Geometria dello spazio

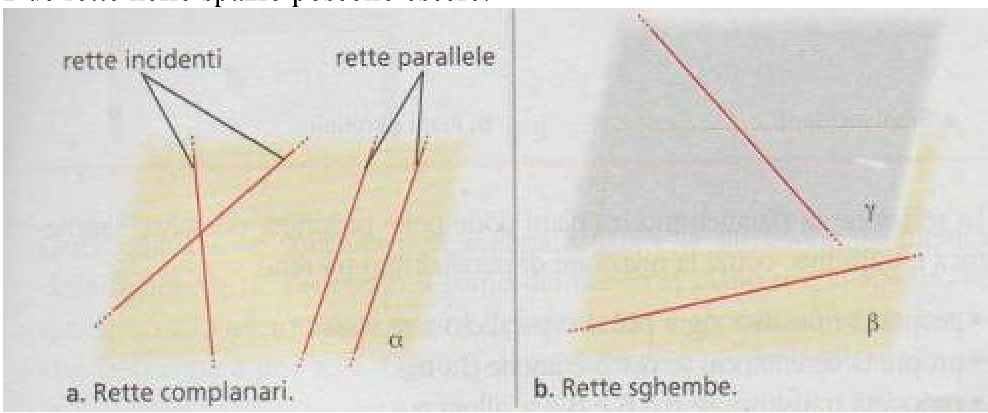
Rette e piani nello spazio

Una **retta** è individuata in modo univoco da due punti.
Un **piano** può essere individuato in modo univoco da:

- tre punti non allineati
- una retta e un punto esterno ad essa
- due rette incidenti
- due rette parallele

Posizione reciproca di due rette nello spazio

Due rette nello spazio possono essere:

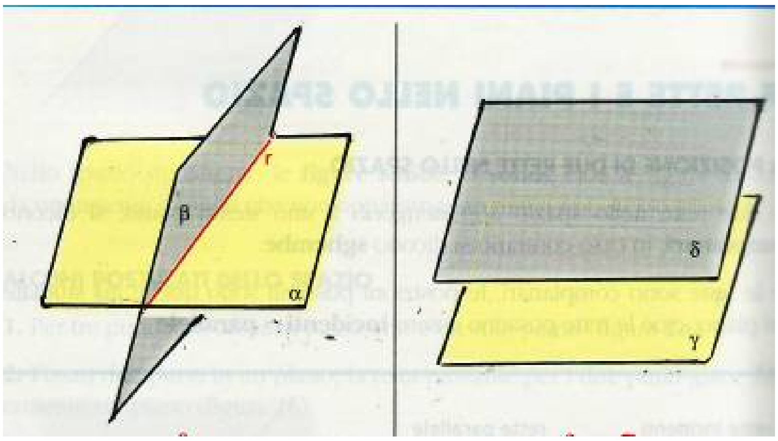


- **parallele**: sono due rette **complanari** che non hanno punti in comune
- **incidenti**: sono due rette **complanari** che hanno un punto in comune
- **sghembe**: sono rette che **non sono complanari** (e che perciò non hanno nessun punto in comune)

Posizione reciproca di due piani nello spazio

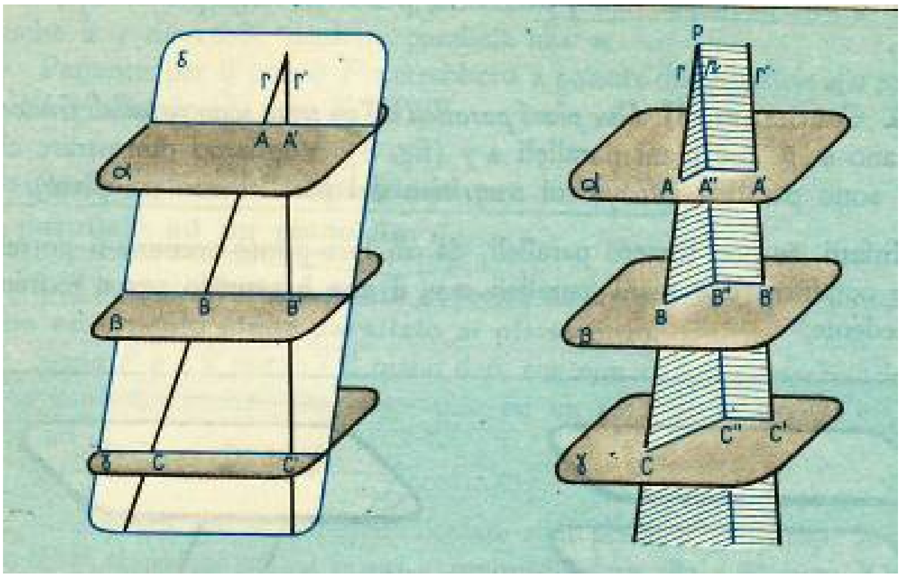
Due piani nello spazio possono essere:

