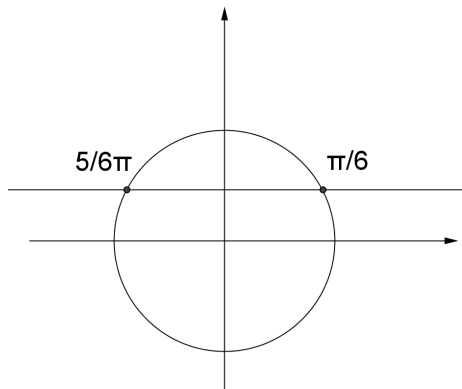


Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari

a) Consideriamo per esempio l'equazione "elementare" $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

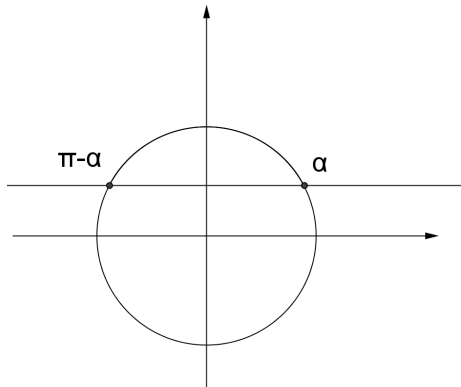


Le soluzioni saranno:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $\operatorname{sen} x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:



$$x = \alpha + 2k\pi$$

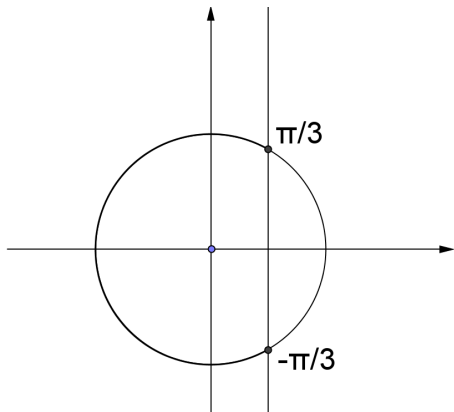
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Se considero $\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Equazioni goniometriche

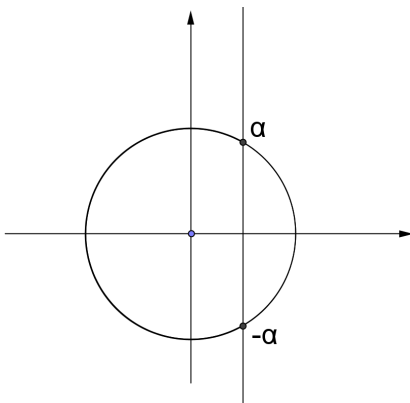
b) Consideriamo l'equazione elementare $\cos x = \frac{1}{2}$.



$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $\cos x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo come soluzioni

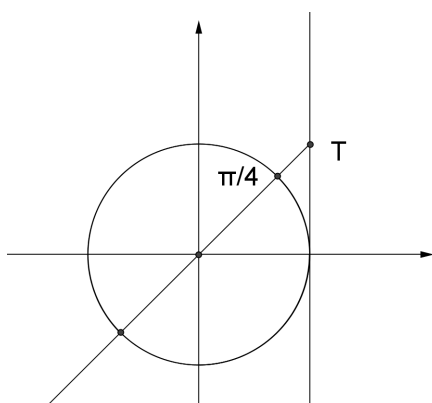


$$x = \alpha + 2k\pi$$

$$x = -\alpha + 2k\pi$$

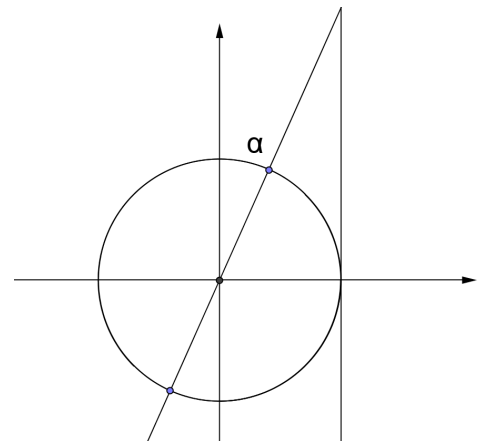
Se $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$
 $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

c) Consideriamo l'equazione elementare $\operatorname{tg} x = 1$.



