Formule goniometriche

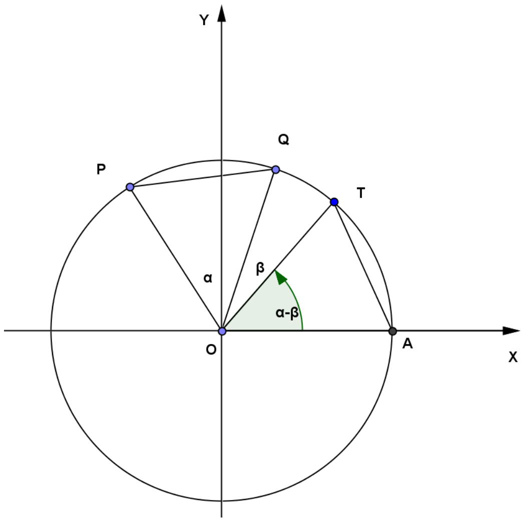
Come possiamo calcolare $sen(\alpha+\beta)$?

E' chiaro che non può risultare $sen(\alpha+\beta)=sen\alpha+sen\beta$: se infatti fosse così e per esempio $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$ avremo $sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=sen\dfrac{\pi}{2}+sen\dfrac{\pi}{2}=1+1=2$!

Dobbiamo ricavare delle relazioni che ci permetteranno di calcolare il seno, il coseno e la tangente di una somma o di una differenza di angoli.

Formule di addizione e sottrazione

1) Cominciamo con questa osservazione: se riportiamo su una circonferenza goniometrica due angoli α e β , per esempio con $\alpha>\beta$ come in figura, possiamo considerare l'angolo $\alpha-\beta$ e riportarlo con il primo lato sul semiasse positivo delle x. Avremo quindi:



$P(\cos\alpha; sen\alpha)$
$Q(\cos\beta; sen\beta)$
$T(\cos(\alpha-\beta); sen(\alpha-\beta))$
$A(1;0)$

Poiché $A\hat{O}T=Q\hat{O}P=\alpha-\beta$ allora avremo anche $\overline{PQ}=\overline{AT}$ e possiamo scrivere:

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha-sen\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+sen^2(\alpha-\beta)$$

e sviluppando abbiamo:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+sen^2\alpha-2sen\alpha sen\beta+sen^2\beta=\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+sen^2(\alpha-\beta)$$

Quindi poiché : $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $sen^2\beta+\cos^2\beta=1$, $sen^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1$

avremo: $1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2sen\alpha sen\beta=1+1-2\cos(\alpha-\beta)$

e quindi $$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$$

Esempio

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Da questa formula possiamo anche ricavare $\cos(\alpha+\beta)$: basta infatti scrivere $\alpha+\beta = \alpha - (-\beta)$.

Quindi avremo , poiché $\cos(-\beta) = \cos\beta$ mentre $sen(-\beta) = -sen\beta$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + sen\alpha \cdot sen(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$$

e quindi $$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta}$$

Esempio

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - sen 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

2) Come si possono ricavare $sen(\alpha-\beta)$ e $sen(\alpha+\beta)$?

Ricordando che il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare possiamo scrivere:

$$sen(\alpha-\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \cos\beta - sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot sen\beta$$
$$= sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta$$

Quindi $$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot sen\beta}$$

Allora

$$sen(\alpha+\beta) = sen[\alpha-(-\beta)] = sen\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot sen(-\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta$$

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta}$$

Esempio

$$sen(15°) = sen(45° - 30°) = sen 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot sen 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)$$

3) E come si calcola $tg(\alpha-\beta)$ e $tg(\alpha+\beta)$?

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot se\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\alpha\cdot sen\beta}$$

Se dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ otteniamo:

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Allora $$tg(a+\beta)=tg[\alpha-(-\beta)]=\frac{tg\alpha-tg(-\beta)}{1+tg\alpha\cdot tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

Esempio

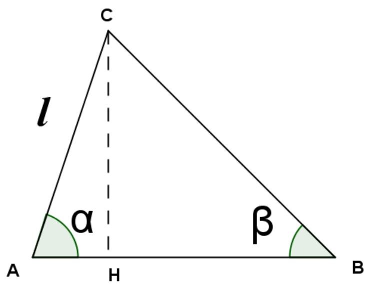
$$tg(15°)=tg(45°-30°)=\frac{tg45°-tg30°}{1+tg45°\cdot tg30°}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$tg(75°)=tg(45°+30°)=\frac{tg45°+tg30°}{1-tg45°\cdot tg30°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

Applicazioni delle formule di addizione

Esempio 1

Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, acutangolo, sappiamo che $sen\,\hat{A} = \frac{4}{5}$ e $tg\,\hat{B} = 1$. Se $\overline{AC} = l$ possiamo risolvere il triangolo, cioè determinare tutti gli altri suoi elementi?



$$sen\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad (\ \alpha \text{ è acuto})$$

$$tg\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$\overline{AH} = l \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}l$ $\qquad$ $\overline{CH} = l \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}l$ $\qquad$ $\overline{HB} = \overline{CH} = \frac{4}{5}l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{7}{5}l$

