

Formule goniometriche

Come possiamo calcolare $\text{sen}(\alpha + \beta)$?

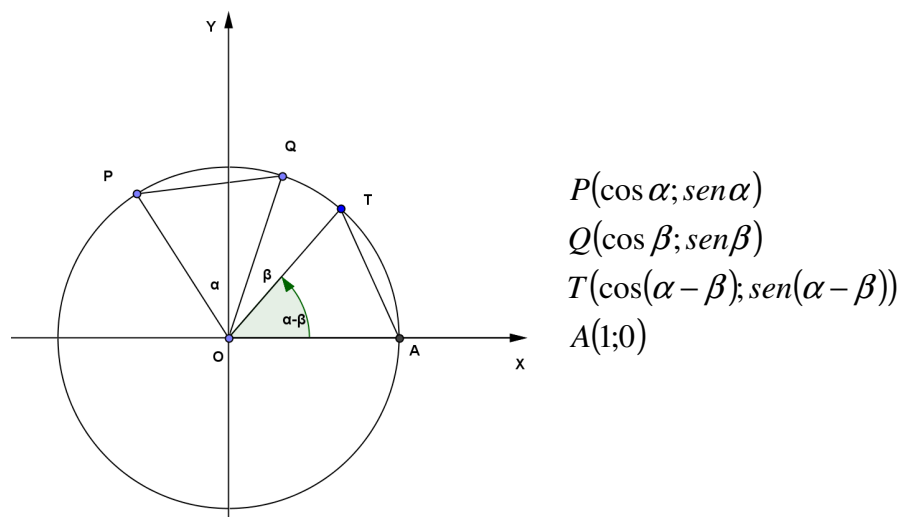
E' chiaro che non può risultare $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha + \text{sen}\beta$: se infatti fosse così e per esempio

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2} \text{ avremo } \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{2} + \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2 !$$

Dobbiamo ricavare delle relazioni che ci permetteranno di calcolare il seno, il coseno e la tangente di una somma o di una differenza di angoli.

Formule di addizione e sottrazione

1) Cominciamo con questa osservazione: se riportiamo su una circonferenza goniometrica due angoli α e β , per esempio con $\alpha > \beta$ come in figura, possiamo considerare l'angolo $\alpha - \beta$ e riportarlo con il primo lato sul semiasse positivo delle x. Avremo quindi:



Poiché $\widehat{AOT} = \widehat{QOP} = \alpha - \beta$ allora avremo anche $\overline{PQ} = \overline{AT}$ e possiamo scrivere:

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\text{sen} \alpha - \text{sen} \beta)^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \text{sen}^2(\alpha - \beta)$$

e sviluppando abbiamo:

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \text{sen}^2 \alpha - 2 \text{sen} \alpha \text{sen} \beta + \text{sen}^2 \beta = \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \text{sen}^2(\alpha - \beta)$$

Quindi poiché : $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, $\text{sen}^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1$

avremo: $1 + 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \text{sen} \alpha \text{sen} \beta = 1 + 1 - 2 \cos(\alpha - \beta)$

e quindi

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta}$$

Esempio

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} + 1)$$

Da questa formula possiamo anche ricavare $\cos(\alpha + \beta)$: basta infatti scrivere $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$.

Quindi avremo, poiché $\cos(-\beta) = \cos \beta$ mentre $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

e quindi

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

Esempio

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1)$$

2) Come si possono ricavare $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$?

Ricordando che il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{sen} \beta \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

Allora

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}[\alpha - (-\beta)] = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

Esempio

$$\operatorname{sen}(15^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1)$$

Formule goniometriche

3) E come si calcola $tg(\alpha - \beta)$ e $tg(\alpha + \beta)$?

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Se dividiamo numeratore e denominatore per $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ otteniamo:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Allora $tg(\alpha + \beta) = tg[\alpha - (-\beta)] = \frac{tg\alpha - tg(-\beta)}{1 + tg\alpha \cdot tg(-\beta)} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Esempio

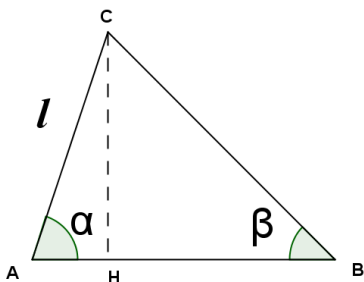
$$tg(15^\circ) = tg(45^\circ - 30^\circ) = \frac{tg45^\circ - tg30^\circ}{1 + tg45^\circ \cdot tg30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$tg(75^\circ) = tg(45^\circ + 30^\circ) = \frac{tg45^\circ + tg30^\circ}{1 - tg45^\circ \cdot tg30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

Applicazioni delle formule di addizione

Esempio 1

Dato il triangolo \hat{ABC} , acutangolo, sappiamo che $\hat{A} = \frac{4}{5}$ e $\hat{B} = 1$. Se $\overline{AC} = l$ possiamo risolvere il triangolo, cioè determinare tutti gli altri suoi elementi?