$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

In generale quindi $\operatorname{tg} x = k \Rightarrow x = \alpha + k\pi$

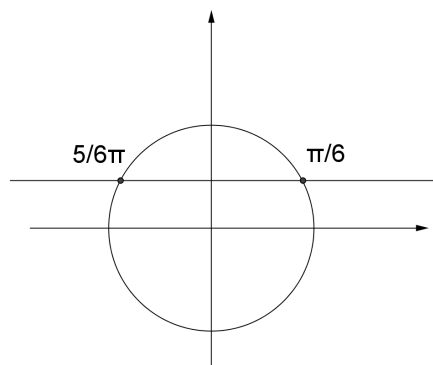


Equazioni goniometriche “riconducibili” ad equazioni elementari

1) Vediamo i seguenti esempi:

a) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

In questo caso non conviene sviluppare con la formula di sottrazione! Consideriamo $x - \frac{\pi}{4}$ come un unico angolo. Per quello che abbiamo già visto:

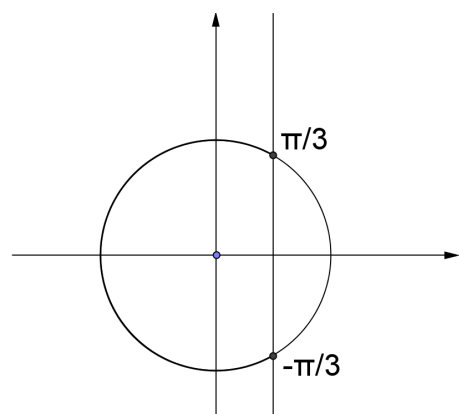


$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{6}\pi + 2k\pi = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi$$

b) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

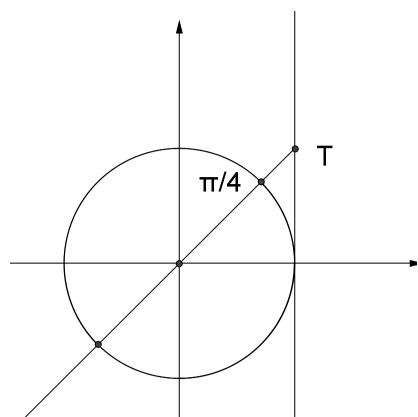
Anche in questo caso non conviene sviluppare con la formula di duplicazione ma considerare $2x$ come un unico angolo e per quello che abbiamo già visto avremo:



$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

c) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$



Considerando $3x - \frac{\pi}{6}$ come un angolo avremo:

$$3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$3x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$$

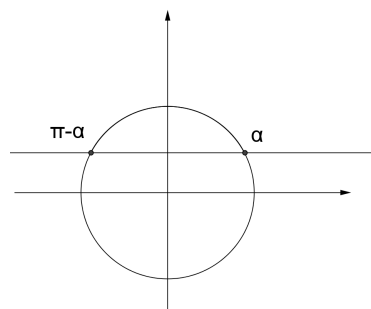
$$x = \frac{5}{36}\pi + k\frac{\pi}{3}$$

Equazioni goniometriche

2) Consideriamo i seguenti esempi:

a) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso seno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure se sono supplementari. Quindi:



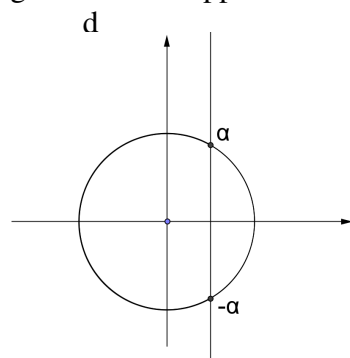
$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

b) $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso coseno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure sono opposti. Quindi:

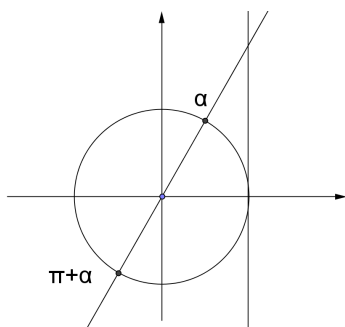


$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli (diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi$) hanno la stessa tangente quando sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica o differiscono di π , quindi potremo semplicemente scrivere:



$$2x = x - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

3) Vediamo infine i seguenti esempi:

a) $\boxed{\text{sen}^2 x + \text{sen} x - 2 = 0}$

Consideriamola come un'equazione di 2° grado e ricaviamo:

$$\text{sen} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \text{sen} x_1 = 1 \cup \text{sen} x_2 = -2$$

