

Teoremi sulle funzioni derivabili

Iniziamo con la definizione di punto di massimo o minimo relativo di una funzione:

Definizione

a) $x_0 \in D_f$ è un punto di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$$

b) $x_0 \in D_f$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$$

Diamo ora la definizione di massimo e minimo assoluto:

Definizione

a) $x_0 \in D_f$ è il punto di massimo assoluto se :

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D_f$$

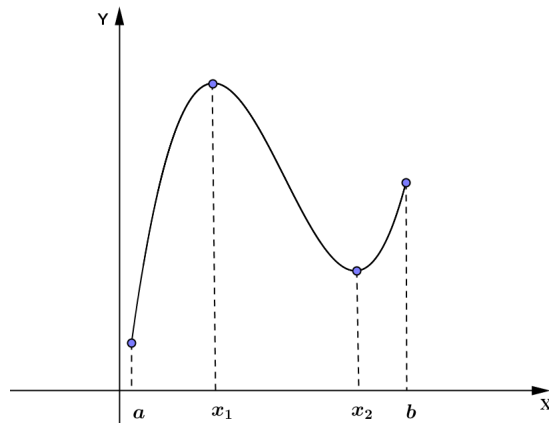
e $f(x_0) = M$ è il massimo assoluto della funzione;

b) $x_0 \in D_f$ è il punto di minimo assoluto se:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D_f$$

e $f(x_0) = m$ è il minimo assoluto della funzione

OSSERVAZIONE : un punto di massimo (minimo) assoluto è anche un punto di massimo (minimo) relativo ma il viceversa non è vero.



a e x_2 sono punti di minimo relativo ; a è punto di minimo assoluto;

x_1 e b sono punti di massimo relativo e x_1 è punto di massimo assoluto.

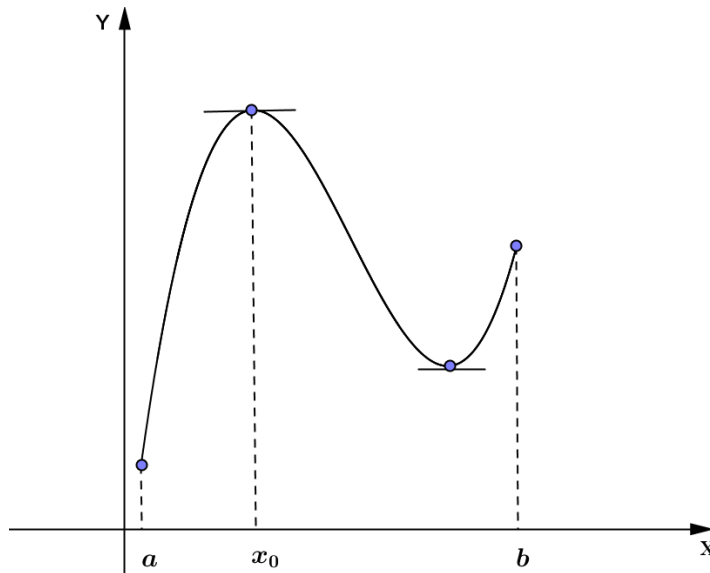
Per studiare il grafico di una funzione è fondamentale la ricerca di punti di massimo (minimo) relativi. Per capire come possano essere individuati vediamo alcuni teoremi riguardanti le funzioni derivabili. Partiremo da un teorema riguardante i massimi (minimi) relativi **interni** al dominio (per es. x_1 e x_2 nel grafico dell'esempio precedente) in cui la funzione è derivabile e poi dimostreremo tre teoremi (Rolle, Cauchy, Lagrange) che ci permetteranno di dimostrare il legame tra l'“andamento” di una funzione (funzione crescente, decrescente) e il **segno della sua derivata**.

Teorema di Fermat

Punti di massimo (minimo) relativi interni al dominio

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Se x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo interno al dominio $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (cioè la tangente al grafico è parallela all'asse x)



Dimostrazione

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo interno al dominio (vedi figura).

Allora $\exists I_{x_0} : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_{x_0}$ e quindi $f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in I_{x_0}$

Calcoliamo $f'(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{perché } f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ e } x - x_0 > 0$$

$$\text{mentre } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{perché } f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ e } x - x_0 < 0$$

Ma se $f(x)$ è derivabile in x_0 i due limiti devono coincidere e quindi l'unica possibilità è che siano entrambi uguali a 0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Osservazione: è importante che se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo ma non è interno al dominio (per es. a e b nella figura) non è detto che in x_0 la derivata sia nulla (vedi figura).

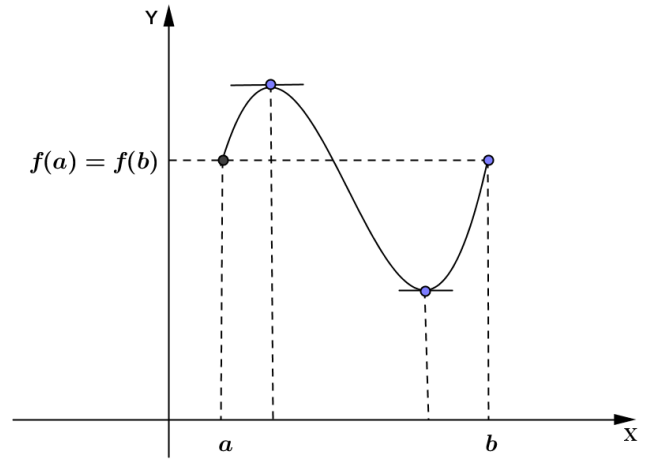
NOTA : il viceversa del teorema non è vero perché se in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$ significa che la **tangente al grafico è orizzontale** e x_0 potrebbe anche essere un "punto di flesso" a tangente orizzontale cioè un punto in cui il grafico cambia concavità come vedremo in seguito.