$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad (\alpha \text{ è acuto})$$

$$\tan \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\overline{AH} = l \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}l$$

$$\overline{CH} = l \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}l$$

$$\overline{HB} = \overline{CH} = \frac{4}{5}l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{7}{5}l$$

$$\overline{CB} = \overline{CH} \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{5}\sqrt{2}l$$

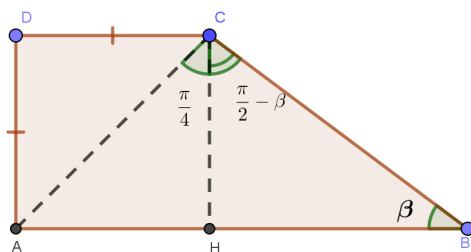
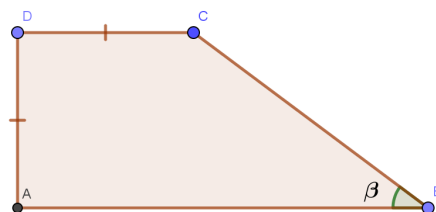
$$\hat{C} = \pi - (\alpha + \beta) \text{ e}$$

$$\sin \hat{C} = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

Esempio 2

Dato il trapezio rettangolo ABCD in cui $\overline{AD} = \overline{CD} = l$, $\hat{ABC} = \frac{3}{5}$, come si possono

calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo \hat{ACB} ?



Osserviamo che $\hat{ACH} = \frac{\pi}{4}$ e che $\hat{BCH} = \frac{\pi}{2} - \beta$ e quindi $\hat{ACB} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{3}{4}\pi - \beta$ e utilizzando le formule si possono trovare seno, coseno e tangente.

Per esempio: $\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \beta\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin\beta = \dots$

Esempio 3

Vediamo come le funzioni del tipo $y = a \cdot \text{sen}x + b \cdot \text{cos}x$ possano essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $y = A \cdot \text{sen}(x + \varphi)$ utilizzando le formule di addizione .

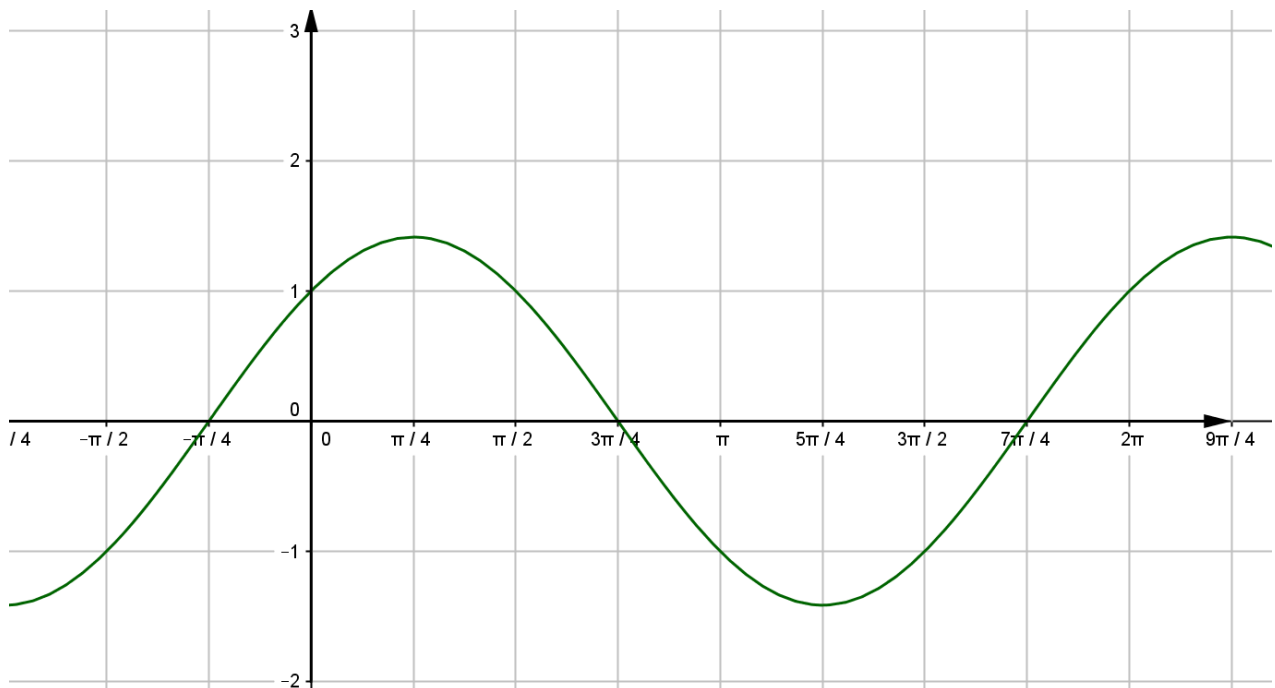
Consideriamo per esempio $y = \text{sen}x + \text{cos}x$

Sviluppiamo $A \cdot \text{sen}(x + \varphi)$ e imponiamo che risulti uguale a $\text{sen}x + \text{cos}x$.