Quindi $\text{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $\text{sen} x = -2$ nessuna soluzione

b) $\boxed{2 \cos^2 x + \cos x = 0}$

Possiamo semplicemente mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$$

e quindi avremo:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

c) $\boxed{\text{tg}^2 x + \text{tg} x = 0}$

$$\text{tg} x (\text{tg} x + 1) = 0$$

$$\text{tg} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\text{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Equazioni goniometriche

d) $\boxed{\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 0}$

In questo caso dobbiamo utilizzare la prima relazione fondamentale e sostituire $1 - \operatorname{sen}^2 x$ a $\cos^2 x$.

$$1 - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ nessuna soluzione}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ utilizzando la calcolatrice abbiamo}$$

$$x = \alpha + 2k\pi$$

$$\text{con } \alpha \cong -38^\circ$$

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

e) $\boxed{\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0}$

In questo caso gli argomenti del seno e del coseno sono diversi: possiamo riportarci all'angolo x utilizzando la formula di duplicazione.

$$2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (2\operatorname{sen} x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \\ x &= \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \end{aligned}$$

f) $\boxed{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos x = 0}$

Utilizzando la formula di bisezione avremo:

$$\frac{1 - \cos x}{2} + \cos x = 0$$

$$1 - \cos x + 2\cos x = 0$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

Equazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Consideriamo la seguente equazione:

$$\boxed{\operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0}$$

Per determinare x cerchiamo il punto P associato all'angolo x sulla circonferenza goniometrica. Ricordando che

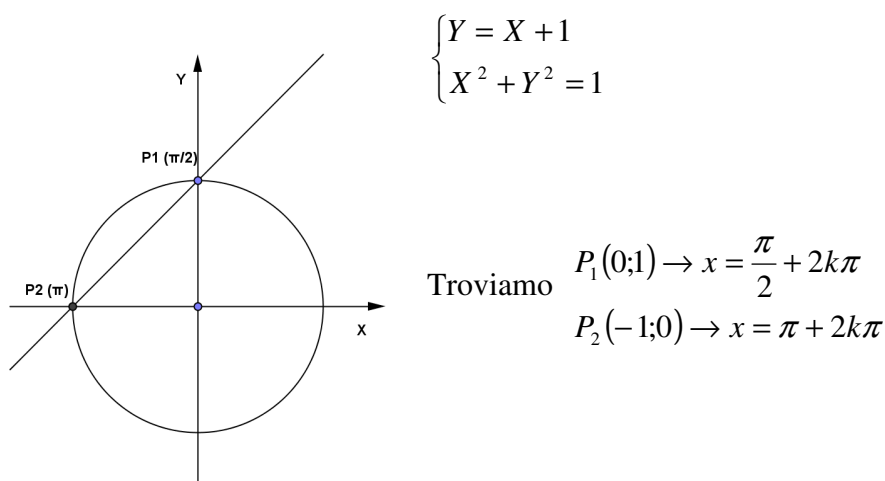
$$\operatorname{sen} x = y_p$$

$$\cos x = x_p$$

Risolvere l'equazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_p - x_p - 1 = 0 \rightarrow y_p = x_p + 1 \\ x_p^2 + y_p^2 = 1 \end{cases}$$

Per non confondere x (angolo) con x_p (ascissa del punto P) possiamo indicare x_p con X e y_p con Y . Quindi abbiamo l'intersezione tra una retta e la circonferenza goniometrica:



Osservazione: non sempre occorre utilizzare questo “metodo grafico”.

Esempio: $\boxed{\operatorname{sen} x - \cos x = 0}$

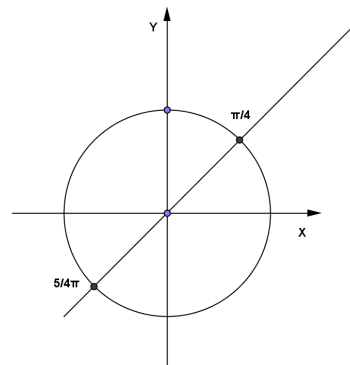
Possiamo dividere per $\cos x$ (possiamo supporre $\cos x \neq 0$ perché le soluzioni di $\cos x = 0$, cioè $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, non sono soluzioni dell'equazione) e otteniamo:

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Con il metodo grafico avremmo ottenuto lo stesso risultato:

$$\begin{cases} Y - X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$



Equazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno

Esempio 1: $\boxed{\text{sen}x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0}$

Basta mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (\text{sen}x + \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{sen}x + \cos x = 0 \Rightarrow \text{tg}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 2: $\boxed{\text{sen}^2 x + (1 - \sqrt{3})\text{sen}x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0}$

Proviamo a dividere per $\cos^2 x$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione):

$$\text{tg}^2 x + (1 - \sqrt{3})\text{tg}x - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{tg}x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$\text{tg}x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{tg}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 3: $\boxed{(3 + \sqrt{3})\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)\text{sen}x \cdot \cos x = 3}$

