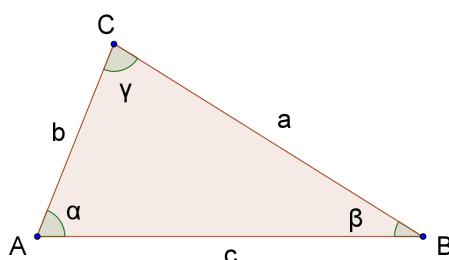


Triangoli qualsiasi



Consideriamo un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ e adottiamo la seguente notazione: nel vertice A l'angolo è α , nel vertice $B \rightarrow \beta$, nel vertice $C \rightarrow \gamma$ e indichiamo con a il lato opposto ad A , con b quello opposto a B e con c quello opposto a C .

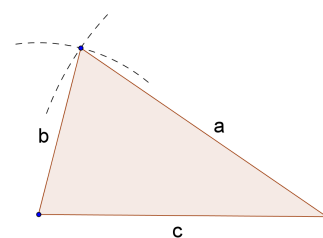
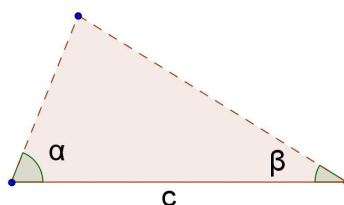
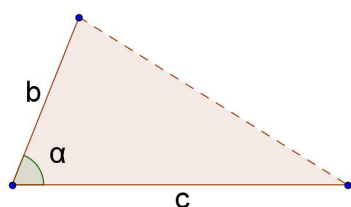


Risolvere un triangolo significa determinare, dalla conoscenza di alcuni elementi, tutti gli altri elementi (lati, angoli). Ricordiamo che, grazie ai criteri di congruenza dei triangoli, un triangolo è determinato se si assegnano:

- 1) due lati e l'angolo compreso;
- 2) un lato e due angoli;
- 3) i tre lati (purché naturalmente sia rispettata la relazione che ciascun lato sia minore della somma degli altri due)

Nota: se ordiniamo i lati in modo decrescente cioè se per esempio $a \geq b \geq c$ basterà verificare che $a < b + c$ poiché per b e c sarà verificato sicuramente.

Infatti in ognuno di questi casi è possibile costruire, con riga, compasso e goniometro, un unico triangolo.



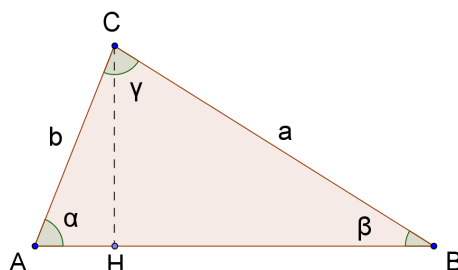
Triangoli qualsiasi

Dimostriamo due teoremi utili per la risoluzione dei triangoli qualsiasi.

Teorema dei seni

In un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$



Dimostrazione

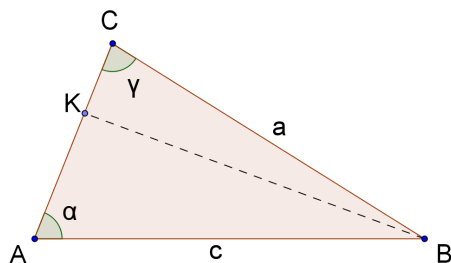
Consideriamo l'altezza CH: possiamo calcolarla in due modi

$$\overline{CH} = b \cdot \operatorname{sen}\alpha \quad (\text{nel triangolo } \triangle AHC)$$

$$\overline{CH} = a \cdot \operatorname{sen}\beta \quad (\text{nel triangolo } \triangle CHB)$$

e quindi $a \cdot \operatorname{sen}\beta = b \cdot \operatorname{sen}\alpha \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$