Teorema di Rolle (*matematico francese*)

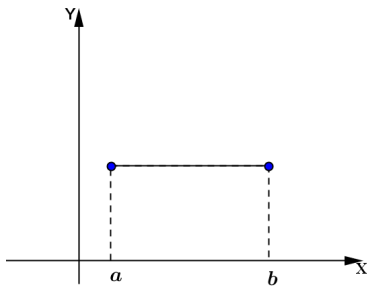
Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e se

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$$

cioè esiste **almeno** un punto $x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$

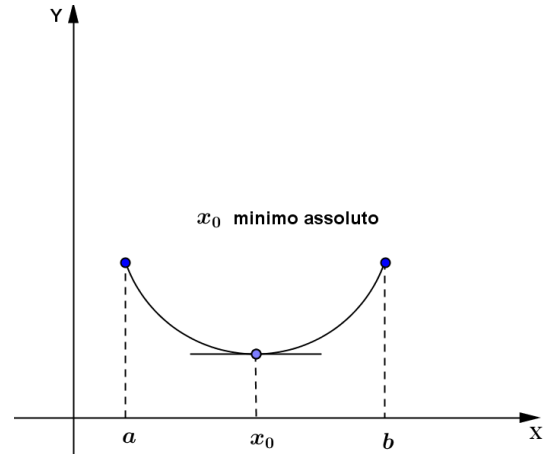
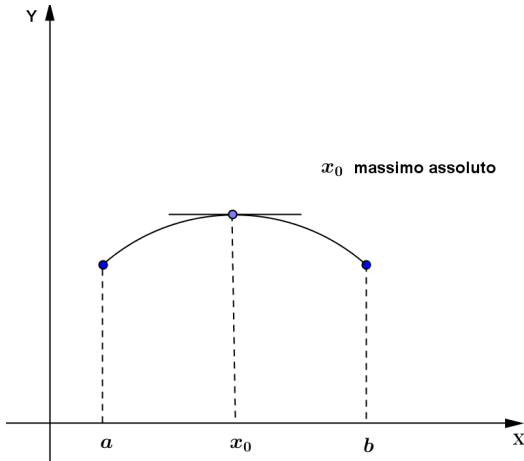


Dimostrazione



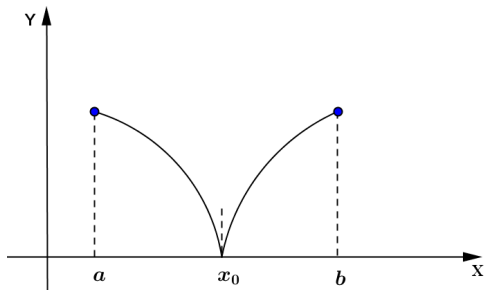
Se $f(x)$ è costante allora $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0$.

Se $f(x)$ non è costante, per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo assoluti. Poiché però $f(a) = f(b)$ il massimo e il minimo assoluti non possono essere assunti entrambi negli estremi dell'intervallo e quindi **almeno uno deve essere interno** al dominio \Rightarrow (per il teorema precedente) $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$



NOTA : se la funzione non fosse derivabile in (a, b) il teorema non sarebbe vero.

Consideriamo per esempio il caso in figura: $f(a) = f(b)$ ma non c'è nessun punto x_0 con tangente al grafico parallela all'asse x (cioè con derivata nulla)



In x_0 $f(x)$ non è derivabile.

Esempi

1) Considera $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

- Verifica le ipotesi del teorema di Rolle in $I = [-2,2]$?

$f(x)$ ha come dominio $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x)$ è continua in $[-2,2]$.

Calcoliamo
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = \pm 2$ (punti a tangente verticale) ma nelle ipotesi del teorema non si richiede la derivabilità negli estremi dell'intervallo.

Verifichiamo infine se $f(a) = f(b)$ cioè $f(-2) = f(2)$

$f(-2) = 0$ $f(2) = 0$ e quindi anche questa ipotesi è verificata.

Quindi $f(x)$ verifica tutte le ipotesi del teorema di Rolle in $[-2,2]$

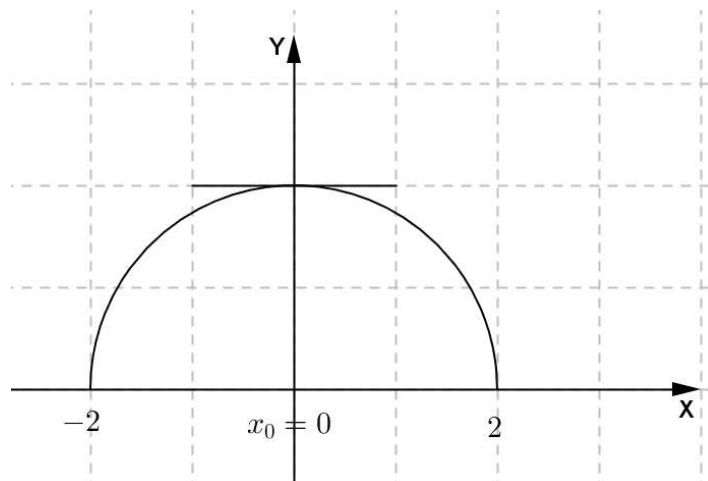
- Qual è (o quali sono) il punto $x_0 : f'(x_0) = 0$?