Possiamo moltiplicare il termine noto per $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$ poiché $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e avremo:

$$(3 + \sqrt{3})\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)\text{sen}x \cdot \cos x = 3 \cdot (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sqrt{3}\text{sen}^2 x + (\sqrt{3} - 1)\text{sen}x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$:

$$\sqrt{3}\text{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1)\text{tg}x - 1 = 0$$

$$\text{tg}x_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{tg}x = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

ESERCIZI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari:

a) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

f) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari:

a) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi \right]$$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \right]$$

c) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\left[x = \frac{\pi}{12} + k\pi \right]$$

d) $\operatorname{sen} \cdot 2x = 1$

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

e) $\cos \cdot 3x = -1$

$$\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right]$$

f) $\operatorname{tg} \cdot 4x = -\sqrt{3}$

$$\left[x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4} \right]$$

3) Ricordando le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli associati, risolvi le seguenti equazioni:

a) $\operatorname{sen} \cdot 2x = \operatorname{sen} x$

$$\left[x = 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \right]$$

b) $\cos \cdot 3x = \cos 2x$

$$\left[x = 2k\pi; x = \frac{2}{5}k\pi \right]$$

c) $\operatorname{tg} \cdot 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

$$\left[x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \right]$$

Equazioni goniometriche

4) Risolvi le seguenti equazioni riconducibili ad equazioni elementari:

- a) $\text{sen}^2 x - \text{sen} x = 0$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- b) $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$ $[x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$
- c) $\sqrt{3} \text{tg}^2 x - 4 \text{tg} x + \sqrt{3} = 0$ $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$
- d) $2 \cos^2 x - \cos x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$
- e) $2 \text{sen}^2 x + \text{sen} x = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$
- f) $2 \text{sen}^2 x - 3 \text{sen} x + 1 = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$
- g) $\text{tg}^2 x + \text{tg} x = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$
- h) $\sqrt{3} \text{tg}^2 x + \text{tg} x = 0$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$
- i) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$
- l) $3 \text{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \text{tg} x - 3 = 0$ $[x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

5) Risolvi le seguenti equazioni:

- a) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = \cos x$ $[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$
- b) $2 \cos^2 x - \text{sen} x = 1$ $[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- c) $\text{tg} x \cdot \text{sen} x = \sqrt{3} \text{sen} x$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$
- d) $\text{sen} x = \text{tg} x$ $[x = k\pi]$
- e) $2 \text{sen} x \cdot \cos x + 2 \cos x = 1 + \text{sen} x$ $[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$
- f) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ $[x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$
- g) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2 + 3 \text{tg} x$ $[x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi]$
- h) $\cos 2x + \text{sen}^2 x = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$
- i) $2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$
- l) $\text{sen} x = \cos \frac{x}{2}$ $[x = \pi + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi; x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi]$

Equazioni goniometriche

6) Risolvi le seguenti equazioni lineari:

- | | |
|---|--|
| a) $\text{sen} x + \cos x = 1$ | $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = 2k\pi]$ |
| b) $\text{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$ | $[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$ |
| c) $\cos x + \sqrt{3}\text{sen} x = \sqrt{3}$ | $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$ |
| d) $\sqrt{3}\cos x - \text{sen} x + \sqrt{3} = 0$ | $[x = \pi + 2k\pi; x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$ |
| e) $2\cos x + 2\text{sen} x = \sqrt{3} + 1$ | $[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$ |
| f) $\text{sen} x + \cos x = -2$ | [impossibile] |

7) Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado in seno e coseno:

- | | |
|---|---|
| a) $3\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$ | $[x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi]$ |
| b) $\text{sen}^2 x - \text{sen} x \cdot \cos x = 0$ | $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi]$ |
| c) $\sqrt{3}\cos^2 x + \cos x \cdot \text{sen} x = 0$ | $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$ |
| d) $2\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\text{sen} x \cdot \cos x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ | $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$ |
| e) $4\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\text{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$ | $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$ |
| f) $2\text{sen}^2 x + \sqrt{3}\text{sen} x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$ | $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$ |

8) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

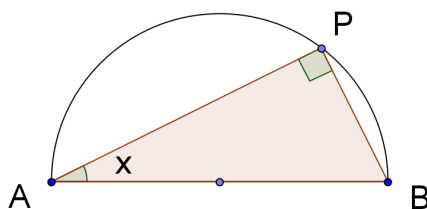
- | | |
|---|--|
| a) $2\cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\text{sen}^2 x$ | $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$ |
| b) $(\text{sen} x + \cos x)^2 = \cos 2x$ | $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$ |
| c) $\text{tg} 2x - 3\text{tg} x = 0$ | $[x = k\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi]$ |

Problemi ed equazioni goniometriche

Esempio 1

Consideriamo questo problema: data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, consideriamo su di essa un punto P e determiniamo, ponendo $x = \widehat{BAP}$, l'area del triangolo \widehat{ABP} in funzione di x .

