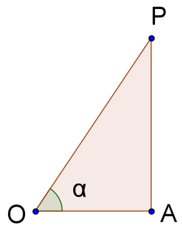
Triangolo rettangolo

Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{OPA}$ sappiamo che:



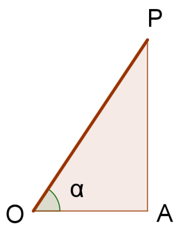
$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}$$

Possiamo perciò utilizzare $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ per determinare gli elementi del triangolo (lati ed angoli).

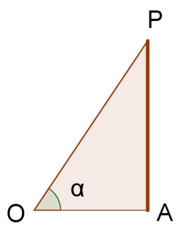
a) Conoscendo l'ipotenusa $\overline{OP}$ e l'angolo α (cioè $sen\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$)



cateto opposto ad α = $\overline{PA}$ = ipotenusa $\cdot\, sen\alpha$

cateto adiacente ad α = $\overline{OA}$ = ipotenusa $\cdot \cos\alpha$

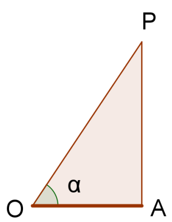
b) Conoscendo il cateto $\overline{AP}$ e l'angolo opposto α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{sen\alpha}$$

$$cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot \cos\alpha$$

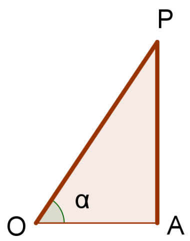
c) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'angolo adiacente α



$$ipotenusa = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{\cos\alpha}$$

$$cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha = ipotenusa \cdot sen\alpha$$

d) Conoscendo il cateto $\overline{PA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ posso trovare



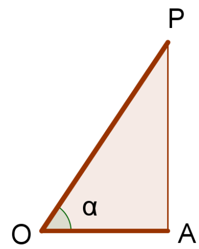
$$sen\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}}$$

e quindi anche $\cos\alpha$ e $tg\alpha$

Dalla conoscenza di senα posso risalire all'angolo α (tasto di "inversione" della calcolatrice).

Per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure $\cos\alpha$ poiché $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha$

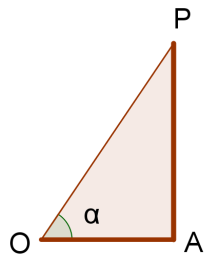
e) Conoscendo il cateto $\overline{OA}$ e l'ipotenusa $\overline{OP}$ abbiamo



$$\cos\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \alpha$$

$\overline{AP}$ con il teorema di Pitagora oppure $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha$

f) Conoscendo i due cateti $\overline{PA}$ e $\overline{OA}$ possiamo determinare



$$tg\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \alpha$$

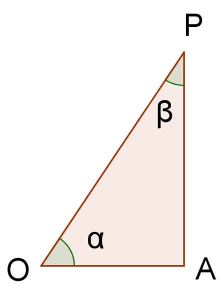
Possiamo determinare $\overline{OP}$ applicando il teorema di Pitagora oppure con la relazione $\overline{OP} = \dfrac{\overline{PA}}{sen\alpha}$

Nota: naturalmente in tutti questi esempi dalla conoscenza di α si può ricavare anche $O\hat{P}A = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

In conclusione, dalla conoscenza di 2 elementi di un triangolo rettangolo, che però non siano due angoli, posso determinare tutti gli altri (si dice **"risolvere"** il triangolo).

Conoscere α equivale a conoscere $sen\alpha$ o $\cos\alpha$ o $tg\alpha$.

Osserviamo che si ha



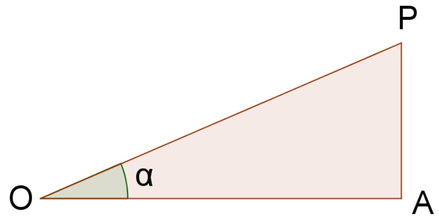
$$sen\alpha = \frac{cateto \quad opposto \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa} = \frac{cateto \quad adiacente \quad a \quad \beta}{ipotenusa} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto \quad adiacente \quad ad \quad \alpha}{ipotenusa} = \frac{cateto \quad opposto \quad a \quad \beta}{ipotenusa} = sen\beta$$

$$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$$

Esempi

a) Nel triangolo rettangolo $O\overset{\Delta}{P}A$ sia l'ipotenusa $\overline{OP}=2$ e $sen\alpha=\frac{1}{3}$ $\left(\alpha=P\hat{O}A\right)$. Determinare gli altri elementi del triangolo.