Basta porre $f'(x) = 0$ e risolvere l'equazione.

Abbiamo
$$\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Quindi $x_0 = 0$

Del resto disegnando il grafico di $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (elevando al quadrato $\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2) si osserva che in $x_0 = 0$ si ha la tangente orizzontale.



2) Considera $f(x) = |2x - x^2|$ nell'intervallo $I = [1 - \sqrt{2}, 1]$.

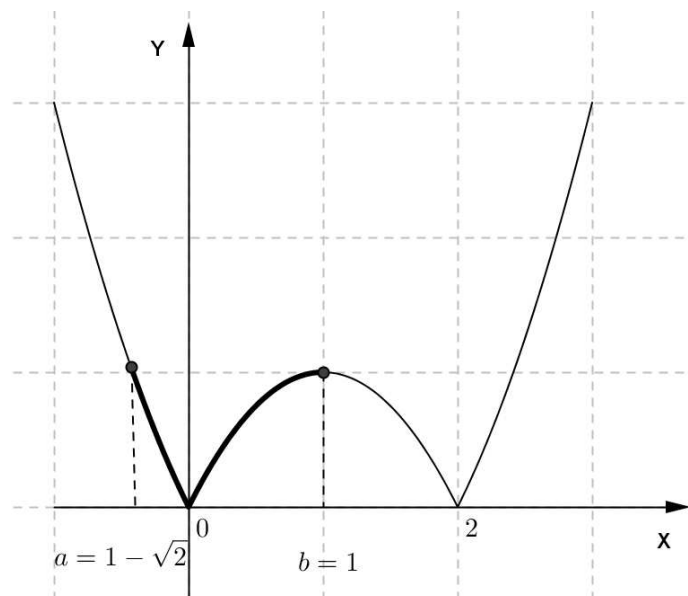
La funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle?

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{quando } 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \\ -(2x - x^2) & \text{quando } 2x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \cup x \geq 2 \end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & 0 < x < 2 \\ -(2 - 2x) & x < 0 \cup x > 2 \end{cases}$$

Disegnando il grafico abbiamo:



Consideriamo l'intervallo assegnato $I = [1 - \sqrt{2}, 1]$: in questo intervallo la funzione è continua e $f(a) = f(b)$ (si verifica facilmente) ma in $x = 0$ (interno a I) non è derivabile perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2 \text{ mentre } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$$

Quindi le ipotesi del teorema di Rolle non sono verificate ed infatti osservando il grafico nessun punto interno a I ha derivata nulla.

3) Per quali valori di a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + b & 0 < x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $I = [-1; \sqrt{2}]$? Qual è il valore x_0 per cui $f'(x_0) = 0$? Disegna il grafico di $f(x)$.

Svolgimento

Perché la funzione sia continua anche in $x = 0$ occorre che il limite sinistro e destro di $f(x)$ in $x=0$ siano uguali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x^2 + b = b$$

Quindi si dovrà avere $b = 1$.

La derivabilità è verificata anche per $x = 0$ poiché essendo

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 < x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} y' = 0$.

Quindi, perché siano verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, basta che $f(-1) = f(\sqrt{2})$.

Abbiamo:

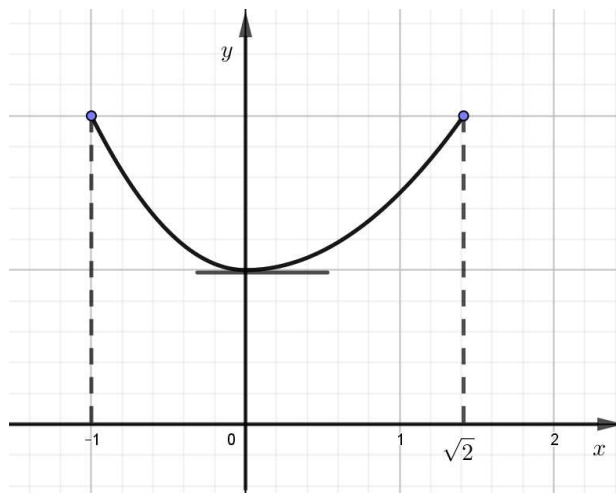
$$f(-1) = a + 1$$

$$f(\sqrt{2}) = 2$$

e quindi dovrà essere $a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$.

In conclusione abbiamo $a = 1$, $b = 1$ e il grafico risulta quello in figura.

Il punto x_0 in cui si annulla la derivata è $x_0 = 0$.



ESERCIZI
TEOREMA DI ROLLE

- 1) Considera la funzione $f(x) = |2 - x|$
Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [0, 4]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché ...]

- 2) Considera $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1, 1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0 = 0$]

- 3) Considera $f(x) = \left| \frac{1-x}{x} \right|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché ...]

- 4) Considera $f(x) = |\arctg x|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1, 1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché ...]

- 5) Considera $f(x) = e^{-x^2}$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1, 1]$?