- Determina per quale valore di x si ottiene area uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2} r^2$.
- Qual è il valore massimo e minimo dell'area?



Limiti di x: il valore di x potrà variare da 0 (quando $P \equiv B$) a $\frac{\pi}{2}$ (quando $P \equiv A$).

Poiché il triangolo \widehat{ABP} è retto in P avremo:

$$\overline{AP} = 2r \cdot \cos x$$

$$\overline{PB} = 2r \cdot \sin x$$

$$Area_{ABP}(x) = \frac{1}{2} \cdot 2r \cos x \cdot 2r \sin x = 2r^2 \sin x \cos x$$

a) Dobbiamo risolvere l'equazione

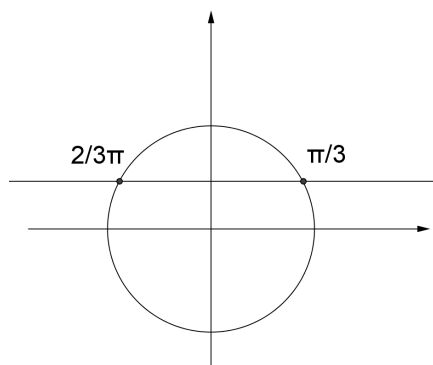
$$2r^2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

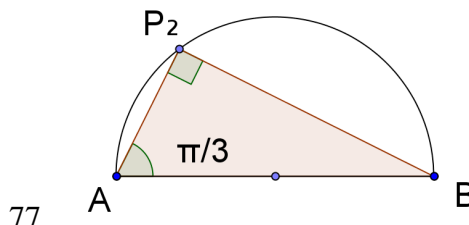
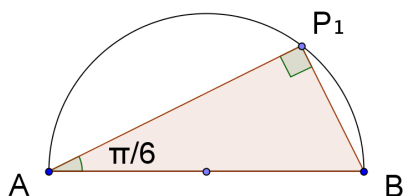
Poiché $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x \leq \pi$ e quindi

$$2x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$2x = \frac{2}{3}\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

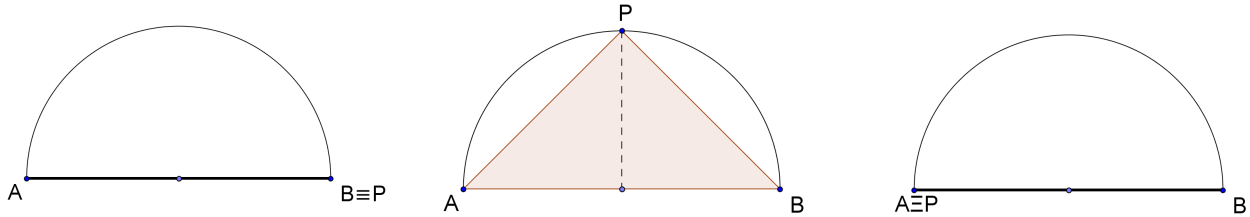


Il problema ha quindi 2 soluzioni, corrispondenti a triangoli uguali.



Equazioni goniometriche

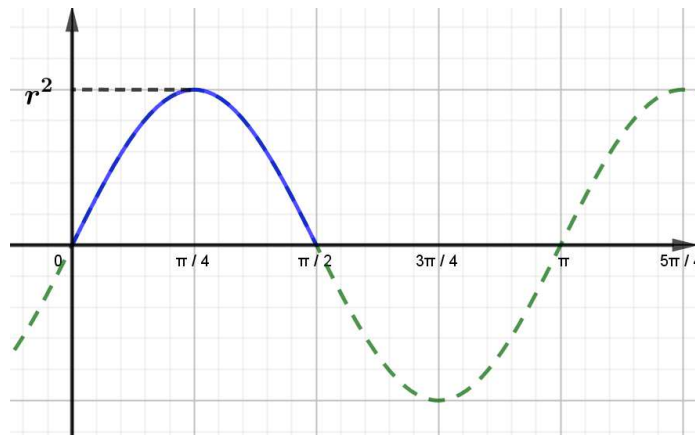
b) E' chiaro che, dal momento che l'area del triangolo $\triangle ABP$ può essere calcolata come $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$ essendo la base AB fissa e variando l'altezza PH, l'area massima si avrà quando PH è massima e quindi per $\overline{PH} = r$ cioè quando $x = \frac{\pi}{4}$ e il triangolo è un triangolo rettangolo isoscele e che l'area minima si avrà quando PH è minima cioè $\overline{PH} = 0$ e $x = 0 (P \equiv B) \cup x = \frac{\pi}{2} (P \equiv A)$.