$\overline{OP}=2$

$sen\alpha=\frac{1}{3}$

$\overline{AP}=\overline{OP}\cdot sen\alpha=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Per determinare $\overline{OA}$ posso anche utilizzare il teorema di Pitagora oppure ricavo

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\Rightarrow\overline{OA}=\overline{OP}\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

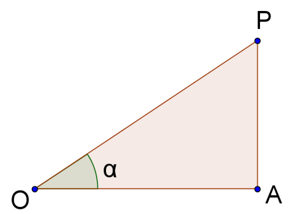
Se $\beta=O\hat{P}A=\frac{\pi}{2}-\alpha$ abbiamo

$sen\beta=\cos\alpha$
$\cos\beta=sen\alpha$

Per avere un'idea della misura degli angoli α e β possiamo utilizzare la calcolatrice premendo, per esempio, il tasto SIN^{-1} che permette di risalire all'angolo che ha come valore del seno il numero indicato.
Prendendo $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ otteniamo $\alpha\cong 19{,}47^{\circ}$.

Infine $\beta=90°-\alpha\cong(70{,}53)°$

b)



$\overline{AP}=3$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

Se $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ abbiamo $sen\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

Quindi $\overline{OP} = \dfrac{\overline{AP}}{\frac{3}{5}} = 3 \cdot \dfrac{5}{3} = 5$

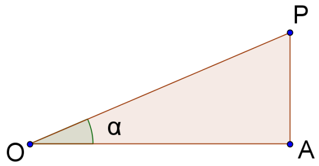
e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 4$ (oppure con il teorema di Pitagora)

Per ricavare α utilizzando per esempio il tasto $\cos^{-1}$ della calcolatrice abbiamo

$$\cos^{-1}\frac{4}{5} \cong (36{,}86)^\circ$$

e quindi $\beta = O\hat{P}A = 90^\circ - \alpha \cong (53{,}14)^\circ$

c)



$\overline{OA} = 2$

$tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Se $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ posso ricavare $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

oppure ricordare che $\quad sen^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1} \quad$ e $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1}{tg^2\alpha + 1}$

Si ottiene, in ogni caso, che $sen\alpha = \dfrac{1}{3}$ e $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ da cui

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OA}}{\cos\alpha} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

e $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

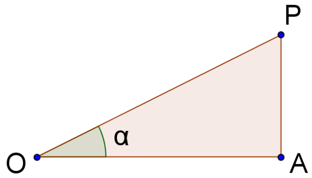
Utilizzando la calcolatrice $\alpha = tg^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{4} \cong (19{,}47)^\circ$ e $\beta = 90^\circ - \alpha$

Nota: il problema poteva essere risolto anche così

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = tg\alpha \Rightarrow \overline{AP} = \overline{OA} \cdot tg\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e $\overline{OP}$ si può trovare con il teorema di Pitagora.

d)

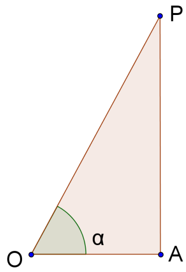


$\overline{OP} = 8$

$\overline{AP} = 5$

Posso determinare $sen\alpha = \frac{5}{8}$ e con la calcolatrice $\alpha \cong (38,68)^\circ$ e per determinare $\overline{OA}$ posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure calcolare $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39}$

e)



$\overline{OP} = 10$

$\overline{OA} = 4$

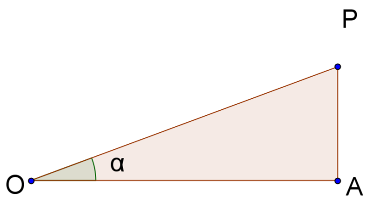
Determino $\cos\alpha = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (66,42)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare $\overline{AP}$, basterà calcolare

$$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot sen\alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 2\sqrt{21}$$

$sen\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ e avrò

f)