$$A \cdot (\text{sen}x \cdot \cos \varphi + \text{cos}x \cdot \text{sen} \varphi) = \text{sen}x + \text{cos}x \rightarrow A \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen}x + A \cdot \text{sen} \varphi \cdot \text{cos}x = \text{sen}x + \text{cos}x \rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos \varphi = 1 \\ A \cdot \text{sen} \varphi = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{A \cdot \text{sen} \varphi}{A \cdot \cos \varphi} = 1 \rightarrow \text{tg} \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \\ A^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi + A^2 \cdot \text{cos}^2 \varphi = 2 \rightarrow A^2 = 2 \rightarrow A = \sqrt{2} \end{cases}$$

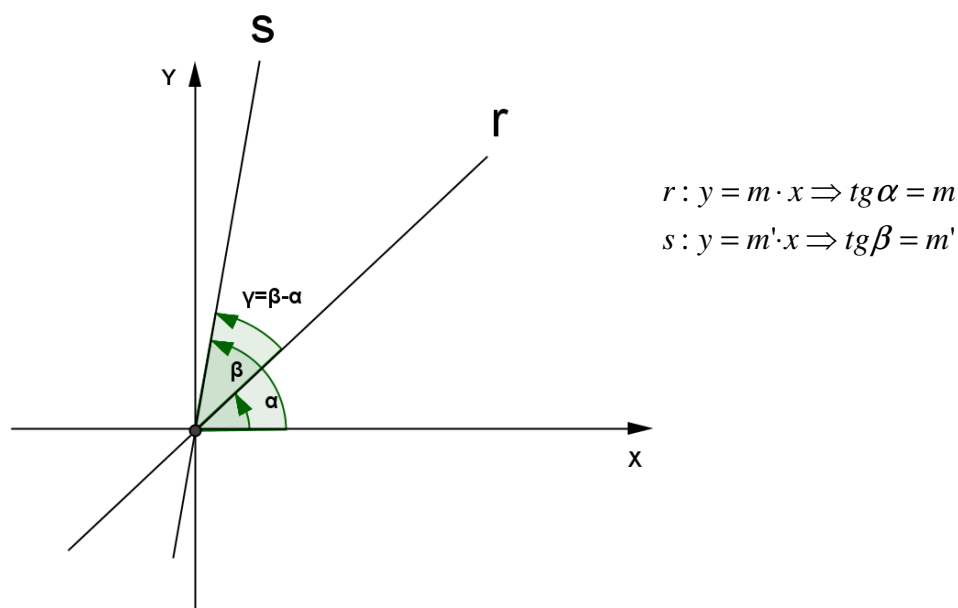
Quindi $y = \text{sen}x + \text{cos}x$ corrisponde a $y = \sqrt{2} \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ come si può verificare con Geogebra: digitando nella barra di inserimento $y = \text{sin}x + \text{cos}x$ abbiamo infatti il seguente grafico:



Angolo formato tra due rette

Ricordando che il coefficiente angolare di una retta, nel piano cartesiano, è uguale alla tangente dell'angolo α formato dalla retta con il semiasse positivo delle x , possiamo ricavare l'angolo (o la tangente dell'angolo) formato da due rette di equazione assegnata?

Per semplicità disegniamo due rette per l'origine con coefficienti angolari positivi.

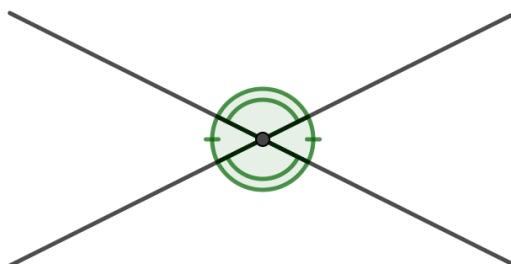


L'angolo acuto γ formato da r e s avrà tangente

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{m' - m}{1 + m \cdot m'}$$

Nota

In generale osserviamo che due rette (non perpendicolari) formano una coppia di angoli acuti (congruenti perché opposti al vertice) e una coppia di angoli ottusi congruenti e ricordando che la tangente di un angolo acuto è positiva mentre la tangente goniometrica di un angolo ottuso è negativa se vogliamo la tangente goniometrica dell'angolo acuto, che dovrà risultare positiva, dovremo applicare la formula in modo da avere un risultato positivo.