[si; $x_0 = 0$]

- 6) Considera $f(x) = |x^3|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I = [-1, 1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0 = 0$]

Teorema di Cauchy (*matematico francese*)

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) e inoltre sia $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione

Osserviamo innanzitutto che $g(a) \neq g(b)$ perché se fosse $g(a) = g(b)$ per il teorema di Rolle

$\exists x_0 \in (a, b) : g'(x_0) = 0$ e questo è contrario all'ipotesi che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Consideriamo la funzione $F(x)$ così definita:

$$F(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g(x)$$

Poiché $F(x)$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e, come si può verificare facilmente,

$$F(a) = F(b)$$

per il teorema di Rolle $\exists x_0 \in (a, b) : F'(x_0) = 0$

Ma $F'(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g'(x)$

e quindi $F'(x_0) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x_0) - (f(b) - f(a)) \cdot g'(x_0) = 0$ e quindi $\exists x_0 \in (a, b) :$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

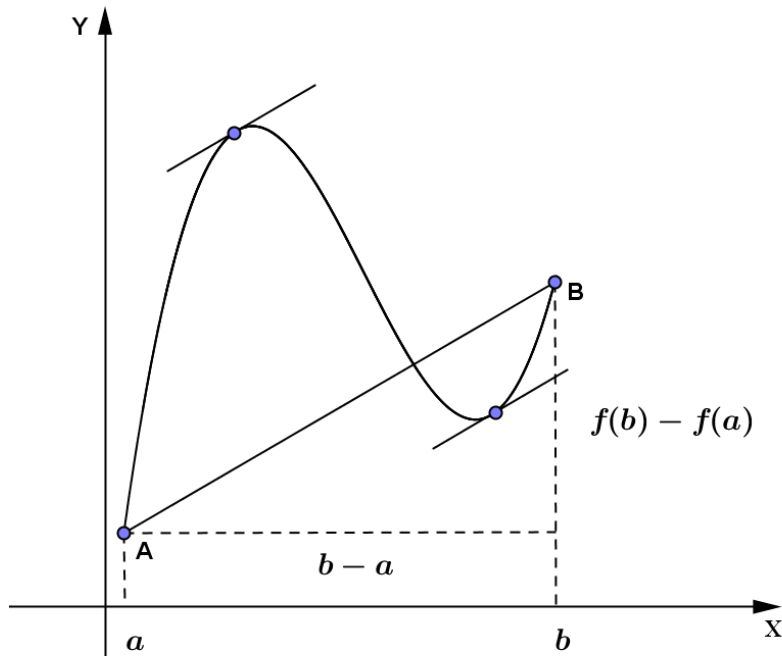
Dal teorema di Cauchy segue subito il seguente teorema di Lagrange (matematico torinese).

Teorema di Lagrange

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretazione geometrica: poiché $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è l'inclinazione della retta passante per gli estremi del grafico, il teorema afferma che esiste almeno un punto $P(x_0, f(x_0))$ in cui la tangente al grafico è parallela alla retta passante per gli estremi del grafico.



Dimostrazione

Basta considerare come seconda funzione $g(x) = x$ (continua, derivabile e con $g'(x) \neq 0$) ed applicare il teorema di Cauchy.

Infatti poiché $g'(x) = 1 \quad \forall x \in (a, b)$ e $g(b) = b, \quad g(a) = a$ avremo che

$$\exists x_0 \in (a, b) : \frac{f'(x_0)}{1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

cioè quello che volevamo dimostrare.

Esempi

1) Consideriamo $f(x) = x^3$ nell'intervallo $I = [-1,1]$.

- Verifica le ipotesi del teorema di Lagrange?
Poiché $f(x)$ è continua e derivabile in \mathfrak{R} lo è sicuramente anche in I e quindi verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
- Determina il punto x_0 (o i punti): $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

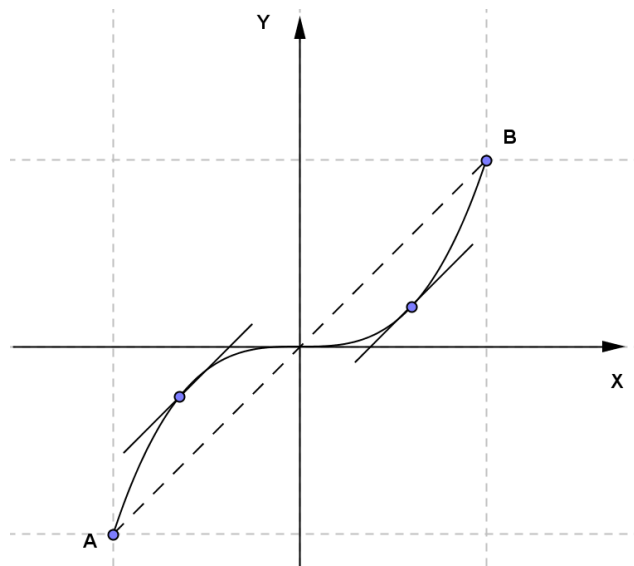
Nel nostro caso $f(-1) = -1$ $f(1) = 1$ e quindi, essendo $f'(x) = 3x^2$ devo risolvere:

$$3x^2 = \frac{1 - (-1)}{2}$$

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

I valori sono interni all'intervallo I e quindi entrambi accettabili.

Graficamente infatti si verifica che esistono due punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta per $A(-1,-1)$ e $B(1,1)$



2) Consideriamo $f(x) = |1 - x^2|$ in $I = [0,2]$. Si può applicare il teorema di Lagrange?

$$\text{Poiché } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -(1 - x^2) & x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 1 \\ 2x & x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2$ si ha che $f(x)$ non è derivabile in $x = 1$ (interno a I) e quindi il teorema di Lagrange non si può applicare.