Considerando l'area come una funzione dell'angolo x abbiamo visto che

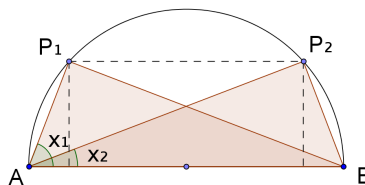
$$A(x) = 2r^2 \sin x \cos x \rightarrow A(x) = r^2 \sin 2x$$

Il grafico di $A(x)$ risulta



Quindi ritroviamo che per $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ l'area vale 0 e che per $x = \frac{\pi}{4}$ si ha il massimo valore dell'area (r^2).

Inoltre ci sono sempre 2 triangoli uguali in corrispondenza di un certo valore dell'area (cioè due valori diversi di x che danno lo stesso valore dell'area): infatti, come si può osservare dalla figura, per un dato valore di PH si trovano due punti sulla semicirconferenza.



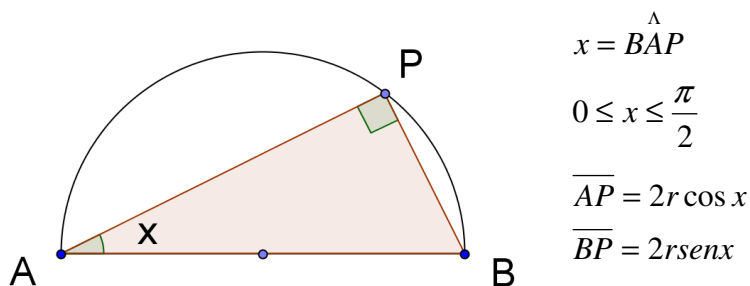
Esempio 2

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, consideriamo su di essa un punto P e, ponendo

$x = \widehat{BAP}$, determinare il perimetro del triangolo ABP in funzione di x .

a) Per quale valore di x il perimetro risulta $2r(1 + \sqrt{2})$?

b) Qual è il valore massimo e minimo del perimetro del triangolo ABP?



Quindi $2p_{ABP}(x) = 2r \sin x + 2r \cos x + 2r$

a) Per determinare per quale x il perimetro risulta uguale a $2r(1 + \sqrt{2})$ dobbiamo risolvere l'equazione:

$$2r \cos x + 2r \sin x + 2r = 2r(1 + \sqrt{2})$$

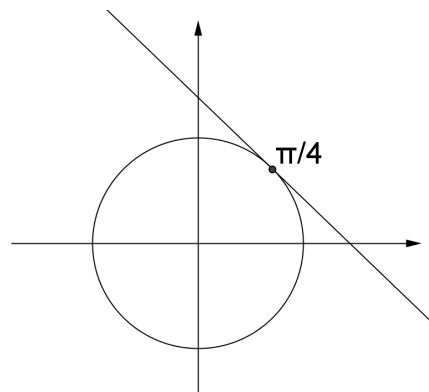
$$2r \cos x + 2r \sin x = 2r\sqrt{2}$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}$$

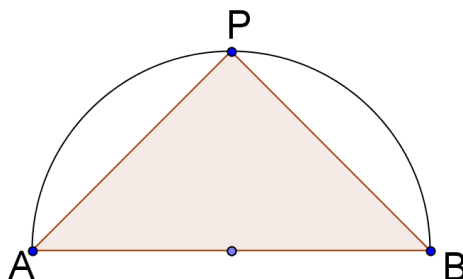
$$\begin{cases} X + Y = \sqrt{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{2} - Y \\ 2 - 2\sqrt{2} + Y^2 + Y^2 = 1 \dots \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ è l'unica soluzione del problema



Infatti: $\overline{AP} = \overline{BP} = r\sqrt{2}$ $2p_{ABP} = 2r + 2r\sqrt{2} = 2r(1 + \sqrt{2})$



Equazioni goniometriche

b) Osserviamo che si ha il minimo perimetro di $\triangle ABP$ quando $P \equiv B(x=0)$ oppure $P \equiv A\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ perché in questi casi il triangolo degenera in 2 diametri sovrapposti e il perimetro vale $4r$.