Esempio 1

Considera le rette di equazione :

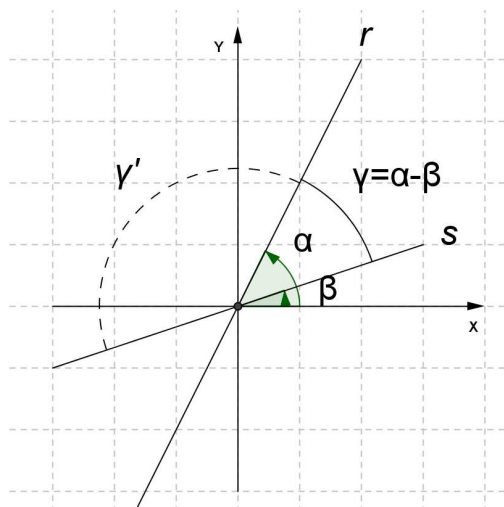
$$r : y = 2x \quad m = 2$$

$$s : y = \frac{1}{3}x \quad m' = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

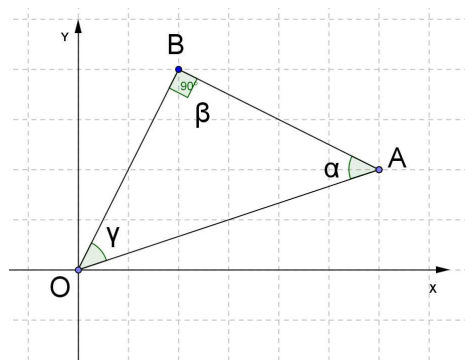
Naturalmente abbiamo anche

$$\gamma' = \pi - \gamma = \frac{3}{4}\pi$$



Esempio 2

Dato il triangolo di vertici $O(0;0)$, $A(6;2)$ $B(2;4)$, determina le tangenti goniometriche dei suoi angoli.



$$r_{OA} : y = \frac{1}{3}x \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{AOB} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow \gamma = \hat{AOB} = \frac{\pi}{4}$$

$$r_{OB} : y = 2x$$

$$r_{AB} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

La tangente di β non può essere calcolata perché r_{OB} è perpendicolare a r_{AB} e quindi $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = \gamma$$

Infatti \hat{OAB} è un triangolo rettangolo isoscele.

Formule di duplicazione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo 2α ?

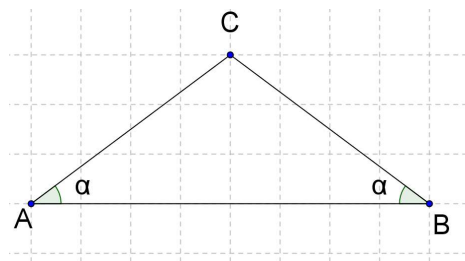
Utilizzando le formule di addizione abbiamo:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Esempio: dato un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB, se sappiamo che $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, con α l'angolo adiacente alla base, possiamo determinare le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice \hat{C} ?



$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\hat{C} = \pi - 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \sin \hat{C} &= \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

Conoscendo $\sin \hat{C}$ possiamo poi determinare anche coseno e tangente.

Osservazione: $\cos 2\alpha$ può essere sviluppato in due modi diversi utilizzando la relazione $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha &\Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) &= 2\cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

Formule di bisezione

Come possiamo calcolare il seno, il coseno e la tangente dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$?

Osserviamo che $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$. Proviamo a sviluppare

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

a) Se sostituiamo $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos \alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

b) Se sostituiamo $\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ abbiamo:

$$\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Ricaviamo infine una formula per calcolare $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = * \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = ** \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

*Nota: moltiplico numeratore e denominatore per $\cos \frac{\alpha}{2}$

$$**\text{Nota: } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha$$

Se avessimo moltiplicato per $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ avremmo ottenuto invece:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}}$$

Osserviamo che le due espressioni sono equivalenti poiché:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Formule goniometriche

Esempio 1: dato un triangolo isoscele acutangolo $\triangle ABC$ di base AB , se conosciamo $\widehat{C} = \frac{24}{25}$ e il lato $\overline{BC} = l$, possiamo risolvere il triangolo?

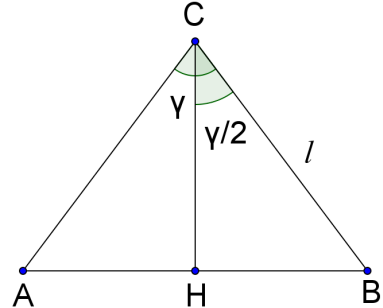
Ponendo $\widehat{C} = \gamma$ è chiaro che per risolvere il triangolo abbiamo bisogno delle funzioni goniometriche dell'angolo $\frac{\gamma}{2}$.

$$\text{sen} \gamma = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25}$$

(poiché il triangolo è acutangolo il coseno è positivo)

$$\text{Quindi } \text{sen}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{3}{5}$$

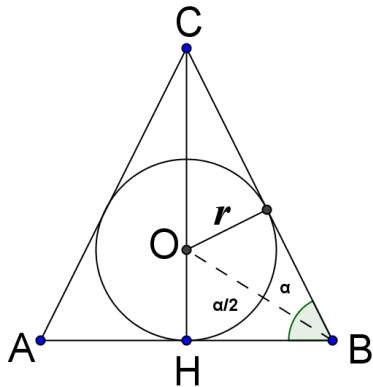
$$\text{Allora } \overline{HB} = \frac{3}{5}l \Rightarrow \overline{AB} = \frac{6}{5}l \quad \text{e} \quad \widehat{A} = \widehat{B} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$$



Esempio 2: dato un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB , se conosciamo $\text{sen} \alpha = \frac{12}{13}$ (α = angolo adiacente alla base) e il raggio r della circonferenza inscritta, possiamo risolvere il triangolo?

