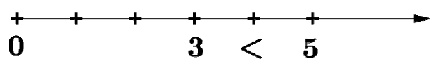
Disequazioni di primo grado

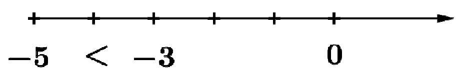
Disuguaglianze numeriche

Esempio: $3 < 5$ è una disuguaglianza numerica e si legge 3 minore di 5



Nota: posso anche scrivere $5 > 3$ (5 maggiore di 3)

Esempio: $-3 > -5$ (oppure $-5 < -3$)



Proprietà delle disuguaglianze

1) Aggiungendo uno stesso numero ad entrambi i membri di una disuguaglianza numerica si ottiene una disuguaglianza dello stesso "verso":

$$3 < 5$$
$$3 + 2 < 5 + 2$$

2) Moltiplicando (o dividendo) entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo si ottiene una disuguaglianza dello stesso "verso":

$$3 < 5$$
$$3 \cdot 2 < 5 \cdot 2$$

2') Moltiplicando (o dividendo) entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo si ottiene una disuguaglianza di verso contrario:

$$3 < 5$$
$$3 \cdot (-2) > 5 \cdot (-2)$$

3) Se $a < b$ con a e b concordi $\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Esempi

$3 < 5 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$; $\quad -4 < -2 \Rightarrow -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$

4) Sommando "membro a membro" due disuguaglianze dello stesso verso otteniamo una disuguaglianza dello stesso verso:

$$3 < 5 \text{ e } 2 < 7 \Rightarrow 3 + 2 < 5 + 7$$

Disequazioni di primo grado ad una incognita

Consideriamo una disuguaglianza in cui compare un'incognita x.
Esempio: $3x-2>4$ è una "disequazione" di 1° grado in x.
Risolvere una disequazione significa determinare i valori di x che rendono vera la disuguaglianza.
Come possiamo risolvere $3x-2>4$?
Possiamo usare due principi di equivalenza che derivano dalle proprietà delle disuguaglianze che abbiamo già visto.

Primo principio di equivalenza

Data una disequazione, si ottiene una disequazione equivalente aggiungendo ad entrambi i membri uno stesso numero o espressione.

Per esempio: $3x-2>4$
$$3x-2+2>4+2$$
$$3x>4+2$$

Quindi, utilizzando questo principio, un termine può essere **trasportato** da un membro all'altro membro, **cambiandolo di segno** (come per le equazioni).

Secondo principio di equivalenza

Per trasformare una disequazione in una equivalente si può:

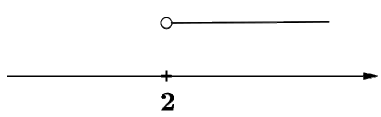
- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso **numero positivo**;
- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso **numero negativo** ma **cambiare il verso** della disequazione.

Nel nostro esempio: $3x>6 \rightarrow \quad \frac{3x}{3}>\frac{6}{3} \rightarrow \quad x>2$

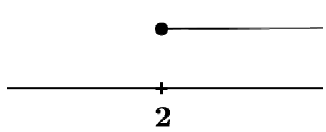
Nota: se vogliamo moltiplicare per -1 tutti i termini di una disequazione dobbiamo invertire il verso.

Esempio: $-2x>5 \rightarrow 2x<-5 \rightarrow x<-\frac{5}{2}$

Osservazione
Le soluzioni di una disequazione sono quasi sempre "intervalli" cioè infiniti numeri (minori di un dato numero, maggiori di un dato numero…). Si possono rappresentare questi "intervalli" sulla retta orientata.
Per esempio per indicare $x>2$ possiamo fare così



Per convenzione se mettiamo un cerchietto vuoto vuol dire che 2 non è soluzione.
Se la nostra disequazione fosse stata $x \geq 2$ avremmo disegnato un cerchietto "pieno" in corrispondenza del 2.



Esempi

Proviamo a risolvere qualche disequazione di 1° grado in x.

1) $$3x-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x>\frac{x+1}{2}$$

Calcoliamo il denominatore comune e riduciamo allo stesso denominatore:

$$\frac{18x-2+3x}{6}>\frac{3x+3}{6}$$

Eliminiamo il denominatore comune (moltiplicando per 6)

$$18x-2+3x>3x+3$$

Trasportiamo i termini con l'incognita al 1° membro e quelli noti al 2° membro:

$$18x+3x-3x>2+3$$

$$18x>5$$

Dividiamo entrambi i membri per 18:

$$x>\frac{5}{18}$$

2) $$x+5-2x<1+3x-4x$$

$$x-2x-3x+4x<-5+1$$

$$0\cdot x<-4$$

$0<-4$ disuguaglianza falsa

Quindi non c'è nessun valore di x che rende vera la disuguaglianza iniziale e la disequazione è **impossibile** (nessuna soluzione).