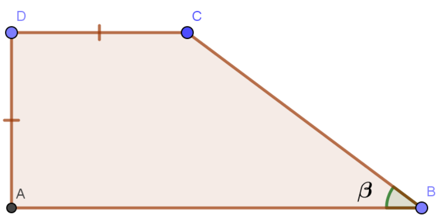
$\overline{CB} = \overline{CH} \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{5}\sqrt{2}l$

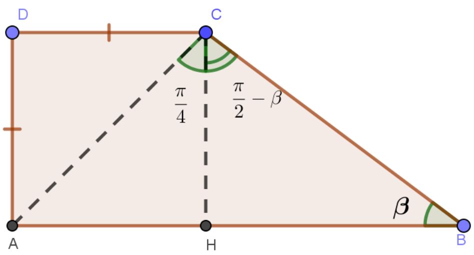
$\hat{C} = \pi - (\alpha + \beta)$ e

$$sen\,\hat{C} = sen(\pi - (\alpha + \beta)) = sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

Esempio 2

Dato il trapezio rettangolo ABCD in cui $\overline{AD} = \overline{CD} = l$, $\quad sen\left(\hat{ABC}\right) = \frac{3}{5}$, come si possono calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo $\hat{ACB}$?





Osserviamo che $\hat{ACH} = \frac{\pi}{4}$ e che $\hat{BCH} = \frac{\pi}{2} - \beta$ e quindi $\hat{ACB} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{3}{4}\pi - \beta$ e utilizzando le formule si possono trovare seno, coseno e tangente.

Per esempio: $\qquad sen(\frac{3}{4}\pi - \beta) = sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)sen\beta = ...$

Esempio 3

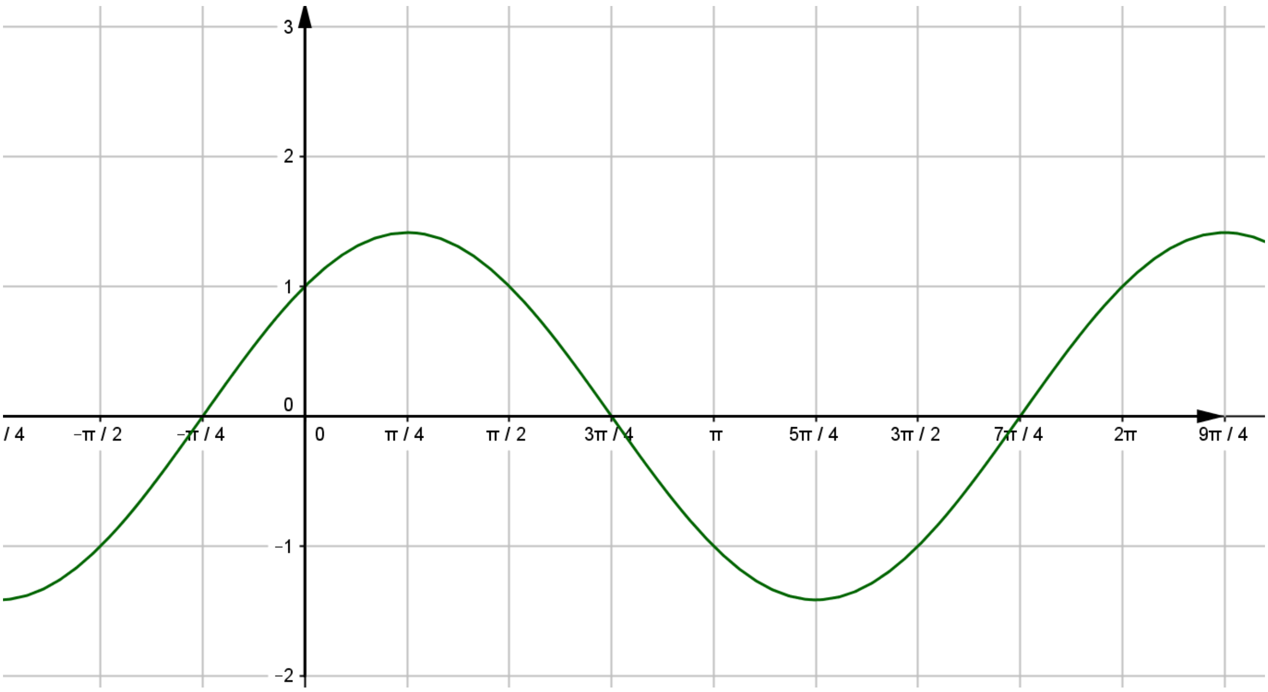
Vediamo come le funzioni del tipo $y = a \cdot senx + b \cdot \cos x$ possano essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $y = A \cdot sen(x + \varphi)$ utilizzando le formule di addizione .