$$\text{sen} \alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13} \quad (\alpha \text{ è acuto})$$

$$\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13} \Rightarrow \text{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} \rightarrow \text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$$



$$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OH}}{\overline{HB}} \Rightarrow \overline{HB} = \frac{r}{\text{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}r \Rightarrow \overline{AB} = 3r$$

$$\overline{CB} = \frac{\overline{HB}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{2}r}{\frac{5}{13}} = \frac{39}{10}r$$

$$\widehat{C} = \pi - 2\alpha \Rightarrow \text{sen} \widehat{C} = \text{sen}(\pi - 2\alpha) = \text{sen} 2\alpha = 2 \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

Altre formule

1) Proviamo a ricavare $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$ in funzione della $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Possiamo a questo punto dividere per 1 e ricordare che 1 può essere pensato anche come $\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ e dividendo numeratore e denominatore per } \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ avremo}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Analogamente :

$$\cos \alpha = \cos 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ e quindi}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Queste formule si chiamano formule “**parametriche**” perché esprimono seno e coseno di un angolo in funzione del “parametro” $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ e saranno utili nella classe quinta per la risoluzione di alcuni integrali particolari.

Possiamo esprimere anche tga in funzione di $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formule goniometriche

2) Possiamo anche ricavare delle formule per esprimere il prodotto tra il seno di un angolo e il seno (o il coseno) di un altro o per esprimere la somma del seno di un angolo con il seno (o coseno) di un altro cioè per esempio, $\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$, $\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta$ ecc. oppure $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta$, $\cos\alpha + \cos\beta$ ecc.

Osserviamo per esempio che:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

Quindi:

$$\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

Esercizio 1

Analogamente se voglio ricavare $\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$ oppure $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ posso partire da.....

D'altra parte se poniamo

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

avremo $\text{sen}p + \text{sen}q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Esercizio 2

Analogamente per ottenere un'espressione di $\cos p + \cos q$ considera

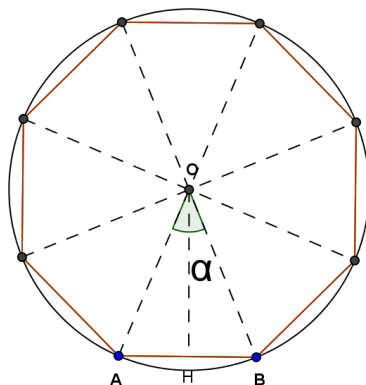
$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \dots \rightarrow \\ \cos(\alpha - \beta) &= \dots \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \dots$$

e procedi dopo aver posto $\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$

Formule di bisezione e lati dei poligoni regolari inscritti ad una circonferenza

1) Lato dell'ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r



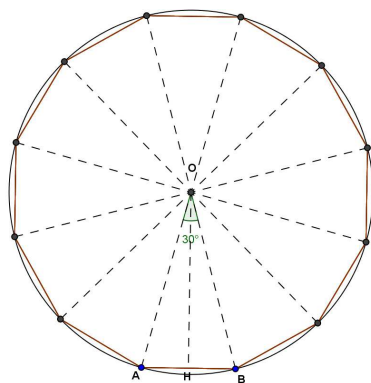
Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot \text{sen} \frac{\pi}{8}$ avremo:

$$l_8 = 2r \cdot \text{sen} \frac{\pi}{8}$$

Osservazione: si può anche ricorrere al teorema della corda per ottenere lo stesso risultato in quanto l'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB è la metà di $\alpha = \widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$.

Per calcolare $\text{sen} \frac{\pi}{8}$ si può applicare la formula di bisezione ricavando $\text{sen} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \dots\dots$

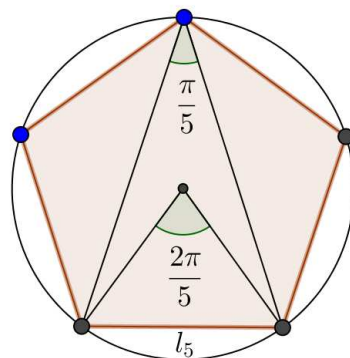
2) Lato del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r



Poiché $\alpha = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ essendo $\overline{AH} = r \cdot \text{sen} \frac{\pi}{12}$ abbiamo che $l_{12} = 2r \cdot \text{sen} \frac{\pi}{12}$ e per calcolare

$\text{sen} \frac{\pi}{12}$ possiamo usare la formula di bisezione.