Analogamente tracciando l'altezza BK

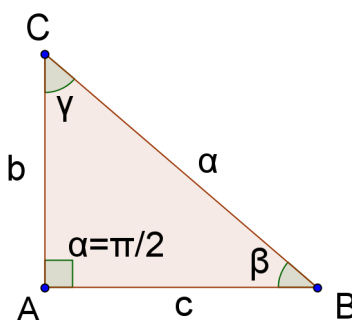


$$\begin{aligned} \overline{BK} &= c \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ \overline{BK} &= a \cdot \operatorname{sen}\gamma \end{aligned} \Rightarrow c \cdot \operatorname{sen}\alpha = a \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

e quindi $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

Quindi avremo che $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

Nota: osserviamo che questo teorema vale anche per un triangolo rettangolo. Infatti se per esempio $\alpha = \frac{\pi}{2}$ abbiamo $\operatorname{sen}\alpha = 1$ e $a = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$



Triangoli qualsiasi

Osservazione: possiamo calcolare quanto vale questo rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto?

Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo: i lati a, b, c possono essere considerati corde di questa circonferenza e gli angoli α, β, γ angoli alla circonferenza che insistono su queste. Avevamo dimostrato che:

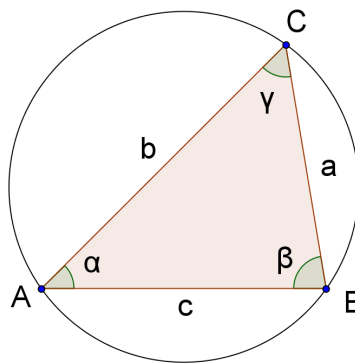
lunghezza corda = *diametro* · seno (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda)

e quindi

$$a = 2r \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\alpha} = 2R$$

$$b = 2r \cdot \text{sen}\beta \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\beta} = 2R$$

$$c = 2r \cdot \text{sen}\gamma \Rightarrow \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R$$

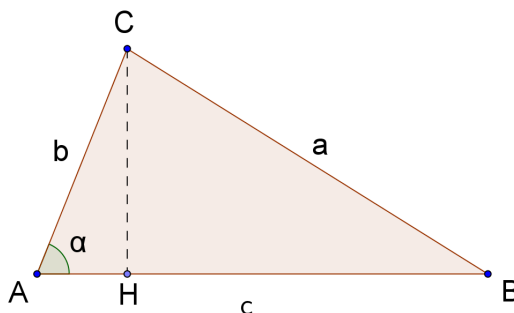


Quindi non solo abbiamo dimostrato che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è sempre lo stesso, per un dato triangolo, ma anche che è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema del coseno

In un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ vale, per ciascun lato, la seguente relazione:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$



cioè il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto tra questi e il coseno dell'angolo compreso.

Dimostrazione

Consideriamo l'altezza CH e il triangolo rettangolo $\triangle ACH$:

$$\begin{aligned} \text{avremo } \overline{CH} &= b \cdot \sin \alpha \\ \overline{AH} &= b \cdot \cos \alpha \Rightarrow \overline{HB} = c - b \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

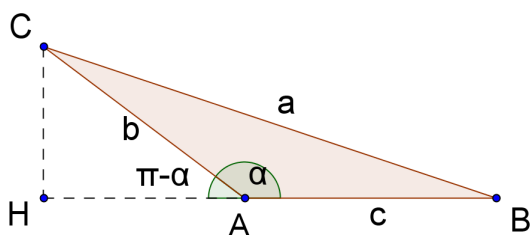
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle CHB$ abbiamo:

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \\ a^2 &= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

e quindi:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Se l'angolo α fosse ottuso avremo: $\overline{CH} = b \cdot \sin(\pi - \alpha) = b \cdot \sin \alpha$

$$\overline{AH} = b \cdot \cos(\pi - \alpha) = -b \cdot \cos \alpha$$



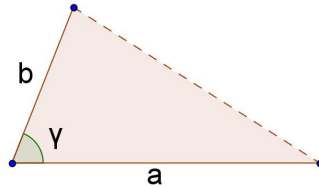
Ma poiché $\overline{HB} = \overline{AH} + \overline{AB} = c - b \cos \alpha$ e quindi si ritrovano i calcoli precedenti.