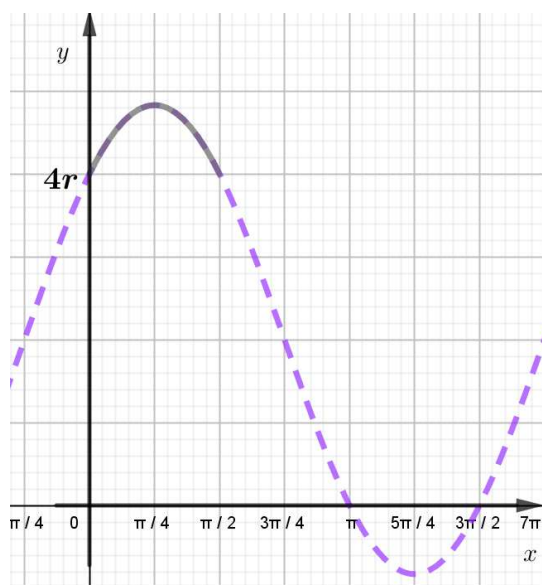
Per determinare il massimo perimetro possiamo disegnare il grafico della funzione $2p(x)$: basterà traslare di $2r$ verso l'alto il grafico di $y = 2r(\text{sen}x + \cos x)$.

Per disegnare $y = 2r(\text{sen}x + \cos x)$ ricordiamo che abbiamo visto che le funzioni del tipo $y = a \cdot \text{sen}x + b \cdot \cos x$ possono essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $y = A \cdot \text{sen}(x + \varphi)$.

$$A \cdot (\text{sen}x \cdot \cos \varphi + \cos x \cdot \text{sen} \varphi) = 2r(\text{sen}x + \cos x) \rightarrow A \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen}x + A \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos x = 2r \text{sen}x + 2r \cos x \rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos \varphi = 2r \\ A \cdot \text{sen} \varphi = 2r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{A \cdot \text{sen} \varphi}{A \cdot \cos \varphi} = 1 \rightarrow \text{tg} \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \\ A^2 = 8r^2 \rightarrow A = 2\sqrt{2} \cdot r \end{cases}$$

Quindi abbiamo che $y = 2r(\text{sen}x + \cos x)$ corrisponde a $y = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e in conclusione il grafico di $2p_{ABP}(x)$ risulta il seguente (disegnato solo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$):



Quindi si ha il massimo perimetro di $\triangle ABP$ quando $x = \frac{\pi}{4}$ e sostituendo si trova che risulta

$$2p\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2r(1 + \sqrt{2})$$

Anche in questo caso, fissato un valore del perimetro compreso tra $4r$ e $2r(1 + \sqrt{2})$, si avranno sempre due valori di x corrispondenti (cioè due triangoli congruenti che hanno quel dato perimetro).

PROBLEMI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Si consideri una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $\hat{BAP} = x$. Determina per quale x si ha $area(ACBP) = (\sqrt{3} + 1)r^2$.

$$\left[x = \frac{\pi}{4} \right]$$

2) Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ si consideri il trapezio isoscele $ABCD$ inscritto nella semicirconferenza e si ponga $\hat{BAD} = x$. Determinare per quale x si ha $2p(ABCD) = 5r$.

$$\left[x = \frac{\pi}{3} \right]$$

3) Si consideri una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e un trapezio isoscele $CDEF$ circoscritto alla semicirconferenza. Posto $\hat{DCF} = x$ determina x per il quale si ha $area(CDEF) = \sqrt{3}r^2$.

$$\left[x = \frac{\pi}{3} \right]$$

4) Considera una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e un punto P su di essa. Costruisci il quadrato $PBRQ$ esternamente alla semicirconferenza. Determina la posizione di P in modo che si abbia $area(ABRQ) = 3r^2$. Poni $\hat{BAP} = x$.

$$\left[x = \frac{\pi}{4} \right]$$

5) Considera una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e un punto P su di essa. Costruisci il triangolo equilatero PBD esternamente alla semicirconferenza e determina P per cui si abbia $area(ABDP) = \sqrt{3}r^2$. Poni $\hat{PAB} = x$.

$$\left[x = \frac{\pi}{2}, x = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

7) Considera una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ una corda PQ parallela ad AB . Posto $\hat{AOP} = x$ e costruito il triangolo equilatero PQR , con R esterno alla semicirconferenza, determina x in modo che si abbia $area(POQR) = \sqrt{3}r^2$.

