpha = 60°$ qual è il minimo valore di a per cui si può costruire un triangolo? Come risulta il triangolo?

[$a = 5\sqrt{3}$]

6) Risolvi il triangolo con b=10 $\alpha = 60°$, a =9.

$$\begin{bmatrix} c_1 \cong 7{,}5 & \beta_1 \cong 74° & \gamma_1 = 46° \\ c_2 \cong 2{,}5 & \beta_2 \cong 106° & \gamma_2 = 14° \end{bmatrix}$$

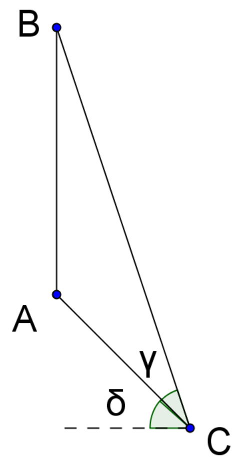
7) Risolvi il triangolo con b=10, $\alpha = 60°$, a=10.

[triangolo equilatero c=10, $\beta = \gamma = 60°$]

8) Risolvi il triangolo con $b = 10$ $\alpha = 60°$ $a = 12$ e disegnalo.

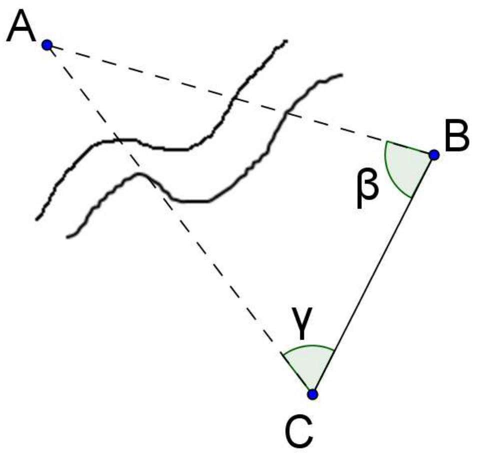
$[c \cong 13{,}3 \quad \beta \cong 46° \quad \gamma \cong 74°]$

9) Una torre AB si trova su un pendio: determina $\overline{AB}$ sapendo che AC=10m, $\gamma = 30°, \delta = 45°$.



$[\overline{AB} = 19{,}3m]$

10) Due punti A e B si trovano sulle rive opposte di un fiume. Prendendo un punto C dalla parte B si misura $\overline{BC} = 50m$ $\beta = 76°$ $\gamma = 63°$. Determina $\overline{AB}$.



$[\overline{AB} \cong 68m]$

SCHEDA DI VERIFICA
TRIANGOLI QUALSIASI

1) In un triangolo si ha $a = 10 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 60°$. Disegna il triangolo con riga e compasso e determina gli elementi mancanti.

$[b \cong 7{,}32;\ c \cong 8{,}97;\ \alpha = 75°]$

2) Sapendo che $a = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ il triangolo è univocamente determinato? Risolvi e disegna.

$[c_1 = 10 \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \ \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad c_2 = 5 \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}\pi \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{6}]$

3) Determina la distanza $\overline{AB}$ tra due punti entrambi accessibili sapendo che, preso un terzo punto C, $\overline{BC} = 50m$, $\overline{AC} = 30m$, $tg\, A\hat{C}B = \frac{3}{4}$.

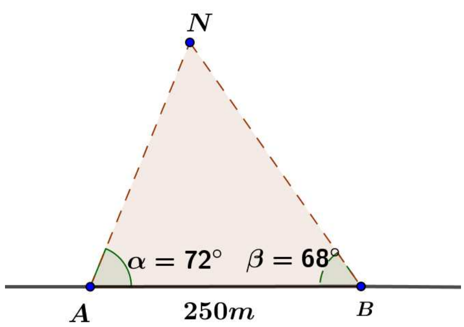
$[\overline{AB} \cong 31{,}62m]$

4) Risolvi il triangolo avente $a = 8 \ \ b = 5 \ \ c = 10$ e disegnalo.