3) $$3+x-1+2x>3x-1$$

$$x+2x-3x>-3+1-1$$

$$0\cdot x>-3$$

$0>-3$ disuguaglianza vera

Quindi ogni valore di x rende vera la disuguaglianza e la disequazione è **sempre verificata** ($\forall x\in\ \Re$).

Sistemi di disequazioni di primo grado ad una incognita

Un sistema di disequazioni di primo grado ad una incognita è costituito da due o più disequazioni di primo grado in cui compare la stessa incognita: **risolvere un sistema significa cercare i valori che verificano tutte le disequazioni del sistema** (se non esistono si dice che il sistema è impossibile).
Per indicare che due o più disequazioni formano un sistema si "legano" con una parentesi graffa.

Esempio 1

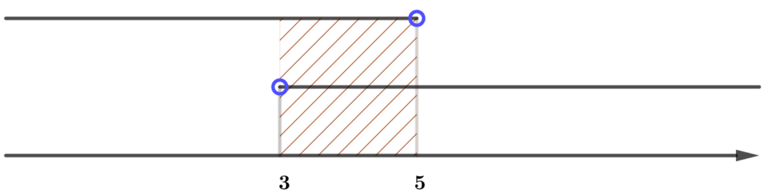
Consideriamo il seguente sistema di due disequazioni di primo grado nella stessa incognita *x*:

$$\begin{cases} x-5<0 \\ 2x-6>0 \end{cases}$$

Risolviamo entrambe le disequazioni:

$$\begin{cases} x-5<0 \rightarrow x<5 \\ 2x-6>0 \rightarrow 2x>6 \rightarrow x>3 \end{cases}$$

Adesso per visualizzare **le soluzioni "comuni" alle due disequazioni** rappresentiamo le soluzioni graficamente sulla retta numerica:



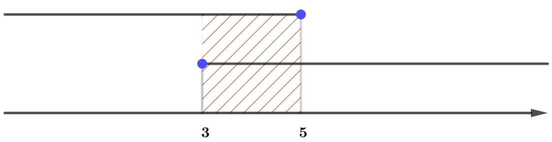
Nota: ricorda che per rappresentare i numeri $x<5$ ed indicare che 5 non è compreso mettiamo un **pallino "vuoto"** in corrispondenza del 5 (e analogamente per $x>3$).

Vediamo perciò che la soluzione del sistema è costituita dai numeri compresi tra 3 e 5 poiché sono quelli che verificano entrambe le disequazioni del sistema e per indicarli scriviamo

$$3<x<5$$

Nota: se se il sistema fosse stato

$$\begin{cases} x-5\le 0 \rightarrow x\le 5 \\ 2x-6\ge 0 \rightarrow x\ge 3 \end{cases}$$

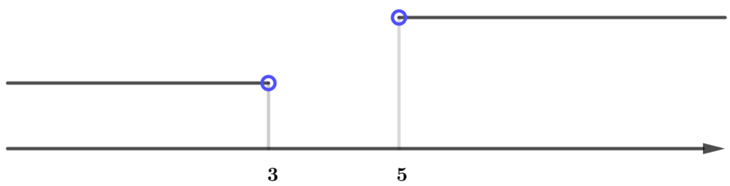


Per indicare che il 3 e il 5 sono tra le soluzioni ricorda di usare un **pallino "pieno"** in corrispondenza di 3 e 5 e la soluzione del sistema risulta $3\le x\le 5$.

Esempio 2

Consideriamo ora $\begin{cases} x-5>0 \\ 2x-6<0 \end{cases}$: risolvendo abbiamo: $\begin{cases} x-5>0 \rightarrow x>5 \\ 2x-6<0 \rightarrow 2x<6 \rightarrow x<3 \end{cases}$

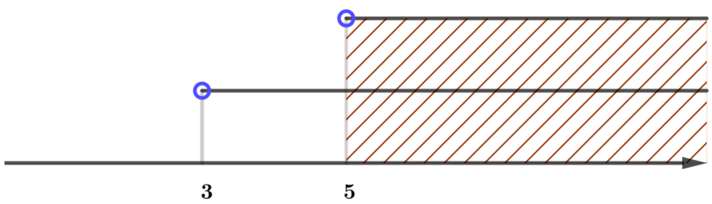
Rappresentiamo le soluzioni graficamente:



In questo caso vediamo che non ci sono numeri che verificano entrambe le disequazioni e quindi **il sistema è impossibile**.