3) **Pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r**



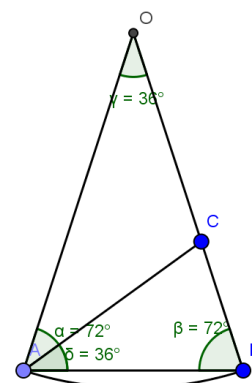
Analogamente ai casi precedenti abbiamo che il lato l_5 del pentagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r risulta

$$l_5 = 2r \cdot \text{sen} \frac{\pi}{5}$$

Se scriviamo $\text{sen} \frac{\pi}{5} = \text{sen} 2 \cdot \frac{\pi}{10} = 2 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}$ possiamo calcolare $\text{sen} \frac{\pi}{5}$ se conosciamo seno e coseno di $\frac{\pi}{10}$

NOTA

Consideriamo il decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r : se $AB = l_{10}$ vediamo che , tracciata la bisettrice AC dell'angolo \hat{BAO} , i triangoli ABO e ABC sono simili poiché l'angolo \hat{BAO} risulta 72° e quindi \hat{BAC} è 36° come l'angolo \hat{AOB} .



Quindi possiamo scrivere la seguente proporzione

$$r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10}) \Leftrightarrow l_{10}^2 = r^2 - r \cdot l_{10} = 0 \Leftrightarrow l_{10}^2 + r \cdot l_{10} - r^2 = 0 \Rightarrow l_{10} = \frac{-r \pm \sqrt{5}r}{2} \rightarrow l_{10} = \frac{(\sqrt{5} - 1)r}{2}$$

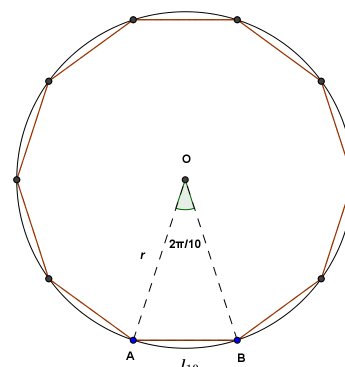
D'altra parte per il teorema della corda vale anche che:

$$l_{10} = 2r \cdot \text{sen} \frac{\pi}{10}$$

e quindi confrontando le due espressioni possiamo ricavare:

$$\text{sen} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Da cui possiamo anche ricavare $\cos \frac{\pi}{10}$ e in conclusione $\text{sen} \frac{\pi}{5}$.



PROBLEMI

TRIANGOLO RETTANGOLO E FORMULE GONIOMETRICHE

- 1) In un triangolo ABC il lato $\overline{AC} = l$, $tg\alpha = 2$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Determina gli altri lati del triangolo e $sen\gamma$.

$$\left[\overline{AB} = \frac{11\sqrt{5}}{15}l, \quad \overline{CB} = \frac{2\sqrt{5}}{3}l, \quad sen\gamma = \frac{11\sqrt{5}}{25} \right]$$

- 2) In un triangolo isoscele ABC di base AB, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = l$. Determina perimetro e area del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice $\hat{C} = \gamma$.

$$\left[2p = \frac{8}{3}l, \quad A = \frac{2\sqrt{2}}{9}l^2, \quad sen\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \quad \cos\gamma = \frac{7}{9}, \quad tg\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{7} \right]$$

- 3) In un triangolo isoscele \hat{ABC} di base AB, il lato obliquo misura l e $\cos\hat{C} = \frac{7}{25}$. Determina perimetro e area del triangolo.

$$\left[2p = \frac{16}{5}l ; \quad A = \frac{12}{25}l^2 \right]$$

- 4) Un triangolo isoscele \hat{ABC} di base AB e avente $\cos\hat{C} = \frac{1}{4}$ è inscritto in una circonferenza di raggio r . Determina i lati del triangolo e le funzioni goniometriche dell'angolo alla base.

$$\left[\overline{AB} = \frac{\sqrt{15}}{2}r ; \overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}r ; sen\left(\hat{ABC}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \dots \right]$$

- 5) In un trapezio rettangolo ABCD, la base maggiore $\overline{AB} = 56$, il lato obliquo $\overline{BC} = 50$ e $\cos\left(\hat{ABC}\right) = \frac{7}{25}$. Determina base minore e altezza del trapezio. Dopo aver verificato che il

trapezio è circoscrivibile ad una circonferenza, detto O il suo centro, calcola $sen\left(\hat{COD}\right)$.

$$\left[\overline{DC} = 42 ; \overline{AD} = 48 ; sen\left(\hat{COD}\right) = \frac{7}{5\sqrt{2}} \right]$$

- 6) Considera una semicirconferenza di raggio r e centro O e sia ABCD un trapezio rettangolo ad essa circoscritto. Sapendo che $\cos\left(\hat{ABC}\right) = \frac{1}{3}$ (AB base maggiore del trapezio), determina i lati del trapezio e calcola $sen\left(\hat{OCB}\right)$.

$$\left[\overline{AB} = r + \frac{3}{2\sqrt{2}}r ; \overline{CB} = \frac{3}{2\sqrt{2}}r ; \overline{DC} = r + \frac{r}{\sqrt{2}} ; \overline{AD} = r \quad sen\left(\hat{OCB}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$

Formule goniometriche

7) Considera il trapezio isoscele ABCD, circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r e centro O, avente $\widehat{ABC} = \frac{4}{5}$ (AB base maggiore del trapezio, BC lato obliquo). Determina i lati del trapezio e \widehat{OCB} .