Nota: se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il teorema si riduce al teorema di Pitagora e per questo viene anche chiamato teorema di Pitagora generalizzato.

Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Riprendiamo la risoluzione di un triangolo.

1) Supponiamo di conoscere due lati, per esempio a e b , e l'angolo compreso γ .



Troviamo c con il teorema del coseno:

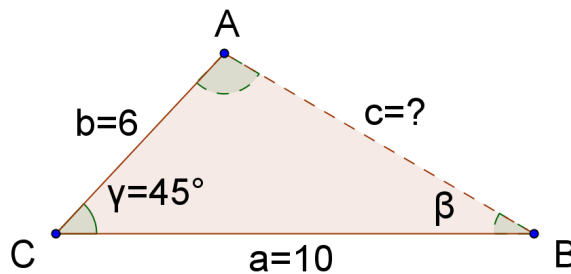
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \Rightarrow c = \dots$$

Troviamo α con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \dots \rightarrow \alpha = \dots$$

Naturalmente $\beta = \pi - (\alpha + \gamma)$

Esempio: $a = 10$ $b = 6$ $\gamma = 45^\circ$



$$c^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c \cong 7,15$$

$$\frac{6}{\sin \beta} = \frac{7,15}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \beta \cong 0,59 \Rightarrow \beta \cong 36,4^\circ$$

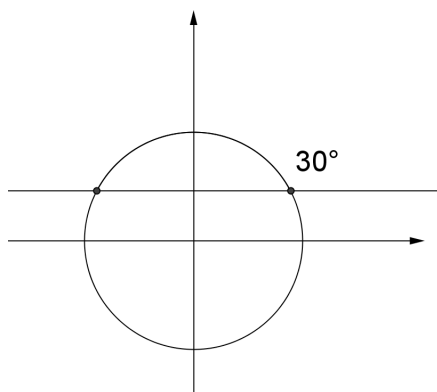
Di conseguenza $\alpha = 180^\circ - (45^\circ + 36,4^\circ) = 98,6^\circ$

Triangoli qualsiasi

Nota

Quando usiamo la calcolatrice per trovare quale angolo ha un dato seno o un dato coseno (usando il tasto \sin^{-1} o \cos^{-1}) dobbiamo sapere che, per definizione, \sin^{-1} dà come risultati angoli tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (-90° e 90°) e \cos^{-1} dà come risultati angoli tra 0 e π (0 a 180°)

Per esempio se digitiamo $\sin^{-1}0.5$ otteniamo solo come risultato 30° ed invece sappiamo che anche $180^\circ-30^\circ=150^\circ$ ha lo stesso seno (oltre a tutti gli angoli ottenuti con aggiungendo $2k\pi$).



Così se per esempio nel risolvere un triangolo utilizzando il teorema dei seni troviamo $\text{sen}\alpha = 0.5$ la calcolatrice ci darà solo $\alpha = 30^\circ$ ma non è detto che questo sia il caso dell'angolo del nostro triangolo.

Ricordiamo infatti che in un triangolo con lati disuguali a lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

Riprendiamo per esempio il caso del triangolo dell'esempio precedente: risolvendo $\text{sen}\beta \cong 0.59$ la calcolatrice ha fornito $\beta \cong 36.4^\circ$. Prendiamo questo valore (e non $180^\circ-36.4^\circ$) perché β dovrà essere minore di $\gamma = 45^\circ$ in quanto $b < c$.

Ma se noi avessimo applicato il teorema dei seni per determinare α avremmo avuto:

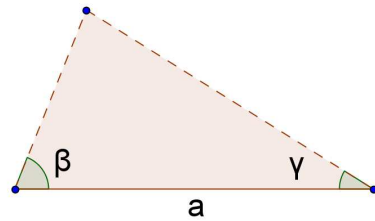
$$\frac{10}{\text{sen}\alpha} = \frac{7,15}{\text{sen}45^\circ} \Rightarrow \text{sen}\alpha \cong 0,999$$

e la calcolatrice avrebbe fornito come angolo $\alpha = 81,4^\circ$ che ci avrebbe poi portato a $\beta = 180^\circ - (45^\circ + 81,4^\circ) = 53,6^\circ$ impossibile perché maggiore di 45° .