$\overline{AP} = 2$

$\overline{OA} = 2\sqrt{15}$

Posso determinare $tg\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (14,47)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare $\overline{OP}$ basta ricavare $sen\alpha$ (o $\cos\alpha$) da $tg\alpha$ .Risoluzione

Per esempio

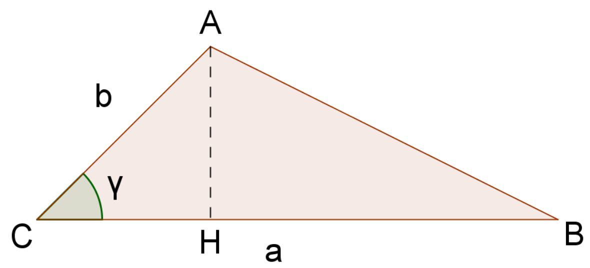
.

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + 1} = \frac{1}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow sen\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{sen\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

Area di un triangolo

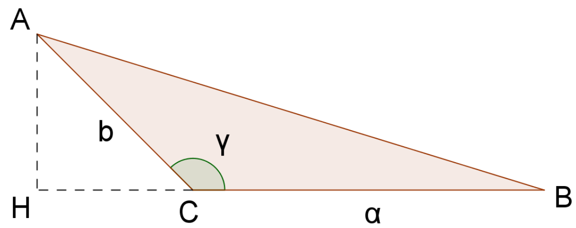
Supponiamo di conoscere due lati di un triangolo e l'angolo compreso: possiamo calcolare l'area?



Tracciamo l'altezza AH : $\overline{AH} = b sen\gamma$

e quindi area $(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

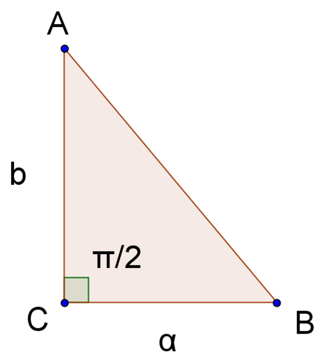
Osserviamo che se anche γ fosse ottuso avremo:



$$\overline{AH} = b \cdot sen(\pi - \gamma) = b \cdot sen\gamma$$

e quindi ancora area $(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\gamma$.

Se, come caso particolare, avessi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ il triangolo sarebbe rettangolo in C e infatti:

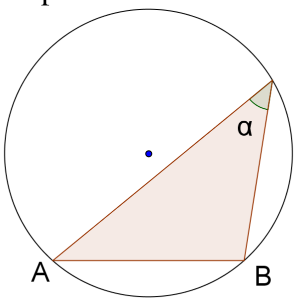


$$area(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} ab$$

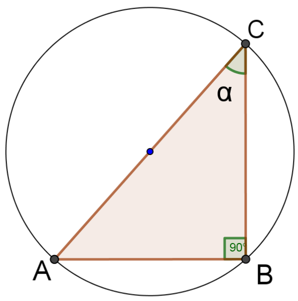
$$sen\gamma = sen\frac{\pi}{2} = 1$$

Lunghezza di una corda di una circonferenza

Consideriamo una corda AB in una circonferenza di raggio r: se conosciamo un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda possiamo trovare $\overline{AB}$?



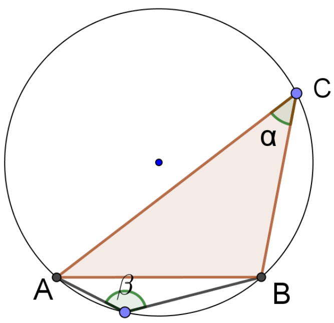
Sappiamo che tutti gli angoli che insistono su AB sono uguali: disegniamo allora quello che ha un lato passante per il centro della circonferenza.