Esempio 3

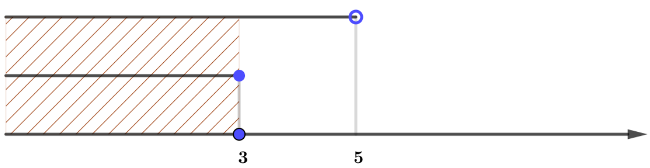
Se abbiamo $\begin{cases} x-5>0 \\ 2x-6>0 \end{cases}$ risolvendo abbiamo: $\begin{cases} x-5>0 \rightarrow x>5 \\ 2x-6>0 \rightarrow 2x>6 \rightarrow x>3 \end{cases}$



e quindi in questo caso la soluzione del sistema è $x>5$.

Esempio 4

Se abbiamo $\begin{cases} x-5<0 \\ 2x-6\leq 0 \end{cases}$ risolvendo abbiamo: $\begin{cases} x-5<0 \rightarrow x<5 \\ 2x-6\leq 0 \rightarrow x\leq 3 \end{cases}$



e quindi in questo caso la soluzione del sistema è $x\leq 3$.

ESERCIZI

Disequazioni di primo grado numeriche intere

1) $3x-5<-2$ $[x<1]$

2) $5(x-1)<2(x-3)$ $[x<-\frac{1}{3}]$

3) $-x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{2}>0$ $[x<0]$

4) $4x-3<-\frac{2}{3}x+3$ $[x<\frac{9}{7}]$

5) $\frac{7x-1}{2}>-\frac{(2x+1)}{4}$ $[x>\frac{1}{16}]$

6) $(x-1)(x+2)+(1-x)(2x+3)\le 2-x^2$ $[\forall x\in \Re]$

7) $(x-1)(x+1)-(x-3)^2<3$ $[x<\frac{13}{6}]$

8) $6x+7>\frac{1}{3}(9x-3)$ $[x>-\frac{8}{3}]$

9) $\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)>2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ [impossibile]

10) $x-\frac{1}{3}<2\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $[x>\frac{8}{3}]$

11) $\frac{x-3}{10}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)>\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $[x<-\frac{9}{2}]$

12) $(x-1)^2-3x<(x-3)(x+3)$ $[x>2]$

13) $4(5x-1)+2(3x+1)^2>3x(6x+5)-2x-3$ $[x>-\frac{1}{19}]$

14) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)<\frac{1}{3}-2\left(x+\frac{1}{3}\right)$ $[x<0]$

15) $\frac{5}{2}x+\frac{2x-2}{3}-\frac{(1-x)}{3}-\left(\frac{3x+1}{2}+2x\right)\ge\frac{3}{2}$ [impossibile]

16) $x-4(x+2)\le 2x-[x-(3-4x)]$ $[\forall x\in \mathbb{R}]$

17) $x\left(1-\frac{1}{3}x\right)<-\frac{1}{3}x^2+2$ $[x<2]$

18) $3[(x+3)+\frac{1}{3}x]<7x$ $[x>3]$

19) $9x-72<20(x-3)-8x$ $[x>-4]$

20) $\frac{5+x}{3}-\frac{x}{2}>\frac{2}{3}+\frac{4x-35}{5}-\frac{2}{3}x+5$ $[x<10]$

21) $\frac{7(3-x)+2(5x+1)}{4}<2x-3$ $[x>7]$

22) $(2x-1)(2x+1)-3x(2+x)\le(4+x)^2-11$ $[x\ge-\frac{3}{7}]$

23) $3x^2-4x\ge\frac{(5-x)(5+x)}{-3+\frac{8}{3}}-\frac{2-\frac{3}{2}}{4-\frac{7}{2}}$ $[x\le 19]$

24) $x(2-x)^2+4(x+4)^2<x^3-8+\frac{3x-6}{5}$ $[x<-\frac{122}{59}]$

25) $\frac{x}{2}-\frac{2x+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}<\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{8}$ $[x>-\frac{21}{100}]$

26) $(x-1)^2-\frac{1}{3}x<x\left(x-\frac{1}{3}\right)-2x-4$ [nessuna sol.]