Quindi in questo caso $81,4^\circ$ non è il nostro angolo ma dobbiamo prendere $\alpha = 180^\circ - 81,4^\circ = 98,6^\circ$ che infatti ci riporta a $\beta = 180^\circ - (45^\circ + 98,6^\circ) = 36,4^\circ$.

Triangoli qualsiasi

2) Supponiamo di conoscere un lato, per esempio a , e due angoli, per esempio β e γ .



Troviamo b con il teorema dei seni:

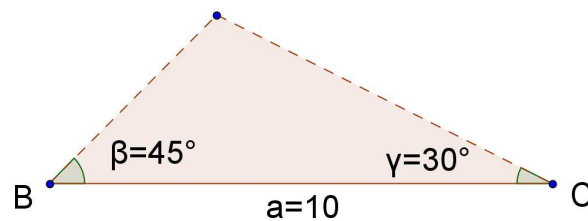
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad * \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - (\beta + \gamma)) = \operatorname{sen}(\beta + \gamma) = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

$\Rightarrow b \dots$

Analogamente troviamo c .

Naturalmente $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$.

Esempio: $a = 10$ $\beta = 45^\circ$ $\gamma = 30^\circ$



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow b = \frac{20}{\sqrt{3}+1} \cong 7,33$$

$$* \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - (\beta + \gamma)) = \operatorname{sen}(\beta + \gamma) = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma =$$

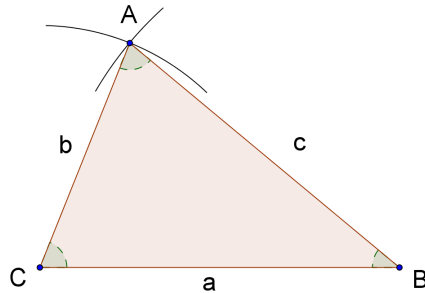
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow c \cong 5,2$$

Naturalmente $\alpha = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$

Triangoli qualsiasi

- 3) Supponiamo di conoscere i tre lati a, b, c (ognuno minore della somma degli altri due e maggiore della differenza).



Possiamo applicare il teorema del coseno per trovare un angolo, per esempio α :

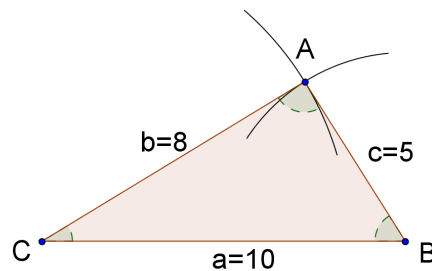
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \dots \Rightarrow \alpha = \dots$$

A questo punto applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \dots \Rightarrow \beta = \dots$$

Infine $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$

Esempio: $a = 10$ $b = 8$ $c = 5$



$$10^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha \cong -0,14 \Rightarrow \alpha \cong 98^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 98^\circ} = \frac{8}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta \cong 0,792 \Rightarrow \beta \cong 52,4^\circ$$

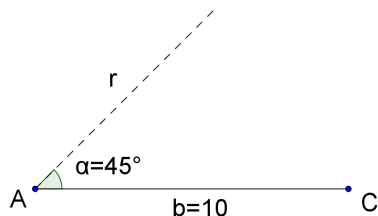
Naturalmente $\gamma = 180^\circ - (52,4^\circ + 98^\circ) = 29,6^\circ$

Triangoli qualsiasi

Problema

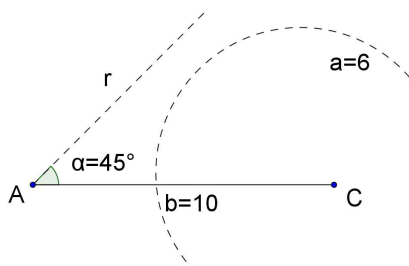
Se conosciamo due lati, per esempio a e b , e l'angolo opposto ad uno di essi, per esempio α , possiamo individuare il triangolo?