$$[\overline{CB} = \overline{AD} = \frac{5}{4}r ; \overline{AB} = \frac{5}{2}r ; \overline{DC} = r ; \widehat{OCB} = \frac{2}{\sqrt{5}}]$$

8) Un trapezio rettangolo ABCD (base maggiore AB) è circoscritto ad una circonferenza di centro O e raggio r e $\widehat{ABC} = \frac{5}{13}$ (\widehat{ABC} = angolo adiacente alla base maggiore). Determina i lati del trapezio e \widehat{OCB} .

$$[\overline{CB} = \frac{13}{6}r ; \overline{AD} = 2r ; \overline{DC} = \frac{5}{3}r ; \overline{AB} = \frac{5}{2}r ; \widehat{OCB} = \frac{3}{\sqrt{13}}]$$

9) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r : y = \frac{1}{2}x$, $s : y = 2x$. Disegna le due rette e l'angolo γ . Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ .

$$[tg\gamma = \frac{3}{4}, \gamma \cong 36,87^\circ]$$

10) Determina la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette di equazione $r : y = \frac{1}{2}x$, $s : y = -\frac{1}{2}x$. Disegna le due rette e l'angolo γ . Utilizzando la calcolatrice determina il valore approssimato di γ .

$$[tg\gamma = \frac{4}{3}, \gamma \cong 53,13^\circ]$$

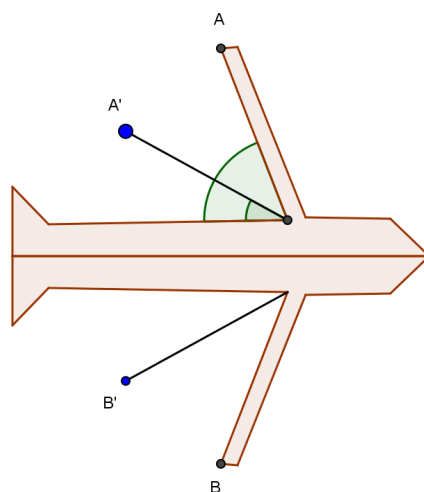
SCHEDE DI LAVORO

Trigonometria nella realtà

1) *Apertura alare*

Quanto varia l'apertura alare di un aereo dalla fase di decollo alla fase di volo?

Supponiamo che l'ala dell'aereo sia lunga 16 metri e che durante il decollo di abbia $\alpha = 70^\circ$, mentre si abbia $\alpha' = 30^\circ$ durante il volo. Di quanto varia \overline{AB} (apertura alare) cioè quanto risulta $\overline{AB} - \overline{A'B'}$?

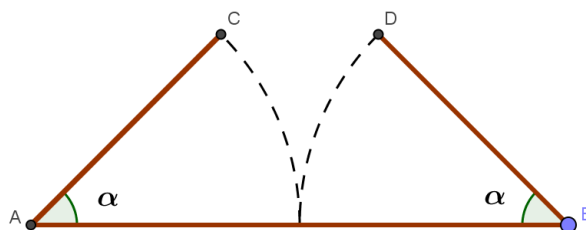


[circa 14 m]

2) *Cancello con apertura automatica*

Considera un cancello automatico costituito da due parti uguali lunghe 2,5 m ciascuna.

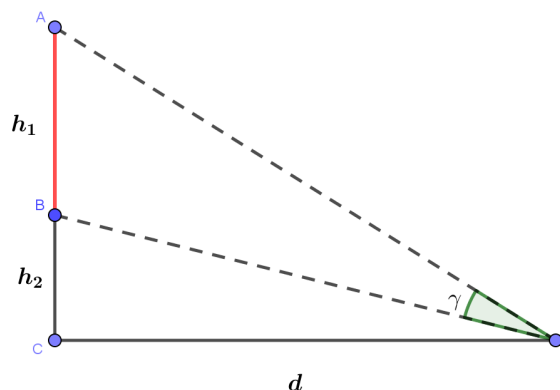
Indica con α l'angolo in figura (che varia durante l'apertura del cancello) e calcola l'apertura \overline{CD} in funzione di α . Per quale angolo si ha un'apertura di 2,5 m? E di 1 metro?



[60° ; circa 37°]

3) Angolo di visuale

Supponiamo di voler fotografare la cupola del duomo di Firenze alta $h_1 = 68$ m che si trova su una base di altezza $h_2 = 55$ metri di altezza. Se ti sei posizionato a 100 metri dalla base della cupola qual è il tuo angolo di visuale?



Suggerimento

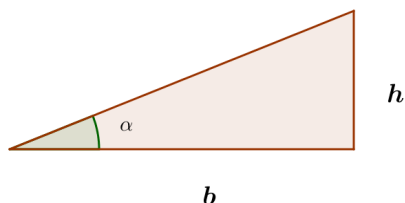
Rappresentando la cupola con il segmento AB e la base con il segmento BC, quando ti posizioni in P vedrai la cupola sotto l'angolo di visuale γ : si tratta quindi di determinare γ in funzione dei tuoi dati.

$$[\gamma \cong 22^\circ]$$

4) Piste da sci

Le piste da sci sono classificate in **blu, rosse e nere** a seconda della pendenza massima che si può trovare percorrendo la pista e rispettivamente è stabilito che siano blu se in tutti i tratti la pendenza risulta sempre inferiore al 25%, rosse se sono presenti tratti con pendenza compresa tra il 25% e il 40% e nere se ci sono tratti con pendenza tra il 40% e il 75%.