27) $\frac{x}{4}-16+18x>x\left(x+\frac{1}{4}\right)-(x-9)^2$ $[\forall x\in \Re]$

28) $(2-x^2)^2-x^2(x^2+5)>9(x+1)(2-x)+\frac{x+7}{2}$ $[x<-\frac{35}{19}]$

29) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-x(x+2)+3x<x(4+3x)-\frac{2x-1}{4}$ $[x>-\frac{1}{2}]$

30) $\frac{\frac{3-2x}{2}-\frac{4x+5}{3}}{2}<\frac{2x+1}{12}+\frac{7-x}{3}$ $[x>-\frac{5}{2}]$

Sistemi di disequazioni di primo grado ad una incognita

31) $\begin{cases} x-1>0 \\ x-6>0 \end{cases}$ [$x>6$]

32) $\begin{cases} x+4<0 \\ 3x<1 \end{cases}$ [$x<-4$]

33) $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x+3<0 \end{cases}$ [impossibile]

34) $\begin{cases} x+3>0 \\ 2x-5>0 \end{cases}$ [$x>\frac{5}{2}$]

35) $\begin{cases} 3x-6<0 \\ 2x>0 \end{cases}$ [$0<x<2$]

36) $\begin{cases} 3x+4<0 \\ x-2>2x+4 \end{cases}$ [$x<-6$]

37) $\begin{cases} 2x-1<x+3 \\ \frac{1}{2}x>\frac{1}{3}x-2 \end{cases}$ [$-12<x<4$]

38) $\begin{cases} 2+4x<5 \\ \frac{x-3}{2}>0 \end{cases}$ [impossibile]

39) $\begin{cases} x-\frac{1}{2}\le 2x+1 \\ 3x-5\ge x-1 \end{cases}$ [$x\ge 2$]

40) $\begin{cases} \frac{2-x}{3}<0 \\ \frac{1}{2}x+1>0 \end{cases}$ [$x>2$]

41) $\begin{cases} 2(x-1)\le 3x+1 \\ \frac{1}{2}x+1>2x \end{cases}$ [$-3\le x<\frac{2}{3}$]

42) $\begin{cases} 4-x>0 \\ \frac{1-x}{3}>x \end{cases}$ [$x<\frac{1}{4}$]

43) $\begin{cases} (x-1)\cdot(x+2)>(x+1)^2+1 \\ (x+5)\cdot(x-5)\le x^2-1+x \end{cases}$ [$-24\le x<-4$]

44) $\begin{cases} x^2-2(x-1)\le(x-2)^2 \\ (x-2)(x+2)<x^2+2x \end{cases}$ [$-2<x\le 1$]

PROBLEMI
DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

1) Per noleggiare un'auto una compagnia di noleggi offre due opzioni: con l'opzione A si pagano € 15 di quota fissa e € 0,2 per km percorso; con l'opzione B si pagano € 10 di quota fissa e € 0,25 per km percorso. Per quale tipo di viaggi è più conveniente l'opzione B?
[*per viaggi di percorrenza inferiore ai 100 km*]

2) Per telefonare in alcuni paesi esteri, due compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe: A) € 1,2 per il primo minuto e € 0,9 per i successivi; B) € 1 per ogni minuto di conversazione.
Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la tariffa A?

[*più di 3 minuti*]

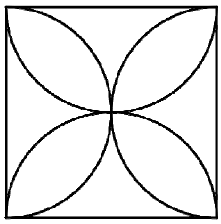
3) Andrea per andare in piscina, può scegliere tra due possibilità: € 140 di iscrizione annuale più € 2 per ogni ingresso oppure € 20 per la tessera di socio più € 8 per ogni ingresso. Per quanti ingressi risulta preferibile la seconda possibilità?

[*meno di 20*]

4) Un'aiuola rettangolare deve avere un perimetro minore o uguale a 18 m. Sapendo che la lunghezza dovrà superare di 3 m la larghezza, determina la larghezza massima dell'aiuola.

[*3 metri*]

5) Per ricamare un quadrato con dentro 4 semicirconferenze come in figura, sono disponibili 5 metri di filo colorato. Quale dimensione deve avere il quadrato affinché il ricamo sia realizzabile?



[*lato* $\leq$ *48,6 cm*]

6) Per noleggiare un'auto una compagnia di noleggi offre due possibili tariffe:
Tariffa A: € 20 quota fissa, € 0,3 per km percorso;
Tariffa B: € 0,4 per km percorso.
Se indichiamo con x il numero dei chilometri percorsi, in quale caso la tariffa A risulta più conveniente? [$x > 200$]

7) In una piscina si può scegliere tra due tipi di abbonamento:
- Abbonamento A: € 30 quota di iscrizione e € 5 ad ingresso;
- Abbonamento B: € 8 ad ingresso.