Proviamo a disegnare il lato b e l'angolo α considerando per esempio $b=10$ $\alpha = 45^\circ$.

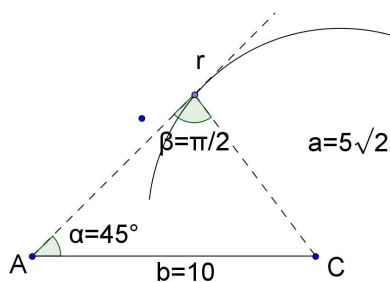


Per tracciare il lato a possiamo puntare il compasso in C con apertura a e ci sono vari casi:

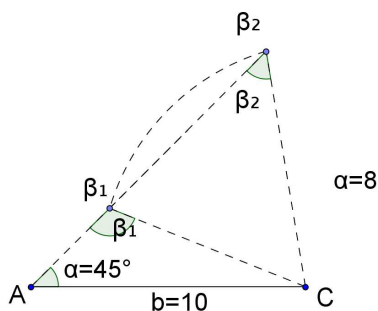
- la circonferenza non interseca la semiretta r e quindi non si ottiene nessun triangolo (per esempio nella figura $a = 6$)



- la circonferenza è tangente alla semiretta e quindi si trova un triangolo rettangolo ($\beta = \frac{\pi}{2}$) e in questo caso si ha $a = b \cdot \text{sen} \alpha$ (infatti in figura $a = 10 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{4} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 \cdot \sqrt{2}$).

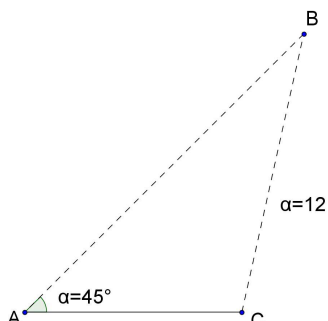


- la circonferenza è secante con la semiretta in due punti e ci sono 2 triangoli (in figura $a = 8$)



Triangoli qualsiasi

- la circonferenza taglia la semiretta in un solo punto (e interseca in un altro punto il suo prolungamento) e quindi trovo 1 triangolo (in figura $a = 12$)



Infatti applicando il teorema dei seni ho:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

e quindi abbiamo:

se $\sin \beta > 1$ cioè $a < b \cdot \sin \alpha$ non si trova nessun β ;

se $\sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$ e $a = b \cdot \sin \alpha$ abbiamo 1 triangolo (rettangolo);

se $\sin \beta < 1$ i sono due casi: se $b \cdot \sin \alpha < a < b$ abbiamo due triangoli oppure se $a \geq b$ 1 solo triangolo.

Infatti se per esempio $a=8$ (caso in cui $b \cdot \sin \alpha < a < b$) abbiamo:

$$\frac{8}{1} = \frac{10}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{10}{8\sqrt{2}} (\cong 0,886)$$

$$\beta_1 \cong 62^\circ$$

$$\beta_2 \cong 117,5^\circ$$

abbiamo 2 triangoli

Se invece $a=12$ ($a > b$) abbiamo

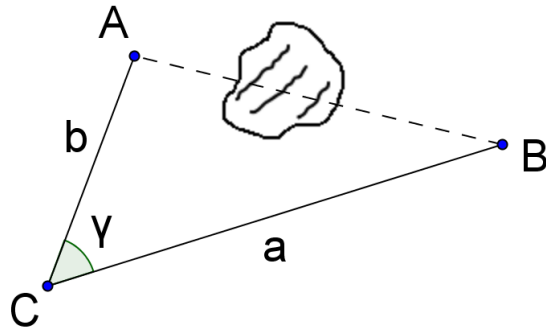
$$\frac{12}{1} = \frac{10}{\sin \beta} \rightarrow \sin \beta = \frac{10}{12\sqrt{2}} (\cong 0,59) \rightarrow \beta_1 \cong 36,2^\circ (\beta_2 \cong 143^\circ \text{ non..acc.})$$