$$\left[x = 0, x = \frac{\pi}{6} \right]$$

Equazioni goniometriche

8) Dato un triangolo isoscele ABC avente base AB e altezza $\overline{CH} = 2a$, posto $\widehat{ACH} = x$, considera il punto D, punto medio dell' altezza CH, e traccia le sue proiezioni ortogonali M e N rispettivamente su AC e CB. Determina x in modo che $2p(CMDN) = 2a\sqrt{2}$.

$$[x = \frac{\pi}{4}]$$

9) Considera una circonferenza di diametro $AB = 2r$ e la corda $\overline{AC} = r$. Sia P un punto appartenente alla semicirconferenza non contenente C e poni $\widehat{PAB} = x$. Determina x in modo che si abbia $area(APC) = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$.

$$[x = 0, x = \frac{\pi}{6}]$$

10) Sia ABO un settore circolare con $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ e $\overline{AO} = \overline{OB} = r$. Si consideri un punto P appartenente all' arco AB e si ponga $\widehat{AOP} = x$. Si consideri la proiezione ortogonale H del punto P su AO, il segmento PP' parallelo ad AO e sia K la proiezione ortogonale di P' su AO. Determina x in modo che $area(HPP'K) = \frac{r^2}{2\sqrt{3}}$.

$$[x = \frac{\pi}{6}]$$

11) Considera una circonferenza di raggio r e le corde $\overline{AB} = r$ e $\overline{BC} = r\sqrt{3}$. Considera un punto P appartenente alla semicirconferenza AC non contenente B. Determina P in modo che $2p(ABCP) = 2r(1 + \sqrt{3})$. Poni $\widehat{PAC} = x$.

$$[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}]$$

12) Si consideri una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $\widehat{BAP} = x$. Studia la funzione $A(x) = area(ACBP)$.

$$\left[A(x) = r^2(\sin 2x + \sqrt{3}), \quad \max = r^2(1 + \sqrt{3}) \text{ per } x = \frac{\pi}{4}; \quad \min = \sqrt{3}r^2 \text{ per } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \right]$$

SCHEDA DI VERIFICA
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche

1. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \frac{17}{12}\pi + 2k\pi; x = \frac{25}{12}\pi + 2k\pi\right]$
2. $\operatorname{tg}^2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$ $\left[x = \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}\right]$
3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[x = -\frac{7}{12}\pi + 2k\pi; x = \frac{\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3}\right]$
4. $2\operatorname{sen}^2x - 2 = \operatorname{sen}^2x + \cos^2x + 5\cos x + 1$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$
5. $\operatorname{sen}x = \cos x - \sqrt{2}$ $\left[x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$
6. $\cos x + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$
7. $2\operatorname{sen}^2x - (\sqrt{3} + 1)\operatorname{sen}x\cos x + (\sqrt{3} + 1)\cos^2x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$
8. $\sqrt{3}\cos 2x + 1 = \operatorname{sen}2x$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7}{12}\pi + k\pi\right]$

Problema 1

Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e sia P un punto su di essa. Disegna il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza e determina $x = \widehat{PAB}$ in modo che $2p(ACBP) = 2(2 + \sqrt{2})r$.

$$\left[x = \frac{\pi}{4}\right]$$

Problema 2

Considera una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e traccia la corda $\overline{AC} = r\sqrt{3}$. Determina un punto P (poni $\widehat{BAP} = x$) appartenente alla semicirconferenza \widehat{AB} non contenente C tale che l'area del quadrilatero ACBP sia uguale a $\sqrt{3}r^2$.

$$\left[x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}\right]$$

Problema 3

Si consideri una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e si costruisca il quadrato ACDB esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $\widehat{BAP} = x$. Studia la funzione $A(x) = \operatorname{area}(ACDBP)$.

$$\left[A(x) = r^2(\operatorname{sen}2x + 4), \quad \max = 5r^2 \text{ per } x = \frac{\pi}{4}; \quad \min = 4r^2 \text{ per } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}\right]$$

SCHEDA PER IL RECUPERO
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

$$1) \cos x = -\frac{1}{2} \quad \left[x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right]$$

$$2) \operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \cup x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$3) \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \right]$$

$$4) \operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi \cup x = \frac{\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$5) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$6) \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad \left[x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \right]$$

$$7) 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0 \quad \left[x = k\pi \cup x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right]$$

$$8) 2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \left[x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \cup x = \pm \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \right]$$

$$9) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \quad \left[x = k\pi \cup x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$10) \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \quad \left[x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$11) \operatorname{sen} x - \cos x = 1 \quad \left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \cup x = \pi + 2k\pi \right]$$

$$12) \operatorname{sen} x = \cos x - 1 \quad \left[x = 2k\pi \cup x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$$

$$13) \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \quad \left[x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$