- **paralleli**: sono due piani che non hanno punti in comune
- **incidenti**: sono due piani che hanno una retta in comune



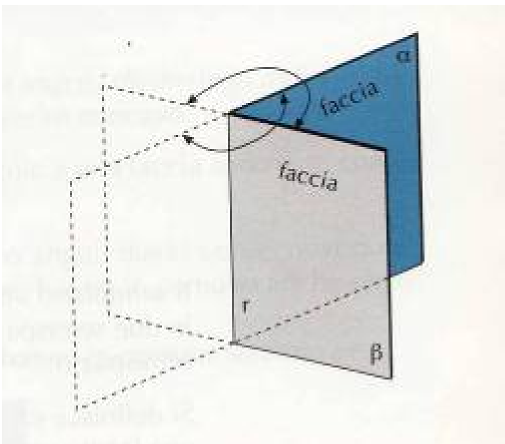
Per i piani paralleli vale il

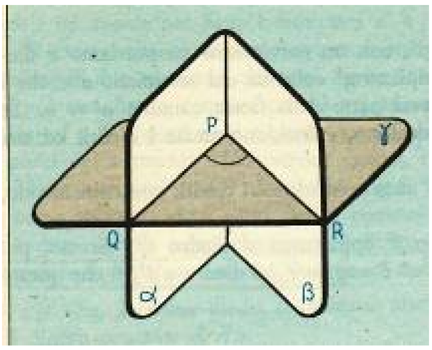
Teorema di Talete nello spazio
Un fascio di piani paralleli intersecati da due trasversali intercetta su di esse segmenti corrispondenti proporzionali.



Due piani incidenti, hanno invece una retta in comune e dividono lo spazio in quattro parti chiamati **diedri** o angoli diedri. La retta comune ai due piani è detta **spigolo** del diedro.

Dato un diedro, le sezioni del diedro ottenute con piani perpendicolari allo spigolo sono angoli tutti congruenti. La misura di una qualunque sezione normale di un diedro è la misura dell'ampiezza del diedro stesso, perciò se la sezione normale del diedro αβ è 60°, diremo che il diedro αβ misura 60°.



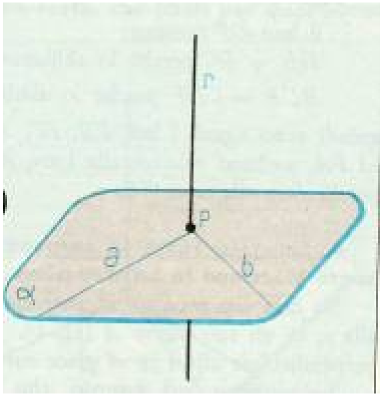


Posizione reciproca di una retta e di un piano nello spazio

Data una retta ***r*** ed un piano α

- ***r*** è parallela ad α se non hanno punti in comune
- ***r*** appartiene ad α se tutti i punti di ***r*** sono anche punti di α
- ***r*** è incidente con α se ***r*** e α hanno un punto P in comune

Un caso particolare dell'ultimo caso si ha quando l'angolo che *r* forma con a è 90°.
Diremo che ***r*** è perpendicolare al piano α se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza *P*.