abbiamo 1 triangolo

Applicazioni

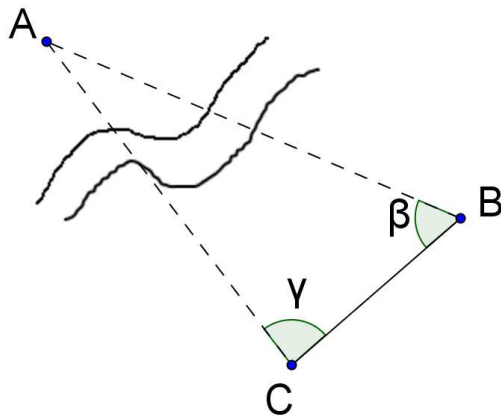
La risoluzione di un triangolo di cui si conoscono solo alcuni elementi è importante per la topografia.

- 1) Supponiamo per esempio di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo ma entrambi “accessibili”. Posso prendere un 3° punto C, misurare \overline{AC} , \overline{BC} e l’angolo γ .



Quindi conosco, del triangolo $\triangle ABC$, 2 lati e l’angolo compreso. Posso determinare $\overline{AB} = c$.

- 2) Supponiamo di voler determinare la distanza tra due punti A, B separati da un ostacolo e di cui solo un punto sia “accessibile” (B). Posso fissare un terzo punto C, misurare \overline{BC} e gli angoli β e γ .



Quindi conosco, nel triangolo $\triangle ABC$, un lato e i due angoli adiacenti. Il triangolo si può “risolvere” e posso determinare \overline{AB} .

Triangoli qualsiasi

PROBLEMI
TRIANGOLI QUALSIASI

1) Risolvi e costruisci con riga, compasso e goniometro oppure con il software Geogebra i seguenti triangoli:

- a. $a = 8 \quad b = 4 \quad \gamma = 30^\circ$ $[c \cong 5 \quad \alpha \cong 126,9^\circ \quad \beta \cong 23,1^\circ]$
- b. $a = 8 \quad \beta = 60^\circ \quad \gamma = 45^\circ$ $[b \cong 7,2 \quad c \cong 5,9 \quad \alpha \cong 75^\circ]$
- c. $a = 5 \quad b = 10 \quad c = 9$ $[\alpha = 29,9^\circ \quad \beta = 85,5^\circ \quad \gamma = 64,6^\circ]$
- d. $a = 8 \quad b = 5 \quad \gamma = 60^\circ$ $[c = 7 \quad \alpha \cong 81,3^\circ \quad \beta \cong 38,7^\circ]$
- e. $a = 5 \quad \beta = 45^\circ \quad \gamma = 30^\circ$ $[b \cong 3,7 \quad c \cong 2,6 \quad \alpha \cong 105^\circ]$
- f. $a = 8 \quad b = 10 \quad c = 5$ $[\alpha \cong 52,4^\circ \quad \beta \cong 98^\circ \quad \gamma = 29,6^\circ]$
- g. $a = 10 \quad b = 12 \quad \gamma = 30^\circ$ $[c \cong 6 \quad \alpha \cong 56,4^\circ \quad \beta \cong 93,6^\circ]$

2) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma sono entrambi accessibili. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{AC} = 48$ metri, $\overline{BC} = 40$ metri e $\hat{ACB} = 40^\circ$. Determina \overline{AB} .

$$[\overline{AB} \cong 31 \text{ metri}]$$

3) Due punti A e B sono separati da un ostacolo ma solo B è accessibile. Fissato un terzo punto C si ha $\overline{BC} = 100$ metri, $\hat{ABC} = 50^\circ$, $\hat{ACB} = 70^\circ$. Determina \overline{AB} .

$$[\overline{AB} \cong 108,5 \text{ metri}]$$

4) Si può costruire un triangolo con $b=10$, $\alpha = 60^\circ$ e $a = 8$?