Il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è rettangolo in B e quindi, essendo $\overline{AC} = 2R$ abbiamo:

$$\overline{AB} = 2R \cdot sen\ \alpha$$

Osserviamo che questa relazione vale anche considerando un angolo β come in figura: infatti $\beta = \pi - \alpha$ (α e β sono angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza) e quindi $sen\beta = sen\alpha$



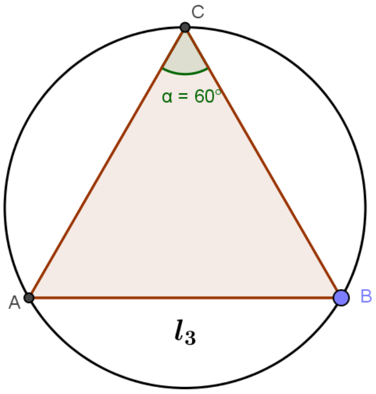
$$\overline{AB} = 2R \cdot sen\beta$$

Quindi in generale quindi abbiamo il cosiddetto "**teorema della corda"**

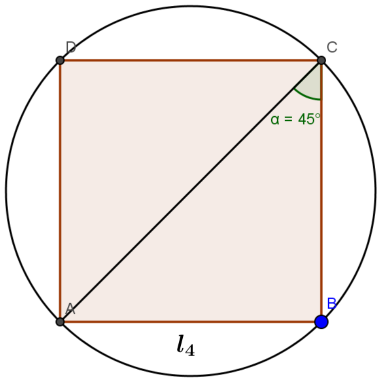
$$\overline{AB} = 2R \cdot seno \text{ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB)}$$

NOTA

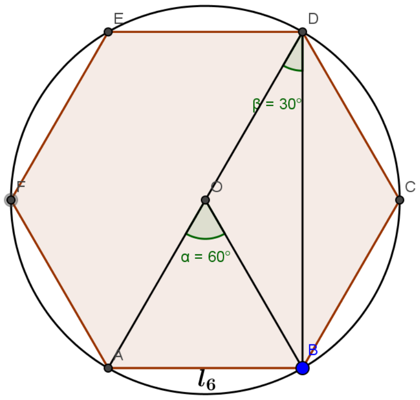
Utilizzando questo teorema possiamo ricavare facilmente il lato del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio r.



$$l_3 = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot r$$



$$l_4 = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot r$$

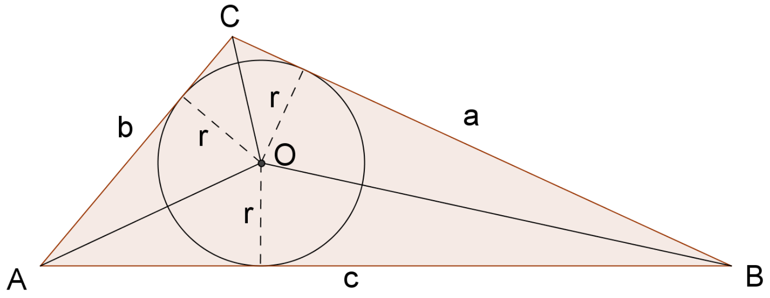


$$l_6 = 2r \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2r \cdot \frac{1}{2} = r$$

Circonferenza inscritta e circoscritta ad un triangolo

Dato un triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ come possiamo calcolare il raggio R della circonferenza circoscritta e il raggio r della circonferenza inscritta?

Cominciamo con la circonferenza inscritta.



L'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ è data dalla somma delle aree dei triangoli aventi base a, b, c e altezza r e quindi:

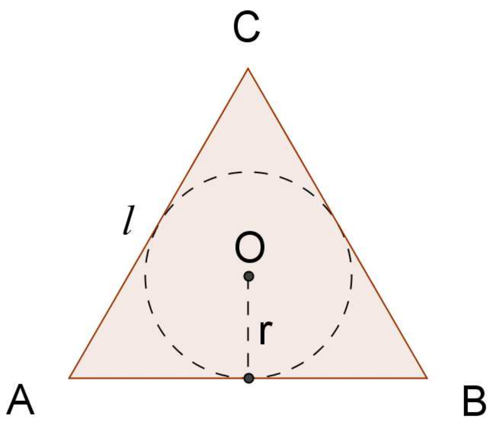
$$S = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r$$
$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \qquad \text{ma } \frac{a+b+c}{2} = p(semiperimetro)$$

e quindi $S = r \cdot p \Rightarrow \; r = \dfrac{S}{p}$

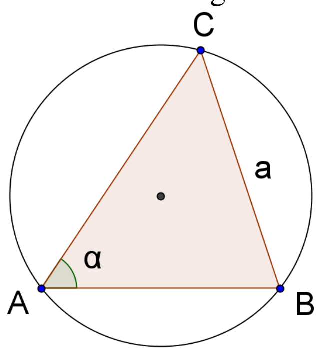
Quindi conoscendo l'area S e il semiperimetro possiamo calcolare il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo.