Consideriamo per esempio $y = senx + \cos x$
Sviluppiamo $A \cdot sen(x + \varphi)$ e imponiamo che risulti uguale a $senx + \cos x$.

$$A \cdot (senx \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot sen\varphi) = senx + \cos x \to A \cdot \cos\varphi \cdot senx + A \cdot sen\varphi \cdot \cos x = senx + \cos x \to$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos\varphi = 1 \\ A \cdot sen\varphi = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{A \cdot sen\varphi}{A \cdot \cos\varphi} = 1 \to tg\varphi = 1 \to \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ A^2 \cdot sen^2\varphi + A^2 \cdot \cos^2\varphi = 2 \to A^2 = 2 \to A = \sqrt{2} \end{cases}$$

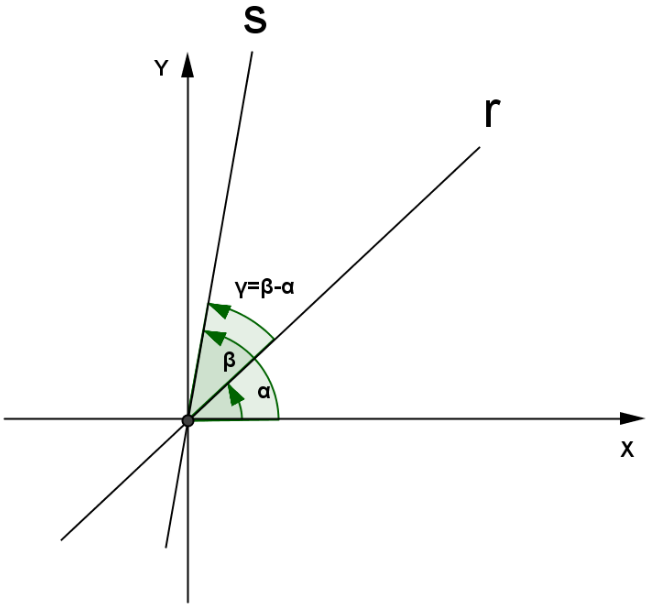
Quindi $y = senx + \cos x$ corrisponde a $y = \sqrt{2} sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ come si può verificare con Geogebra: digitando nella barra di inserimento $y = \sin x + \cos x$ abbiamo infatti il seguente grafico:



Angolo formato tra due rette

Ricordando che il coefficiente angolare di una retta, nel piano cartesiano, è uguale alla tangente dell'angolo α formato dalla retta con il semiasse positivo delle x, possiamo ricavare l'angolo (o la tangente dell'angolo) formato da due rette di equazione assegnata?

Per semplicità disegniamo due rette per l'origine con coefficienti angolari positivi.



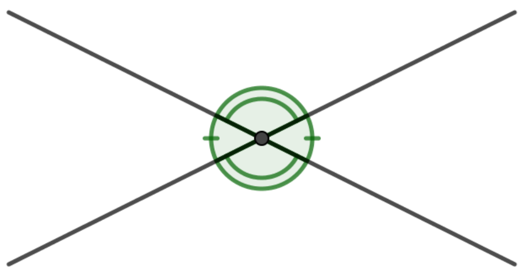
$$r: y = m \cdot x \Rightarrow tg\alpha = m$$
$$s: y = m' \cdot x \Rightarrow tg\beta = m'$$

L'angolo acuto γ formato da *r* e *s* avrà tangente

$$\boxed{tg\gamma = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{m' - m}{1 + m \cdot m'}}$$

Nota

In generale osserviamo che due rette (non perpendicolari) formano una coppia di angoli acuti (congruenti perché opposti al vertice) e una coppia di angoli ottusi congruenti e ricordando che la tangente di un angolo acuto è positiva mentre la tangente goniometrica di un angolo ottuso è negativa se vogliamo la tangente goniometrica dell'angolo acuto, che dovrà risultare positiva, dovremo applicare la formula in modo da avere un risultato positivo.



Esempio 1

Considera le rette di equazione :

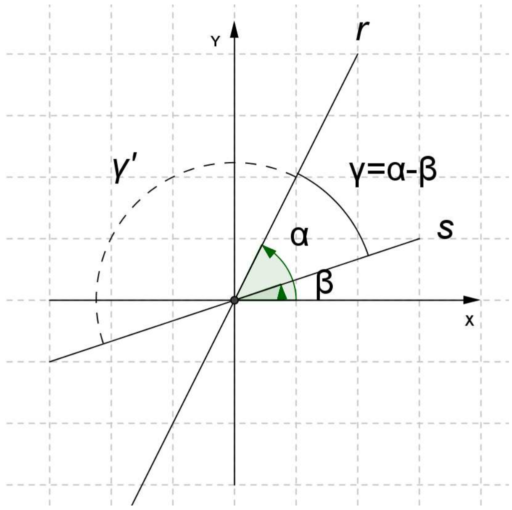
$r: y = 2x \quad m = 2$

$s: y = \frac{1}{3}x \quad m' = \frac{1}{3}$

$$tg\gamma = tg(\alpha - \beta) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

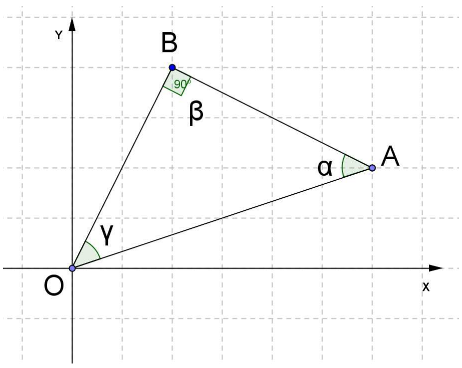
Naturalmente abbiamo anche

$$\gamma' = \pi - \gamma = \frac{3}{4}\pi$$



Esempio 2

Dato il triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(6;2)$ $B(2;4)$, determina le tangenti goniometriche dei suoi angoli.