[no]

5) Fissati $b=10$ e $\alpha = 60^\circ$ qual è il minimo valore di a per cui si può costruire un triangolo? Come risulta il triangolo?

$$[a = 5\sqrt{3}]$$

6) Risolvi il triangolo con $b=10$, $\alpha = 60^\circ$, $a = 9$.

$$\begin{bmatrix} c_1 \cong 7,5 & \beta_1 \cong 74^\circ & \gamma_1 = 46^\circ \\ c_2 \cong 2,5 & \beta_2 \cong 106^\circ & \gamma_2 = 14^\circ \end{bmatrix}$$

Triangoli qualsiasi

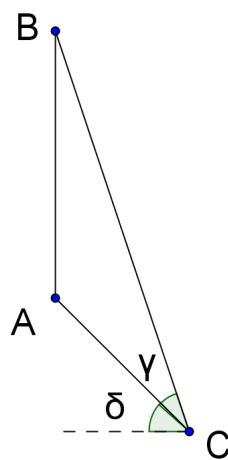
7) Risolvi il triangolo con $b=10$, $\alpha = 60^\circ$, $a=10$.

[triangolo equilatero $c=10$, $\beta = \gamma = 60^\circ$]

8) Risolvi il triangolo con $b = 10$ $\alpha = 60^\circ$ $a = 12$ e disegnalo.

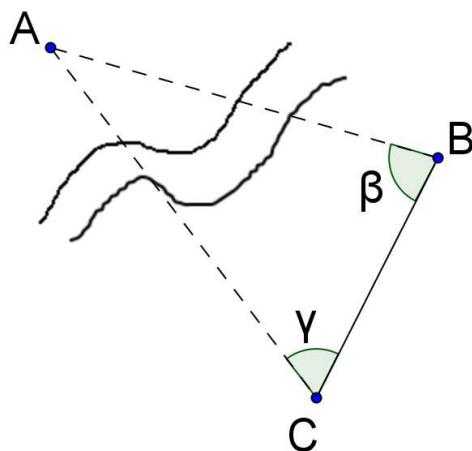
[$c \cong 13,3$ $\beta \cong 46^\circ$ $\gamma \cong 74^\circ$]

9) Una torre AB si trova su un pendio: determina \overline{AB} sapendo che $AC=10m$, $\gamma = 30^\circ$, $\delta = 45^\circ$.



[$\overline{AB} = 19,3m$]

10) Due punti A e B si trovano sulle rive opposte di un fiume. Prendendo un punto C dalla parte B si misura $\overline{BC} = 50m$ $\beta = 76^\circ$ $\gamma = 63^\circ$. Determina \overline{AB} .



[$\overline{AB} \cong 68m$]

SCHEDA DI VERIFICA
TRIANGOLI QUALSIASI

- 1) In un triangolo si ha $a = 10$ $\beta = 45^\circ$ $\gamma = 60^\circ$. Disegna il triangolo con riga e compasso e determina gli elementi mancanti.

$$[b \cong 7,32; c \cong 8,97; \alpha = 75^\circ]$$

- 2) Sapendo che $a = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ il triangolo è univocamente determinato? Risolvi e disegna.

$$[c_1 = 10 \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad c_2 = 5 \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}\pi \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{6}]$$

- 3) Determina la distanza \overline{AB} tra due punti entrambi accessibili sapendo che, preso un terzo punto C, $\overline{BC} = 50m$, $\overline{AC} = 30m$, $\hat{ACB} = \frac{3}{4}$.

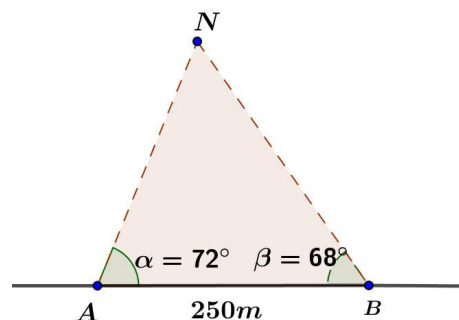
$$[\overline{AB} \cong 31,62m]$$

- 4) Risolvi il triangolo avente $a = 4$ $b = \frac{5}{2}$ $c = 5$ e disegnalo.

$$[\alpha \cong 52,44^\circ, \beta \cong 29,7^\circ, \gamma \cong 97,86^\circ]$$

- 5) Come potresti misurare l'altezza di una torre \overline{AB} nel caso in cui la base A della torre non si possa raggiungere (si dice base inaccessibile) ma si trovi comunque su un terreno pianeggiante? (suggerimento: fissa un segmento \overline{CD} sul piano orizzontale dove si trova la base A della torre e "traguarda" dai suoi estremi la cima della torre....).