Teoremi funzioni derivabili

3) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1+x^2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi di Lagrange nell'intervallo $I = [-1;1]$? Se la risposta è affermativa qual è il punto x_0 (o i punti) previsto dal teorema? Traccia il grafico di $f(x)$.

Svolgimento

La funzione è continua anche in $x = 0$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 = 1$$

Per la derivabilità poiché abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 \leq x < 0 \\ 2x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

la funzione è derivabile anche per $x = 0$ poiché limite sinistro e destro di y' per $x \rightarrow 0$ sono uguali (entrambi zero).

Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di Lagrange.

Calcoliamo

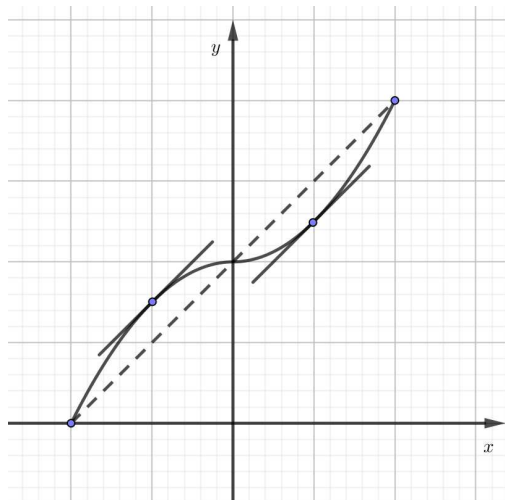
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Quindi per determinare x_0 tale che $y'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ poniamo:

$$-2x = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Abbiamo quindi due valori di x_0 (vedi grafico).



ESERCIZI
TEOREMA DI LAGRANGE

- 1) Considera $f(x) = x^3 - 8$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

$$[\text{si}; x_0 = +\frac{2}{\sqrt{3}}]$$

- 2) Considera $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange?
Disegna il grafico di $f(x)$.

$$[\text{si}; x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \sqrt{2}]$$

- 3) Considera $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,1]$?

$$[\text{si}; x_0 = \ln\left(1 - \frac{1}{2e}\right)]$$

- 4) Considera $f(x) = \begin{cases} 1-x-x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ e^{-x} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,1]$?

$$[\text{si}; x_0 = -\frac{1+e}{4e}]$$

- 5) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,2]$?

$$[\text{si}; x_0 = \frac{1}{3}]$$

Teoremi funzioni derivabili

- 6) Considera $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
 Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1, 2]$?

$$[\text{si}; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}]$$

- 7) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0, 2]$?
 Disegna il grafico di $f(x)$.

$$[\text{si}; x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{3}{2}]$$

- 8) Considera $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [1, 3]$?
 Disegna il grafico di $f(x)$.

$$[\text{si}; x_0 = 2\sqrt{2} - 1]$$

- 9) Considera $f(x) = \sqrt{x}$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [4, 9]$?

$$[\text{si}; x_0 = \frac{25}{4}]$$

- 10) Considera $f(x) = \ln x$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [1, e]$?

$$[\text{si}; x_0 = e - 1]$$

- 11) Considera $f(x) = x^2 + |x|$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1, 2]$?

[no, perché ...]

- 12) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x < 1 \\ \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

- Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0, 2]$?

$$[\text{si}; x_0 = \frac{2}{\ln 2 + 1}]$$

- 13) Considera

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2-x}{x} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0, 2]$?

$$[\text{si}; x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \sqrt{2}]$$

Teorema di De l'Hospital
(senza dimostrazione)

Se $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ e se esiste $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito)

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{la dimostrazione si basa sul teorema di Cauchy})$$

NOTA : se $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si presenta ancora in forma indeterminata possiamo cercare di calcolare

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ eccetera...}$$

Esempi

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{H}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{H}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\text{In generale se } \alpha > 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \stackrel{H}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = 0$$

Si dice che la funzione $y = \ln x$ è un “infinito” di ordine inferiore rispetto alla funzione $y = x^\alpha$ ($\alpha > 0$), quando $x \rightarrow +\infty$.

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{H}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{H}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$\text{In generale se } \alpha > 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \dots = +\infty$$

Si dice che la funzione $y = e^x$ è un “infinito” di ordine superiore rispetto alla funzione $y = x^\alpha$ ($\alpha > 0$), quando $x \rightarrow +\infty$.

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$$

Derivando troviamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$: questo limite non esiste e quindi non possiamo applicare il teorema di De l'Hospital.

In questo caso il limite dato può essere calcolato dividendo numeratore e denominatore per x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x} = \frac{1 + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)}{1 + \left(\frac{\cos x}{x} \right)} = 1$$

$\begin{matrix} 0 \\ \uparrow \\ \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

- 6) Il teorema di De l'Hospital può essere utilizzato anche per determinare limiti che si presentano nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$ del prodotto ma solo dopo aver scritto il prodotto come un quoziente "opportuno".

Per esempio:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x$ si presenta in forma indeterminata $\infty \cdot 0$

Se scriviamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

Attenzione: se avessimo scritto $x \cdot e^x = \frac{e^x}{\frac{1}{x}}$ non saremmo riusciti a calcolare il limite con l'Hospital perché derivando la forma sarebbe rimasta indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} \quad \text{che è ancora una forma indeterminata...}$$

Occorre quindi fare attenzione a come si trasforma il prodotto.