$r_{OA}: y = \frac{1}{3}x$
$r_{OB}: y = 2x$ $\Rightarrow \ tg\ A\hat{O}B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$

$r_{AB} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

La tangente di β non può essere calcolata perché r_{OB} è perpendicolare a r_{AB} e quindi $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$tg\alpha = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = \gamma$$

Infatti $\overset{\Delta}{OAB}$ è un triangolo rettangolo isoscele.

Formule di duplicazione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo 2α ?

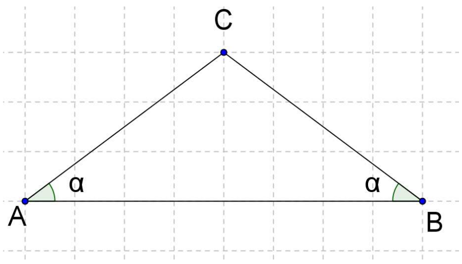
Utilizzando le formule di addizione abbiamo:

$$sen2\alpha = sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot sen\alpha = 2sen\alpha\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \boxed{sen2\alpha = 2sen\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\cos2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - sen\alpha\cdot sen\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \boxed{\cos2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

$$tg2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad \boxed{tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

Esempio: dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, se sappiamo che $sen\alpha = \frac{3}{5}$, con α l'angolo adiacente alla base, possiamo determinare le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C}$?



$$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\hat{C} = \pi - 2\alpha$$

$$sen\hat{C} = sen(\pi-2\alpha) = sen2\alpha = 2sen\alpha\cdot\cos\alpha =$$

$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Conoscendo $sen\hat{C}$ possiamo poi determinare anche coseno e tangente.

Osservazione: $\cos2\alpha$ può essere sviluppato in due modi diversi utilizzando la relazione $sen^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$.

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} 1-sen^2\alpha - sen^2\alpha = 1-2sen^2\alpha \\ \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \end{array}$$

Formule di bisezione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$?

Osserviamo che $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$. Proviamo a sviluppare

$$\cos\alpha = \cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}$$

a) Se sostituiamo $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - sen^2\frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos\alpha = 1 - 2sen^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \quad \boxed{sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

b) Se sostituiamo $sen^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \quad \boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Ricaviamo infine una formula per calcolare $tg\frac{\alpha}{2}$:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =^{*} \frac{sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}sen\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} =^{**} \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow \quad \boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

*Nota: moltiplico numeratore e denominatore per $\cos\frac{\alpha}{2}$

**Nota: $sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(2\cdot sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}sen\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}sen\alpha$

Se avessimo moltiplicato per $sen\frac{\alpha}{2}$ avremmo ottenuto invece:

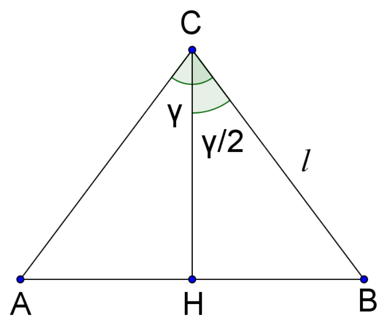
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{sen^2\frac{\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1}{2}sen\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} \Rightarrow \quad \boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}}$$

Osserviamo che le due espressioni sono equivalenti poiché:

$$\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{sen\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{1-\cos^2\alpha}{sen\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{sen^2\alpha}{sen\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Esempio 1: dato un triangolo isoscele acutangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, se conosciamo $sen\hat{C} = \frac{24}{25}$ e il lato $\overline{BC} = l$, possiamo risolvere il triangolo?

Ponendo $\hat{C} = \gamma$ è chiaro che per risolvere il triangolo abbiamo bisogno delle funzioni goniometriche dell'angolo $\frac{\gamma}{2}$.