$[\alpha \cong 52{,}44°,\ \beta \cong 29{,}7°,\ \gamma \cong 97{,}86°]$

5) Come potresti misurare l'altezza di una torre $\overline{AB}$ nel caso in cui la base A della torre non si possa raggiungere (si dice base inaccessibile) ma si trovi comunque su un terreno pianeggiante? (suggerimento: fissa un segmento $\overline{CD}$ sul piano orizzontale dove si trova la base A della torre e "traguarda" dai suoi estremi la cima della torre….).

6) Una nave N si trova a distanza *d* dalla costa (rettilinea): se da un osservatore sulla costa viene misurato $\alpha = 72°$, $\beta = 68°$ e $\overline{AB} = 250m$ (vedi figura), determina la distanza *d* della nave dalla costa.



$[d \cong 343m]$

7) Dimostra che l'area di un quadrilatero si può calcolare con la seguente formula

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot sen\alpha$$

dove d_1 e d_2 sono la lunghezza delle diagonali e α è uno degli angoli formati dalle diagonali (è indifferente quale angolo si consideri).

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE E TRIANGOLI QUALSIASI

I) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche

1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

2. $tg^2 x - 3 \geq 0$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

3. $senx - \sqrt{3}\cos x < \sqrt{3}$ $\left[-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

4. $\dfrac{1 - tg^2 x}{\sqrt{3}senx - \cos x} > 0$

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$$

5. $2sen^2 x + \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} sen2x > 1$ $[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi]$

II) Risolvi i seguenti problemi:

1) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $AC = 50m$, $BC = 70m$, $\cos A\hat{C}B = \frac{1}{2}$. Determina $\overline{AB}$.

$\left[\overline{AB} = 62{,}5m\right]$

2) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo una posizione C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 12Km$, $C\hat{B}A = \frac{\pi}{3}$, $tg\left(A\hat{C}B\right) = 2$, determina $\overline{AB}$.

$[\overline{AB} \cong 12{,}96 \text{ km}]$

3) Determina e disegna il triangolo (o i triangoli) aventi, usando le consuete convenzioni, $a = 6$, $b = 5$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$\left[\beta \cong 46{,}2°, \quad \gamma \cong 73{,}8°, \quad c \cong 6{,}65\right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
TRIANGOLO RETTANGOLO E TRIANGOLI QUALSIASI

1) In un triangolo isoscele ABC, la base $\overline{AB} = 10a$ e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo ABC.

$$\left[2p = \frac{80}{3}a; \quad A = \frac{100}{3}a^2\right]$$

2) In un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ si ha $tg\alpha = 3$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo.

$$\left[2p = 2\cdot\left(1+\sqrt{10}\right)a; \quad A = 3a^2\right]$$

3) In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo misura *l*, la base minore $\overline{CD} = 2l$ e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha =$ angolo adiacente alla base maggiore). Determina perimetro e area del trapezio.

$$\left[2p = \frac{38}{5}l; \quad A = \frac{42}{25}l^2\right]$$

4) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $\overline{AC} = 30 \quad m$; $\overline{BC} = 25 \quad m$; $\cos\left(A\hat{C}B\right) = \frac{1}{3}$. Determina $\overline{AB}$.

$$\left[\overline{AB} \cong 32 \quad m\right]$$

5) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo un punto C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 40 \quad m$; $C\hat{B}A = \frac{\pi}{4}$; $tg\left(A\hat{C}B\right) = 2$, determina $\overline{AB}$.

$$\left[\overline{AB} \cong 37{,}6 \quad m\right]$$

6) Considera un triangolo ABC in cui $\overline{BC} = 10$, $\hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 120°$. Determina perimetro e area.

$$\left[2p = 20 + 10\sqrt{3}; \quad A = 25\sqrt{3}\right]$$