Se indichiamo con x il numero degli ingressi in quale caso l'abbonamento A risulta più conveniente?

[$x > 10$]

8) Negli scritti di inglese uno studente ha riportato le seguenti valutazioni: 6; 4; 5. Se c'è l'ultima verifica, quanto dovrebbe avere come ultimo voto per ottenere una media almeno sufficiente?

[*almeno 9*]

9) Luca deve raggiungere una baita in mountain bike e sa che deve percorrere 1 km in salita e 3 km in piano. Se durante la salita ha tenuto una velocità di 3km/h e se deve fare l'intero percorso in un'ora al massimo, a quale velocità v deve pedalare quando è sul tratto pianeggiante?

[$v \geq 4{,}5\ km/h$]

10) Indicata con x la misura degli angoli congruenti di un triangolo isoscele, sapendo che l'angolo al vertice è maggiore di 30°, quali valori può assumere x?

[$0° < x < 75°$]

11) In una lotteria a premi ogni biglietto costa € 2. Se i premi costano € 1580, le spese di organizzazione € 260 e a chi vende i biglietti viene dato un compenso di € 4 per ogni blocchetto di 20 biglietti venduto, quanti biglietti bisogna vendere (supponendo di aver venduto un dato numero di blocchetti interi) perché ci sia un guadagno di almeno € 500?

[$x =$ n° biglietti, $x \geq 1300$]

12) In una fabbrica di giocattoli si producono pupazzi che vengono rivenduti a € 7 ciascuno. Sapendo che i costi fissi mensili ammontano a € 2100 e che il costo del materiale per ogni pupazzo è di € 3,50, determina quanti pupazzi devono essere prodotti in un mese perché il bilancio non vada in perdita.

[$x =$ n° pupazzi prodotti in un mese, $x \geq 600$]

13) Uno studente nei primi tre compiti di inglese del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti: 8, 6, 4. Quale voto deve prendere nel quarto e ultimo compito del quadrimestre per avere una media compresa tra 6 e 7 (estremi inclusi)?

[Indicando con x il voto nell'ultimo compito $6 \leq x \leq 10$]

14) *(Invalsi 2015/16)*
Per frequentare una piscina si deve acquistare una tessera da 10 € e pagare 7 € per ogni ingresso. Luigi può spendere al massimo 100 €. Se n indica il numero degli ingressi, quale tra le seguenti disequazioni descrive il numero di ingressi che Luigi può effettuare?

[$10+7n \leq 100$]

SCHEDA PER IL RECUPERO
DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Disequazioni di primo grado

1. $-x > 2x - 3$ $\quad [x < 1]$
2. $3x - 1 > 2x - 4$ $\quad [x > -3]$
3. $2x > 3(x - 2)$ $\quad [x < 6]$
4. $\dfrac{x-1}{2} > \dfrac{x+4}{3}$ $\quad [x > 11]$
5. $\dfrac{x-5}{6} - \dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{3}$ $\quad \left[x < -\dfrac{7}{2}\right]$
6. $\dfrac{4-x}{2} \le \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{10}$ $\quad \left[x \ge \dfrac{19}{7}\right]$
7. $\dfrac{1}{3}x - x \ge -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}$ $\quad \left[x \le -\dfrac{1}{2}\right]$
8. $x - (x - 2) + 2(x + 3) > 1 - (2 - 3x)$ $\quad [x < 9]$
9. $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1-x}{3} > 1$ $\quad \left[x > \dfrac{8}{5}\right]$
10. $-3x > (x - 1)^2 - x^2$ $\quad [x < -1]$

Sistemi di disequazioni di primo grado

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x-1) > x \\ 2(2-x) > 3x \end{cases}$ $\quad [x < -1]$
2. $\begin{cases} x + 1 > 3(x-1) \\ -x < 2(x+1) \end{cases}$ $\quad \left[-\dfrac{2}{3} < x < 2\right]$

Problemi

1. Nella risoluzione di tre test Paolo ha totalizzato 15 punti, 8 punti e 11 punti. Quale punteggio deve riportare Paolo al quarto test per ottenere complessivamente una media di almeno 12 punti?

   [14 punti]

2. Per noleggiare un'auto due compagnie applicano le seguenti tariffe: la prima chiede una spesa fissa di 10 euro più 20 euro per ogni giorno di noleggio; la seconda chiede una spesa fissa di 20 euro più 18 euro per ogni giorno di noleggio. Per quanti giorni bisogna noleggiare la macchina perché la seconda compagnia sia più conveniente?

   [più di 5 giorni]