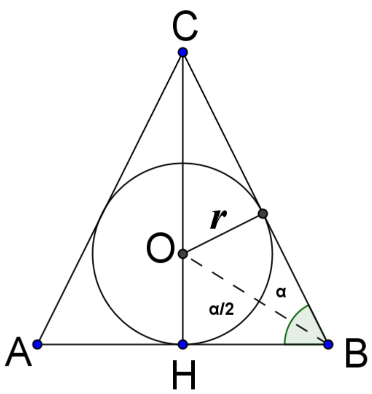
$$sen\gamma = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25}$$
(poiché il triangolo è acutangolo il coseno è positivo)

Quindi $sen^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25} \Rightarrow sen\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{5}$

Allora $\overline{HB} = \frac{3}{5} l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{6}{5} l$ e $\hat{A} = \hat{B} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$

Esempio 2: dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, se conosciamo $sen\alpha = \frac{12}{13}$ (α = angolo adiacente alla base) e il raggio r della circonferenza inscritta, possiamo risolvere il triangolo?

$$sen\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13} \quad (\alpha \text{ è acuto})$$



$$sen^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13} \Rightarrow sen\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} \rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OH}}{\overline{HB}} \Rightarrow \overline{HB} = \frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} r \Rightarrow \overline{AB} = 3r$$

$$\overline{CB} = \frac{\overline{HB}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{2} r}{\frac{5}{13}} = \frac{39}{10} r$$

$$\hat{C} = \pi - 2\alpha \Rightarrow sen\hat{C} = sen(\pi - 2\alpha) = sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot \cos\alpha$$

Altre formule

1) Proviamo a ricavare $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione della $tg\frac{\alpha}{2}$.

$sen\alpha = sen2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

Possiamo a questo punto dividere per 1 e ricordare che 1 può essere pensato anche come $sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$sen\alpha = \dfrac{2sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ e dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ avremo

$$\boxed{sena = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Analogamente :

$\cos\alpha = \cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}}{sen^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ e quindi

$$\boxed{\cos a = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Queste formule si chiamano formule "**parametriche**" perché esprimono seno e coseno di un angolo in funzione del "parametro" $t = tg\frac{\alpha}{2}$ e saranno utili nella classe quinta per la risoluzione di alcuni integrali particolari.

Possiamo esprimere anche tga in funzione di $t = tg\frac{\alpha}{2}$:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

2) Possiamo anche ricavare delle formule per esprimere il prodotto tra il seno di un angolo e il seno (o il coseno) di un altro o per esprimere la somma del seno di un angolo con il seno (o coseno) di una altro cioè per esempio, $sen\alpha \cdot sen\beta$, $sen\alpha \cdot \cos\beta$ ecc. oppure $sen\alpha + sen\beta$, $\cos\alpha + \cos\beta$ ecc.

Osserviamo per esempio che:

$$sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta) = 2sen\alpha \cdot \cos\beta$$

Quindi: $$sen\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)]$$

Esercizio 1

Analogamente se voglio ricavare $sen\alpha \cdot sen\beta$ oppure $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ posso partire da……..

D'altra parte se poniamo

$$\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{p+q}{2} \\ \beta = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

avremo $$senp + senq = 2 \cdot sen\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Esercizio 2

Analogamente per ottenere un'espressione di $\cos p + \cos q$ considera

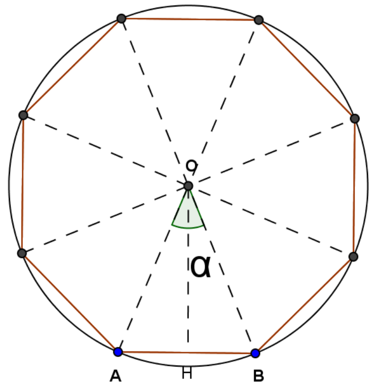
$$\begin{matrix} \cos(\alpha+\beta) = ... \\ \cos(\alpha-\beta) = ... \end{matrix} \rightarrow$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = ...$$

e procedi dopo aver posto $\begin{cases} \alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ... \\ \beta = ... \end{cases}$

Formule di bisezione e lati dei poligoni regolari inscritti ad una circonferenza

1) **Lato dell'ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *r***



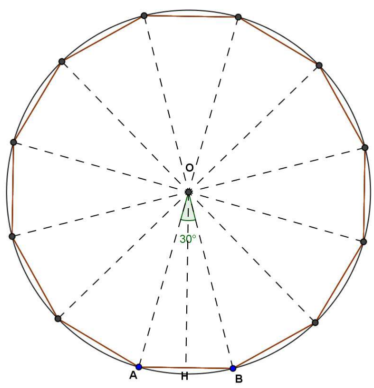
Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot sen\frac{\pi}{8}$ avremo:

$$\boxed{l_8 = 2r \cdot sen\frac{\pi}{8}}$$

Osservazione: si può anche ricorrere al teorema della corda per ottenere lo stesso risultato in quanto l'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB è la metà di $\alpha = A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$.

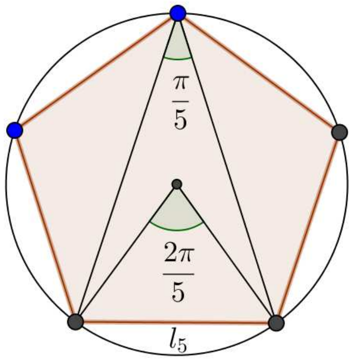
Per calcolare $sen\frac{\pi}{8}$ si può applicare la formula di bisezione ricavando $sen\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = ...$

2) **Lato del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *r***



Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot sen\frac{\pi}{12}$ abbiamo che $\boxed{l_{12} = 2r \cdot sen\frac{\pi}{12}}$ e per calcolare $sen\frac{\pi}{12}$ possiamo usare la formula di bisezione.