ESERCIZI
TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Calcola i seguenti limiti

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} \quad [+\infty]$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} \quad [0]$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad [0]$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x}{x^2} \quad [0]$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x \quad [0]$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x \quad [1]$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) \quad [-1]$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x} \quad [0]$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot gx} \quad [0]$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln x \quad [0]$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x + \operatorname{tg} x} \quad [1]$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad [1]$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2} \quad [+\infty]$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \quad [2]$$

Corollari del teorema di Lagrange

- 1) Se $f : [a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b)
 e $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) = k$ cioè $f(x)$ è una funzione costante.

Dimostrazione

Sia $x \in (a,b)$: poiché $f(x)$ è continua anche in $[a,x]$ e derivabile in (a,x) , posso applicare il teorema di Lagrange a questo intervallo.

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,x): f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ma $f'(x_0) = 0$ e quindi $f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$

Poiché questo accade comunque si scelga $x \in (a,b)$ si è dimostrato che $f(x) = k$ (cioè la funzione è costante).

- 2) Se $f : [a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ e $g : [a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ sono continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e se

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \quad \forall x \in (a,b) \\ &\Downarrow \\ f(x) - g(x) &= k \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

Dimostrazione

Consideriamo $F(x) = f(x) - g(x)$

Poiché $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$ applicando il primo corollario si ha $F(x) = k$ e quindi $f(x) - g(x) = k$ cioè le due funzioni differiscono per una costante.

- 3) Ma la conseguenza più interessante del teorema di Lagrange è rappresentata dal seguente teorema:

Teorema

Relazione tra il segno della derivata $f'(x)$ e “andamento” della funzione

Data $f : [a,b] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) abbiamo che:

- se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ è crescente in (a,b)
- se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ è decrescente in (a,b)

Dimostrazione

Consideriamo $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$.

Poiché $f(x)$ è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2) applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$

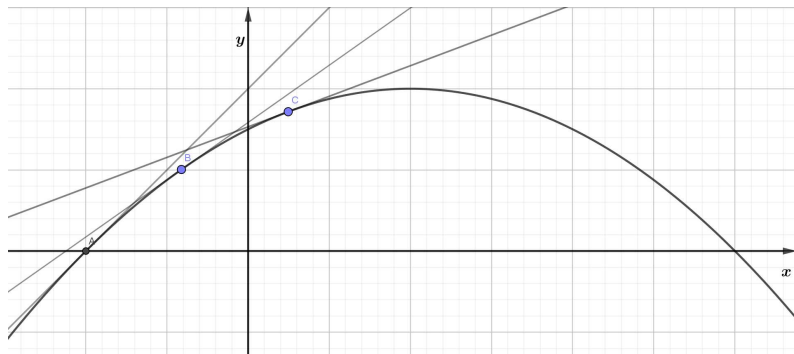
$$\exists x_0 \text{ con } x_1 < x_0 < x_2 : f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ma $f'(x_0) > 0$ per ipotesi e $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Quindi, poiché questo vale comunque scelga $x_1 < x_2$, abbiamo dimostrato che la funzione è crescente.

Analogamente si dimostra che se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ è decrescente.

Osservazione: infatti “geometricamente” si osserva che quando una funzione è crescente i coefficienti angolari delle tangenti sono positivi, mentre se è decrescente sono negativi (vedi figura).



Nota

Osserviamo che se $f(x)$ è crescente in $[a,b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ poiché può esserci anche un flesso a tangente orizzontale.

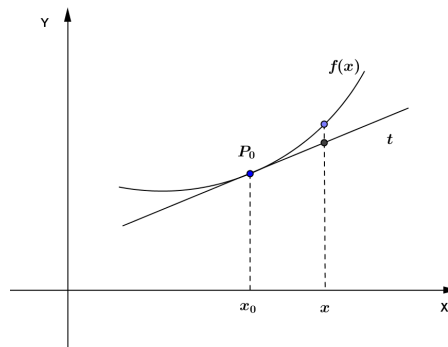
Questo teorema è fondamentale per lo studio del grafico di una funzione poiché, come vedremo, ci permette di individuare i punti di massimo, minimo e flesso a tangente orizzontale.

CONCAVITA' E FLESSI

Nello studio di un grafico è importante determinare anche la “**concavità**” del grafico: i punti in cui c'è un cambio di concavità sono detti punti di flesso.

Definiamo cosa si intende per “**concavità verso l'alto**” o “**verso il basso**” del grafico di una funzione in x_0 :

Definizione: diciamo che in x_0 **il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto** quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sopra alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$



Poiché l'equazione della tangente risulta

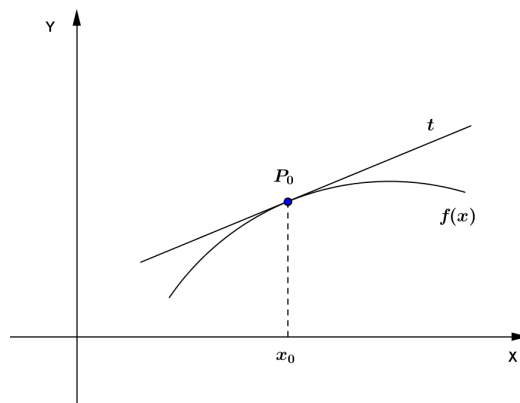
$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

possiamo anche dire che in x_0 **il grafico volge la concavità verso l'alto**

$$\text{se } \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definizione: diciamo che in x_0 **il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso il basso** quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sotto alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$ cioè

$$\text{se } \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Teoremi funzioni derivabili

Per determinare la concavità è necessario studiare la derivata seconda perché abbiamo il seguente teorema:

Teorema : sia $f(x)$ continua in I con $f'(x), f''(x)$ continue e $x_0 \in I$.

- Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto.
- Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso il basso.

Dimostrazione

Supponiamo che $f''(x_0) > 0$

Consideriamo $\varphi(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$

Osserviamo che $\varphi(x)$ rappresenta lo scarto funzione-tangente: per dimostrare che la concavità è rivolta verso l'alto basterà dimostrare che $\exists I_{x_0}$ in cui $\varphi(x) \geq 0$

Determiniamo:

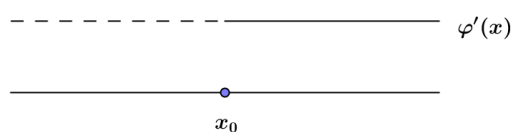
$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

$$\varphi''(x) = f''(x)$$

Poiché quindi $\varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0 \exists I_{x_0}$ in cui $\varphi'(x) > 0$ (per la continuità di $f''(x)$).

Possiamo scrivere $\varphi'(x) = D(\varphi(x)) > 0$ e allora, avendo derivata positiva, $\varphi(x)$ è una funzione crescente.

Ma sostituendo x_0 abbiamo $\varphi(x_0) = 0$ e quindi il segno di $\varphi(x)$ sarà il seguente (poiché $\varphi(x)$ deve essere crescente):



Ma allora $\varphi(x)$ ha un minimo in x_0 cioè

$$\exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad \varphi(x) \geq \varphi(x_0)$$

Ma sostituendo x_0 $\varphi(x_0) = 0$ e quindi

$$\exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad \varphi(x) \geq 0$$

Cioè il grafico volge la concavità verso l'alto (in x_0).

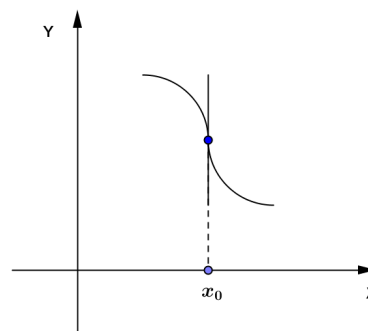
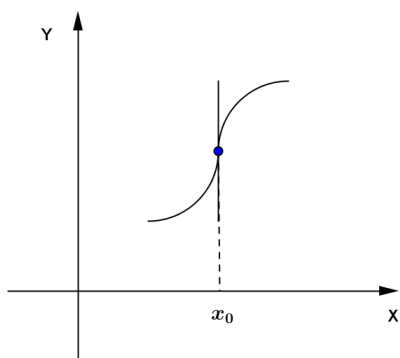
La dimostrazione della seconda parte è analoga.

Flessi di una funzione

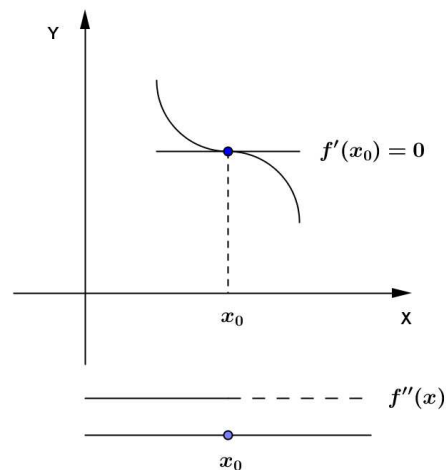
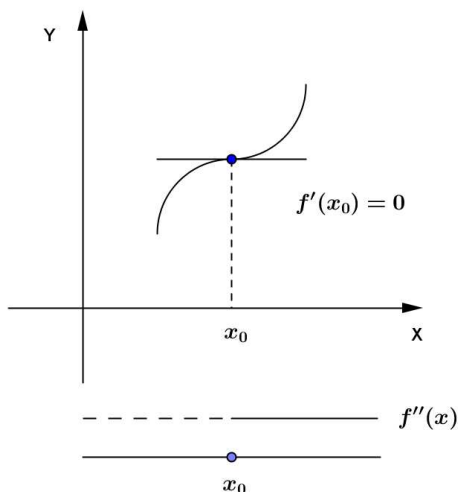
Definizione: x_0 si dice un punto di flesso per $f(x)$ se in x_0 il grafico della funzione **cambia concavità** e quindi il grafico “attraversa” la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.

A seconda dell'inclinazione della tangente possiamo avere:

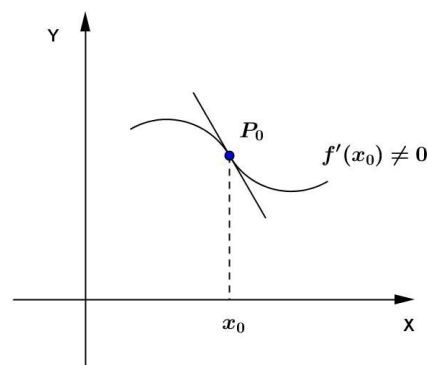
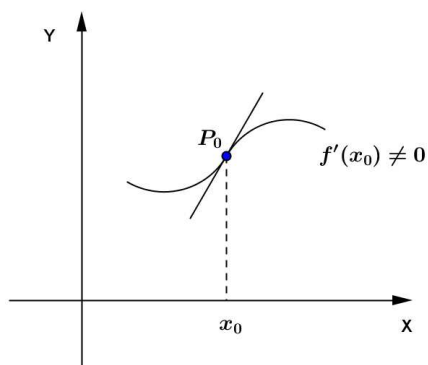
- **flesso a tangente verticale** : in questo caso $f(x)$ non è derivabile in x_0 e $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = -\infty$



- **flesso a tangente orizzontale** : in x_0 $f'(x_0) = 0$ ma $f'(x)$ non cambia segno in x_0 . **Cambia segno** invece $f''(x)$ in x_0 (perché cambia la concavità) e $f''(x_0) = 0$.