Esempio: in un triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$ di lato l abbiamo:

$$r = \left(\frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{\left(3\frac{l}{2}\right)} = \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\sqrt{3}\right)$$



Consideriamo ora la circonferenza circoscritta al triangolo



Ricordando che la corda $\overline{BC} = diametro \cdot sen\alpha$

$$a = 2R \cdot sen\alpha \Rightarrow \quad R = \frac{a}{2sen\alpha} \qquad (1)$$

Naturalmente è anche $R = \dfrac{b}{2sen\beta} = \dfrac{c}{2sen\gamma}$

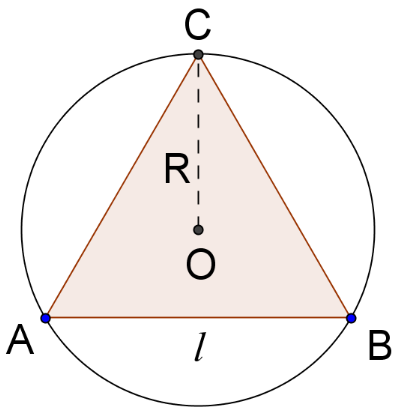
Possiamo anche scrivere, moltiplicando nella (1) per $b \cdot c$ numeratore e denominatore, e ricordando che $\dfrac{1}{2}bc \cdot sen\alpha = area\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) = S$

$$R = \frac{a}{2sen\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2sen\alpha \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

Quindi conoscendo i lati del triangolo e l'area posso determinare R.

Esempio: in un triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$ di lato l abbiamo:

$$R = \frac{l \cdot l \cdot l}{4 \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \qquad \left(= \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3} \right)$$



PROBLEMI
TRIANGOLO RETTANGOLO

1. In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{AB} = 2a$ e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo.

   [2p = $\frac{9}{2}a$; A = $\frac{3}{4}a^2$]

2. In un triangolo isoscele ABC di base AB , il lato obliquo $\overline{CB} = l$ e $tg\alpha = 2$ ($\alpha = A\hat{B}C$). Determina perimetro e area del triangolo ABC. Determina infine la misura dell'altezza AK relativa al lato obliquo.

   [$2p = \frac{2}{5}\sqrt{5}l + 2l$; $A = \frac{2}{5}l^2$; $\overline{AK} = \frac{4}{5}l$]

3. In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo e la base minore misurano a e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ dove α è uno degli angoli adiacenti alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

   [$2p = \frac{9}{2}a$; $A = \frac{5\sqrt{15}}{16}a^2$]

4. In un trapezio rettangolo ABCD la diagonale minore AC misura a, forma un angolo retto con il lato obliquo BC e $sen\alpha = \frac{3}{5}$ dove α è l'angolo acuto adiacente alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

   [$2p = \frac{22}{5}a$; $A = \frac{68}{75}a^2$]

5. In un triangolo isoscele ABC di base AB il lato obliquo misura $2a$ e $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dove α è l'angolo alla base. Determina la misura delle altezze CH e AK del triangolo.

   [$\overline{CH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}a$; $\overline{AK} = \frac{8}{5}a$]

6. In un trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 20 e la base minore DC misura 10. Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, dove α è l'angolo ottuso adiacente alla base minore, determina perimetro e area del trapezio.

   [$2p = 68$; $A = 256$]

7. In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ si prolunga il diametro dalla parte di B e si considera un punto P tale che, tracciata da P la tangente t alla semicirconferenza e detto T il punto di tangenza, si abbia $sen(A\hat{P}T) = \frac{3}{5}$. Tracciata la tangente t' alla semicirconferenza in A e detto Q il punto di intersezione tra t e t', determina perimetro e area del triangolo $A\overset{\Delta}{P}Q$.

[$2p = 8r$; $A = \frac{8}{3}r^2$]

8. Dato un trapezio rettangolo ABCD avente l'altezza $\overline{AD} = a$, $sen(B\hat{A}C) = \frac{3}{5}$ (AB base maggiore, AC diagonale minore), $\cos(A\hat{B}C) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determina perimetro e area di ABCD.