3) **Pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r**



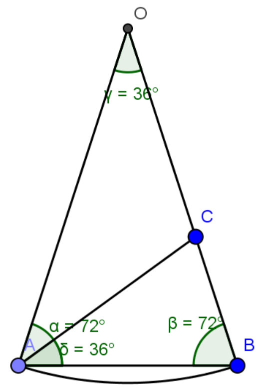
Analogamente ai casi precedenti abbiamo che il lato l_5 del pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio *r* risulta

$$\boxed{l_5 = 2r \cdot sen\frac{\pi}{5}}$$

Se scriviamo $sen\frac{\pi}{5} = sen2 \cdot \frac{\pi}{10} = 2 \cdot sen\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{10}$ possiamo calcolare $sen\frac{\pi}{5}$ se conosciamo seno e coseno di $\frac{\pi}{10}$

NOTA

Consideriamo il decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r : se $AB = l_{10}$ vediamo che , tracciata la bisettrice AC dell'angolo $B\hat{A}O$, i triangoli ABO e ABC sono simili poiché l'angolo $B\hat{A}O$ risulta 72° e quindi $B\hat{A}C$ è 36° come l'angolo $A\hat{O}B$.

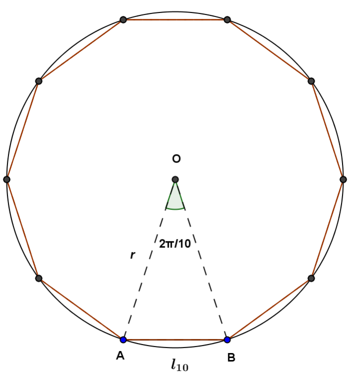


Quindi possiamo scrivere la seguente proporzione

$$r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10}) \Leftrightarrow l_{10}^{\ 2} = r^2 - r \cdot l_{10} = 0 \Leftrightarrow l_{10}^{\ 2} + r \cdot l_{10} - r^2 = 0 \Rightarrow l_{10} = \frac{-r \pm \sqrt{5}r}{2} \rightarrow l_{10} = \frac{(\sqrt{5}-1)r}{2}$$

D'altra parte per il teorema della corda vale anche che:

$$l_{10} = 2r \cdot sen\frac{\pi}{10}$$



e quindi confrontando le due espressioni possiamo ricavare:

$$\boxed{sen\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Da cui possiamo anche ricavare $\cos\frac{\pi}{10}$ e in conclusione $sen\frac{\pi}{5}$.

PROBLEMI

TRIANGOLO RETTANGOLO E FORMULE GONIOMETRICHE

1) In un triangolo ABC il lato $\overline{AC} = l$, $tg\alpha = 2$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Determina gli altri lati del triangolo e $sen\gamma$.

[$\overline{AB} = \frac{11\sqrt{5}}{15} l$, $\overline{CB} = \frac{2\sqrt{5}}{3} l$, $sen\gamma = \frac{11\sqrt{5}}{25}$]

2) In un triangolo isoscele ABC di base AB, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = l$. Determina perimetro e area del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C} = \gamma$.

[$2p = \frac{8}{3} l$, $A = \frac{2\sqrt{2}}{9} l^2$, $sen\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos\gamma = \frac{7}{9}$, $tg\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{7}$]

3) In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, il lato obliquo misura l e $\cos\hat{C} = \frac{7}{25}$. Determina perimetro e area del triangolo.

[$2p = \frac{16}{5} l$; $A = \frac{12}{25} l^2$]

4) Un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB e avente $\cos\hat{C} = \frac{1}{4}$ è inscritto in una circonferenza di raggio r . Determina i lati del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo alla base.

[$\overline{AB} = \frac{\sqrt{15}}{2} r$; $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} r$; $sen\left(A\hat{B}C\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$,.....]

5) In un trapezio rettangolo ABCD, la base maggiore $\overline{AB} = 56$, il lato obliquo $\overline{BC} = 50$ e $\cos\left(A\hat{B}C\right) = \frac{7}{25}$. Determina base minore e altezza del trapezio. Dopo aver verificato che il trapezio è circoscrivibile ad una circonferenza, detto O il suo centro, calcola $sen\left(C\hat{O}D\right)$.

[$\overline{DC} = 42$; $\overline{AD} = 48$; $sen\left(C\hat{O}D\right) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$]

6) Considera una semicirconferenza di raggio r e centro O e sia ABCD un trapezio rettangolo ad essa circoscritto. Sapendo che $\cos\left(A\hat{B}C\right) = \frac{1}{3}$ (AB base maggiore del trapezio) , determina i lati del trapezio e calcola $sen\left(O\hat{C}B\right)$.