- **flesso a tangente obliqua** : in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma c'è un cambio di concavità e quindi $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ **cambia segno**.



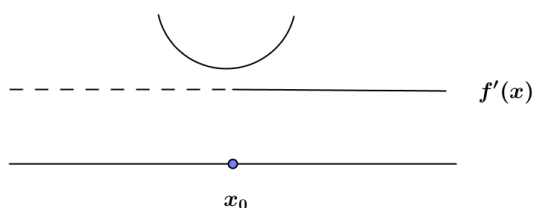
Ricerca dei punti di massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale

Consideriamo un punto $x_0 \in D_f$ in cui $f'(x_0) = 0$, cioè un punto in cui la tangente è parallela all'asse x .

Potrebbe essere un punto di massimo o un punto di minimo o un punto di flesso a tangente orizzontale.

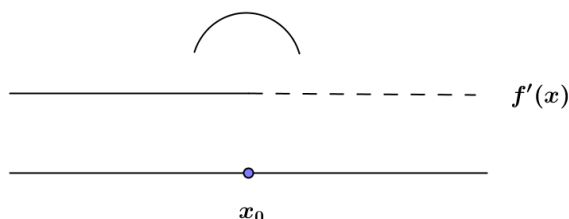
Per capirlo studiamo il segno di $f'(x)$.

1) Se il segno della derivata ha questo andamento



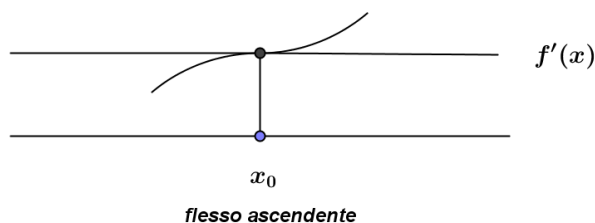
cioè negativo e poi positivo, poiché la $f(x)$ prima di x_0 decresce e poi cresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **MINIMO**.

2) Se il segno della derivata ha questo andamento

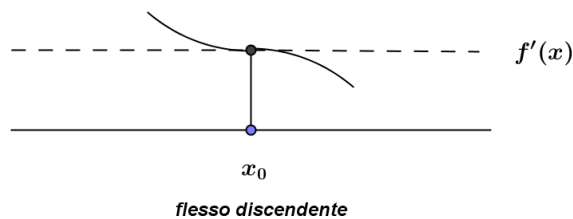


la funzione prima di x_0 cresce e poi decresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **MASSIMO**.

3) Se $f'(x)$ non cambia segno in $x_0 \Rightarrow x_0$ è un punto di **FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE** (ascendente o discendente)



Flesso ascendente



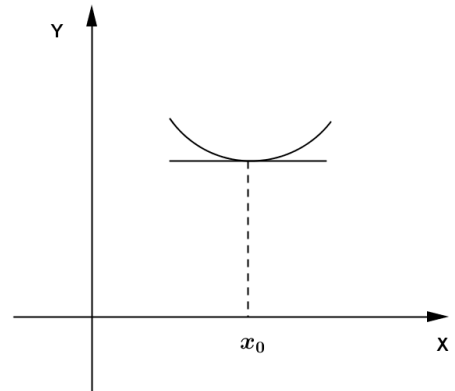
Flesso discendente

NOTA

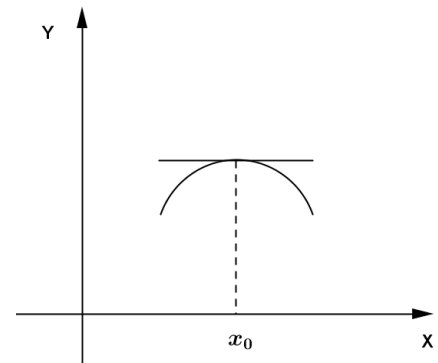
Massimi, minimi e flessi con lo studio di $f''(x_0)$

Per individuare massimi e minimi possiamo utilizzare lo studio di $f''(x)$ piuttosto dello studio del segno di $f'(x)$.

- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ (concavità verso l'alto) $\Rightarrow x_0$ è un punto di MINIMO



- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ (concavità verso il basso) $\Rightarrow x_0$ è un punto di MASSIMO



Se in x_0 $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ dobbiamo studiare il segno di $f'''(x)$: se cambia in x_0 allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

Si può dimostrare che

1) Se in x_0 $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, cioè se la derivata n-esima è la prima derivata diversa da 0 in x_0 :

se n è pari $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo se $f^{(n)}(x_0) < 0$
 è un punto di minimo se $f^{(n)}(x_0) > 0$

se n è dispari $\Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale

2) Se in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, cioè la derivata n-esima è la prima derivata diversa da 0 in x_0 :

se n è pari \Rightarrow in x_0 il grafico volge la concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0) > 0$
 il grafico volge la concavità verso il basso se $f^{(n)}(x_0) < 0$

se n è dispari $\Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente obliqua