- 6) Una nave N si trova a distanza d dalla costa (rettilinea): se da un osservatore sulla costa viene misurato $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 68^\circ$ e $\overline{AB} = 250m$ (vedi figura), determina la distanza d della nave dalla costa.



$$[d \cong 343m]$$

- 7) Dimostra che l'area di un quadrilatero si può calcolare con la seguente formula

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \text{sen} \alpha$$

dove d_1 e d_2 sono la lunghezza delle diagonali e α è uno degli angoli formati dalle diagonali (è indifferente quale angolo si consideri).

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE E TRIANGOLI QUALSIASI

I) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche

$$1. \quad 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 \leq 0 \quad \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

$$2. \quad \operatorname{tg}^2 x - 3 \geq 0 \quad \left[\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$$

$$3. \quad \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x < \sqrt{3} \quad \left[-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right]$$

$$4. \quad \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x} > 0$$

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \cup \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right]$$

$$5. \quad 2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 2x > 1 \quad \left[\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi \right]$$

II) Risolvi i seguenti problemi:

- 1) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $AC = 50m$, $BC = 70m$, $\cos \hat{ACB} = \frac{1}{2}$. Determina \overline{AB} .

$$[\overline{AB} = 62,5m]$$

- 2) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo una posizione C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 12Km$, $\hat{CBA} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}(\hat{ACB}) = 2$, determina \overline{AB} .

$$[\overline{AB} \cong 12,96 \text{ km}]$$

- 3) Determina e disegna il triangolo (o i triangoli) aventi, usando le consuete convenzioni, $a = 6$, $b = 5$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$$[\beta \cong 46,2^\circ, \quad \gamma \cong 73,8^\circ, \quad c \cong 6,65]$$

SCHEDA PER IL RECUPERO
TRIANGOLO RETTANGOLO E TRIANGOLI QUALSIASI

1) In un triangolo isoscele ABC, la base $\overline{AB} = 10a$ e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = \hat{A}BC$). Determina perimetro e area del triangolo ABC.

$$\left[2p = \frac{80}{3}a; \quad A = \frac{100}{3}a^2 \right]$$

2) In un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ si ha $\operatorname{tg} \alpha = 3$ ($\alpha = \hat{A}BC$). Determina perimetro e area del triangolo.

$$\left[2p = 2 \cdot (1 + \sqrt{10})a; \quad A = 3a^2 \right]$$

3) In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo misura l , la base minore $\overline{CD} = 2l$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha =$ angolo adiacente alla base maggiore). Determina perimetro e area del trapezio.

$$\left[2p = \frac{38}{5}l; \quad A = \frac{42}{25}l^2 \right]$$

4) Due località A e B sono separate da un ostacolo ma entrambe sono accessibili: si fissa un punto C e si misura $\overline{AC} = 30 \text{ m}$; $\overline{BC} = 25 \text{ m}$; $\cos(\hat{A}CB) = \frac{1}{3}$. Determina \overline{AB} .

$$\left[\overline{AB} \cong 32 \text{ m} \right]$$

5) Due località A e B sono separate da un torrente. Se prendiamo un punto C dalla parte di B e misuriamo $\overline{BC} = 40 \text{ m}$; $\hat{C}BA = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg}(\hat{A}CB) = 2$, determina \overline{AB} .

$$\left[\overline{AB} \cong 37,6 \text{ m} \right]$$

6) Considera un triangolo ABC in cui $\overline{BC} = 10$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$. Determina perimetro e area.

$$\left[2p = 20 + 10\sqrt{3}; \quad A = 25\sqrt{3} \right]$$