[$\overline{AB} = r + \frac{3}{2\sqrt{2}} r$; $\overline{CB} = \frac{3}{2\sqrt{2}} r$; $\overline{DC} = r + \frac{r}{\sqrt{2}}$; $\overline{AD} = r$ $sen\left(O\hat{C}B\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$]

7) Considera il trapezio isoscele ABCD, circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r e centro O, avente $sen\left(A\hat{B}C\right)=\frac{4}{5}$ (AB base maggiore del trapezio, BC lato obliquo). Determina i lati del trapezio e $sen\left(O\hat{C}B\right)$.

[$\overline{CB}=\overline{AD}=\frac{5}{4}r$; $\overline{AB}=\frac{5}{2}r$; $\overline{DC}=r$; $sen\left(O\hat{C}B\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$]

8) Un trapezio rettangolo ABCD (base maggiore AB) è circoscritto ad una circonferenza di centro O e raggio r e $\cos\left(A\hat{B}C\right)=\frac{5}{13}$ ($A\hat{B}C=$ angolo adiacente alla base maggiore). Determina i lati del trapezio e $sen\left(O\hat{C}B\right)$.

[$\overline{CB}=\frac{13}{6}r$; $\overline{AD}=2r$; $\overline{DC}=\frac{5}{3}r$; $\overline{AB}=\frac{5}{2}r$; $sen\left(O\hat{C}B\right)=\frac{3}{\sqrt{13}}$]

9) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r: y=\frac{1}{2}x$, $s: y=2x$. Disegna le due rette e l'angolo γ. Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ.

[$tg\gamma=\frac{3}{4}$, $\gamma\cong 36{,}87°$]

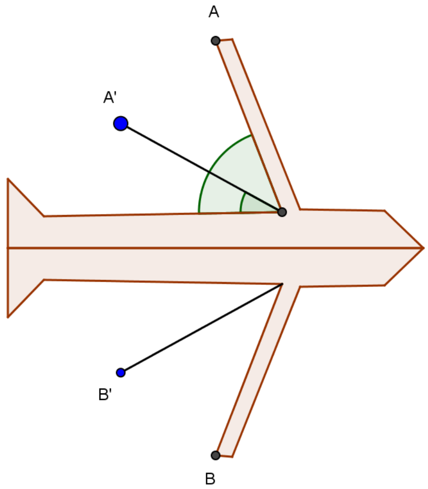
10) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r: y=\frac{1}{2}x$, $s: y=-\frac{1}{2}x$. Disegna le due rette e l'angolo γ. Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ.

[$tg\gamma=\frac{4}{3}$, $\gamma\cong 53{,}13°$]

SCHEDE DI LAVORO
Trigonometria nella realtà

1) ***Apertura alare***

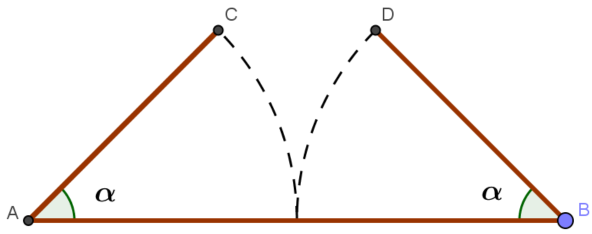
Quanto varia l'apertura alare di un aereo dalla fase di decollo alla fase di volo?
Supponiamo che l'ala dell'aereo sia lunga 16 metri e che durante il decollo di abbia $\alpha = 70°$, mentre si abbia $\alpha' = 30°$ durante il volo. Di quanto varia $\overline{AB}$ (apertura alare) cioè quanto risulta $\overline{AB} - \overline{A'B'}$?



[circa 14 m]

2) ***Cancello con apertura automatica***

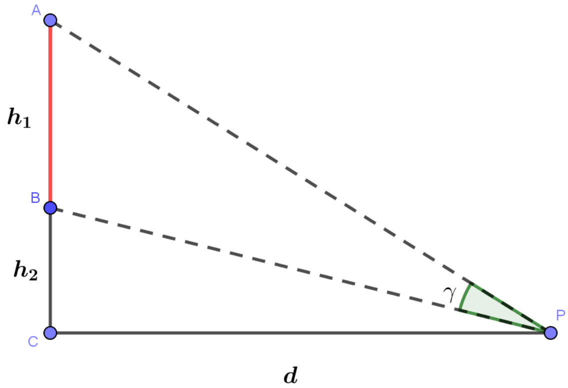
Considera un cancello automatico costituito da due parti uguali lunghe 2,5 m ciascuna.
Indica con α l'angolo in figura (che varia durante l'apertura del cancello) e calcola l'apertura $\overline{CD}$ in funzione di α. Per quale angolo si ha un'apertura di 2,5 m? E di 1 metro?



[60° ; circa 37°]

3) *Angolo di visuale*

Supponiamo di voler fotografare la cupola del duomo di Firenze alta $h_1 = 68$ m che si trova su una base di altezza $h_2 = 55$ metri di altezza. Se ti sei posizionato a 100 metri dalla base della cupola qual è il tuo angolo di visuale?