Ricordando che per pendenza si intende la tangente dell'angolo formato dalla pista con l'orizzontale cioè $tg\alpha = \frac{h}{b}$ (vedi figura), trova quali sono i massimi angoli di inclinazione che si possono avere in una pista blu, rossa o nera.



Suggerimento

Inclinazione del 25% significa quindi che $tg\alpha = 0,25 \rightarrow \alpha = tg^{-1}(0,25) \cong 14^\circ$ ecc.

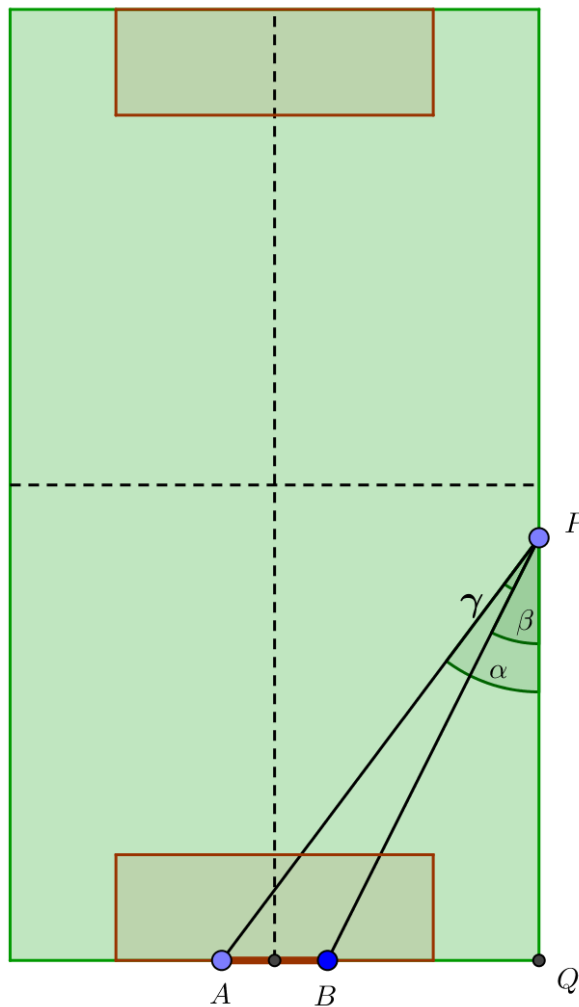
$$[\max \alpha_{blu} \cong 14^\circ, \quad \max \alpha_{rossa} \cong 21,8^\circ, \quad \max \alpha_{nera} \cong 36,9^\circ]$$

5) *Tiro in porta*

Considera un giocatore che calcia un fallo laterale dalla posizione P: indicando con γ l'angolo sotto cui vede la porta AB e supponendo di indicare con $\overline{PQ} = x$ la sua distanza dal fondo campo, determina $\text{tg}\gamma$ in funzione di x ($\overline{AB} = 7,32\text{m}$ e le dimensioni del campo di calcio sono $68\text{m} \cdot 105\text{m}$). A quale distanza si ha il massimo angolo γ ?

Suggerimento

Ricorda che la funzione tangente tra 0 e 90° è crescente e quindi basta trovare qual è il valore di x per cui $\text{tg}\gamma$ è massima disegnando la funzione con Geogebra.



$$\left[\text{tg}\gamma \cong \frac{7,32x}{x^2 + 1143} ; x \cong 34\text{m} \right]$$

SCHEMA PER IL RECUPERO
FUNZIONI GONIOMETRICHE E FORMULE GONIOMETRICHE

1) Calcola

a) $tg \frac{3}{4}\pi + sen \frac{2}{3}\pi - cos \frac{11}{6}\pi + tg \frac{5}{4}\pi$ [0]

b) $sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot cos(-\alpha) - sen(\pi + \alpha) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ [1]

c) $cos(\pi - \alpha) + tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - sen(-\alpha) - cos(\pi + \alpha) - cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - tg(2\pi - \alpha)$
[$tg\alpha - cot g\alpha$]

2) Calcola

a) $sen(75^\circ) = sen(45^\circ + 30^\circ) = \dots\dots\dots$ $\left[\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \right]$

b) $cos 75^\circ = \dots\dots\dots$ $\left[\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right]$

c) $sen 15^\circ = \dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

d) $tg 15^\circ = \dots\dots\dots$ $[2 - \sqrt{3}]$

3) Verifica le seguenti identit :

a) $cos 2\alpha + sen 2\alpha + 1 = 2 cos \alpha (sen \alpha + cos \alpha)$

b) $sen^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} cos \alpha = \frac{1}{2} (cos^2 \alpha + sen^2 \alpha)$