[2p=$\frac{17}{3}a + \sqrt{3}a$; $A = \frac{8+3\sqrt{3}}{6}a^2$]

9. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 2a$ si consideri il punto medio O di BC e si tracci la perpendicolare a BC per O, indicando con M l'intersezione di questa con il cateto AB. Sapendo che $tg(A\hat{B}C) = \frac{3}{4}$, determinare il perimetro del quadrilatero ACOM.

[$2p = \frac{33}{10}a$]

10. In un trapezio rettangolo ABCD, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Sapendo che $\overline{AD} = a$ e che $tg(A\hat{B}C) = \frac{3}{4}$, determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = \frac{11}{2}a$; $A = \frac{17}{12}a^2$]

11. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura a e l'angolo che essa forma con uno dei due cateti ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Calcola perimetro e area del triangolo.

[$2p = 5a$; $A = \frac{25}{24}a^2$]

12. In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, il raggio della circonferenza inscritta misura r e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina i lati del triangolo.

$[\overline{AB} = 2\sqrt{2}r\,;\ \overline{BC} = 3\sqrt{2}r\,]$

13. In un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB, $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ e $\cos(A\hat{B}C) = \frac{1}{3}$. Determina perimetro e area del triangolo e l'altezza AK relativa a BC.

$[\,2p = \frac{8}{3}a\,;\ A = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2\,;\ \overline{AK} = \frac{4}{9}\sqrt{2}a\,]$

14. In un trapezio scaleno ABCD la base minore DC è uguale ad uno dei due lati obliqui e si ha $\overline{DC} = \overline{AD} = l$. Sapendo che $D\hat{A}B = \frac{\pi}{4}$ e che $tg(A\hat{B}C) = 2$, determina i lati del trapezio e le funzioni goniometriche di $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

$[\,\overline{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2}+4}{4}\right)l\,;\ \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}l\ \ \hat{C} = \pi - \alpha\,....;\ \hat{D} = \frac{3}{4}\pi\ \ ]$

15. Un trapezio isoscele di base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di raggio r e, indicato con α uno degli angoli alla base, si ha $sen\alpha = \frac{24}{25}$. Determina i lati del trapezio.

$[\,\overline{AB} = \frac{8}{3}r\,;\ \overline{DC} = \frac{3}{2}r\,;\ \overline{CB} = \overline{AD} = \frac{25}{12}r\,]$

16. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 3a$ si ha $\cot g\left(A\hat{B}C\right) = 2$. Considera P su BC tale che $\overline{BP} = a$ e traccia da P la perpendicolare all'ipotenusa che incontra il cateto AB in Q. Determina l'area del quadrilatero AQPC.

$\left[\frac{31}{20}a^2\right]$

SCHEDA DI VERIFICA
Funzioni goniometriche e triangolo rettangolo

1) Determina graficamente α nella circonferenza goniometrica,ricava le rimanenti funzioni goniometriche di α e infine calcolane il valore approssimato di α con la calcolatrice:

a) $sen\alpha = \frac{2}{3} \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $tg\alpha = 4 \qquad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

2) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $sen\frac{2}{3}\pi + tg\frac{2}{3}\pi + sen\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos\frac{7}{6}\pi + sen(-\frac{\pi}{4}) + \cos\frac{7}{4}\pi + tg\frac{4}{3}\pi$

b) $sen(\pi-\alpha) - tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) + sen(\pi+\alpha) - \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) - \cos(2\pi-\alpha) + \cot g(\pi+\alpha)$

3) Disegna il grafico di

a) $y = 3sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $y = \frac{3}{2}\cos(2x)$

Problema 1

Considera un triangolo isoscele ABC di base $\overline{AB} = 2a$ e sia $tg(A\hat{B}C) = 3$. Determina perimetro e area del triangolo.

$\left[2p = 2\cdot\sqrt{10}a + 2a; \quad A = 3a^2\right]$

Problema 2

In un trapezio isoscele ABCD l'altezza è uguale alla base minore $\overline{CD} = l$ e $sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dove α è l'angolo adiacente alla base minore. Determina il perimetro e l'area del trapezio.

$[\,2p = 6l + 2\cdot\sqrt{5}l; \quad A = 3l^2\,]$