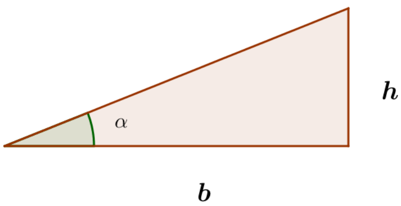
Suggerimento
Rappresentando la cupola con il segmento AB e la base con il segmento BC, quando ti posizioni in P vedrai la cupola sotto l'angolo di visuale γ: si tratta quindi di determinare γ in funzione dei tuoi dati.

[$\gamma \cong 22°$]

4) ***Piste da sci***

Le piste da sci sono classificate in **blu, rosse e nere** a seconda della pendenza massima che si può trovare percorrendo la pista e rispettivamente è stabilito che siano blu se in tutti i tratti la pendenza risulta sempre inferiore al 25%, rosse se sono presenti tratti con pendenza compresa tra il 25% e il 40% e nere se ci sono tratti con pendenza tra il 40% e il 75%.

Ricordando che per pendenza si intende la tangente dell'angolo formato dalla pista con l'orizzontale cioè $tg\alpha = \frac{h}{b}$ (vedi figura), trova quali sono i massimi angoli di inclinazione che si possono avere in una pista blu, rossa o nera.



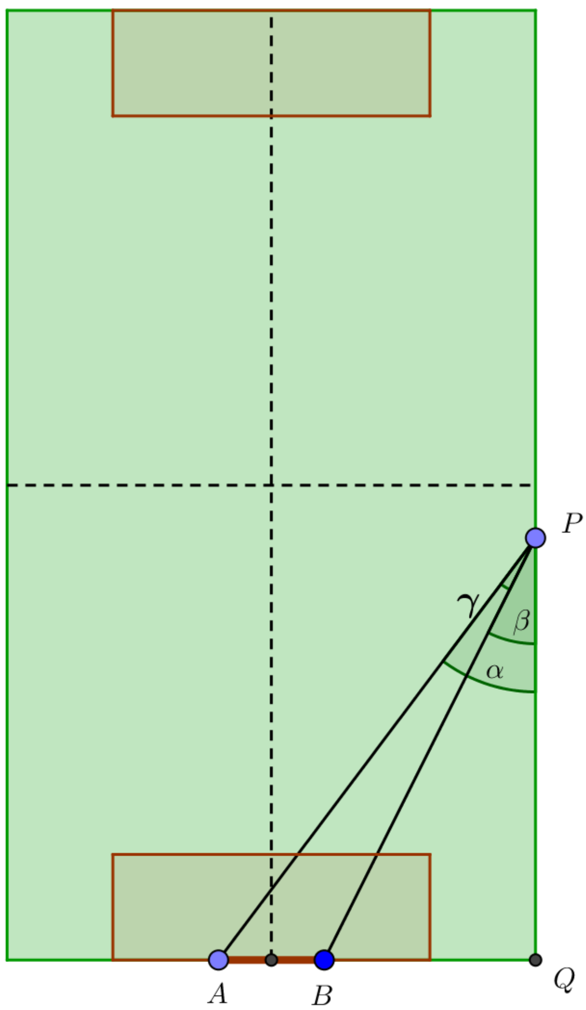
Suggerimento

Inclinazione del 25% significa quindi che $tg\alpha = 0{,}25 \rightarrow \alpha = tg^{-1}(0{,}25) \cong 14°$ ecc.

[$\max \alpha_{blu} \cong 14°$, $\max \alpha_{rossa} \cong 21{,}8°$, $\max \alpha_{nera} \cong 36{,}9°$]

5) ***Tiro in porta***

Considera un giocatore che calcia un fallo laterale dalla posizione P: indicando con γ l'angolo sotto cui vede la porta AB e supponendo di indicare con $\overline{PQ} = x$ la sua distanza dal fondo campo, determina $tg\gamma$ in funzione di x ($\overline{AB} = 7{,}32m$ e le dimensioni del campo di calcio sono $68m \cdot 105m$) .



[$tg\gamma \cong \dfrac{7{,}32x}{x^2 + 1143}$]

SCHEDA PER IL RECUPERO
FUNZIONI GONIOMETRICHE E FORMULE GONIOMETRICHE

1) Calcola

a) $tg\frac{3}{4}\pi + sen\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{11}{6}\pi + tg\frac{5}{4}\pi$ [0]

b) $sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha) - sen(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ [1]

c) $\cos(\pi-\alpha)+tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-sen(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-tg(2\pi-\alpha)$

[$tg\alpha - \cot g\alpha$]

2) Calcola

a) $sen(75°) = sen(45°+30°) =$ …………….. $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right]$

b) $\cos 75° =$ ………………………………….. $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right]$

c) $sen15° =$ ………………………………….. ………

d) $tg15° =$ …………………………………….. $\left[2-\sqrt{3}\right]$

3) Verifica le seguenti identità:

a) $\cos 2\alpha + sen2\alpha + 1 = 2\cos\alpha(sen\alpha + \cos\alpha)$

b) $sen^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha + sen^2\alpha\right)$