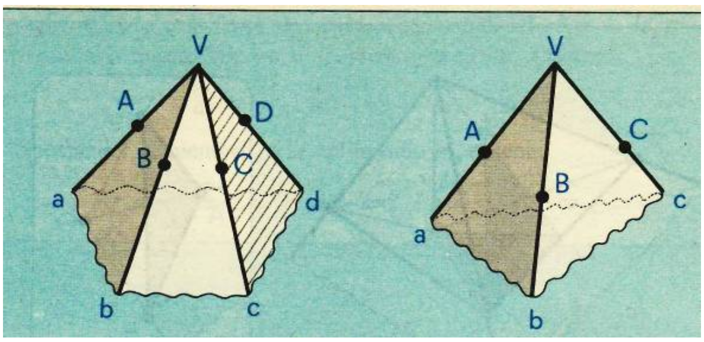


Angoloide

L'**angoloide** è la parte di spazio individuata da n (n≥3) semirette aventi origine comune, a tre a tre non complanari e tali che il piano individuato da due semirette successive lasci tutte le altre dalla stessa parte.

Le semirette sono dette **spigoli** dell'angoloide, la loro origine comune è il **vertice** e gli angoli formati da due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide.

Un angoloide con tre spigoli o facce è detto angoloide **triedro** o semplicemente triedro, con quattro facce abbiamo un angoloide **tetraedro**.

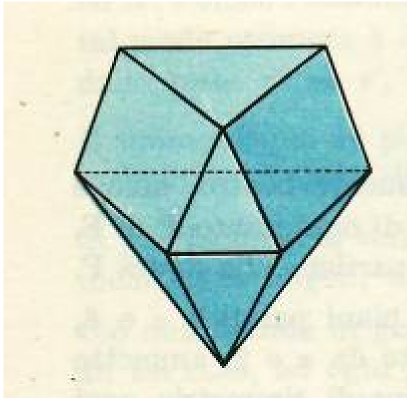


Vale la seguente proprietà:

In ogni angoloide di vertice V la somma degli angoli in V delle facce è minore di un angolo giro.

Poliedri

Definizione di poliedro



Si chiama **poliedro convesso** la porzione di spazio delimitata da poligoni a due a due non complanari tale che ogni lato dell'uno sia in comune ad un altro di essi e il piano individuato da ogni poligono lasci tutti gli altri dalla stessa parte.

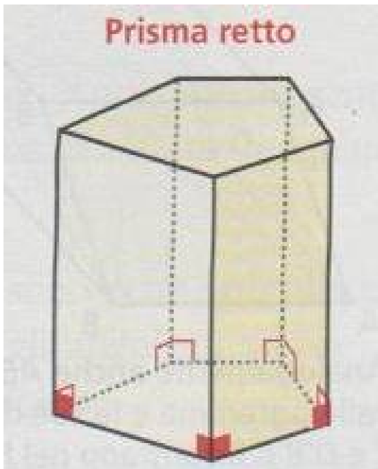
Per tutti i poliedri convessi si può dimostrare che vale la

Relazione di Eulero

Dato un qualunque poliedro convesso, indicato con F il numero delle facce, con V il numero dei vertici e con S il numero degli spigoli si ha che $F+V=S+2$

Prisma retto

Un **prisma retto** è un poliedro delimitato da due basi uguali e ugualmente disposte su piani paralleli, avente per facce laterali dei rettangoli ottenuti congiungendo i vertici corrispondenti dei poligoni di base.



La distanza tra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma e corrisponde alla misura dello spigolo laterale..

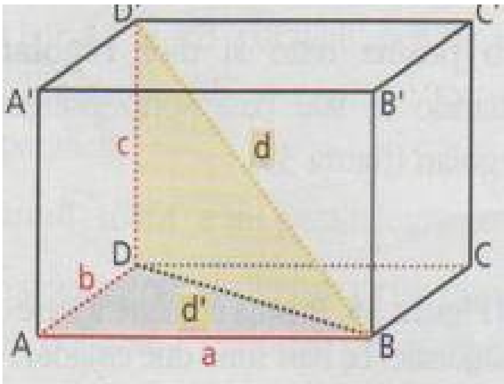
Un prisma retto è **regolare** se ciascuna delle basi è un poligono regolare.

Volume e superficie di un prisma retto

$$\boxed{\begin{aligned} S_L &= 2p_{base} \cdot h \\ S_T &= 2 \cdot S_{base} + S_L \\ V &= S_{base} \cdot h \end{aligned}}$$

Parallelepipedo rettangolo

Un **parallelepipedo rettangolo** è un prisma retto in cui anche le basi sono rettangoli.



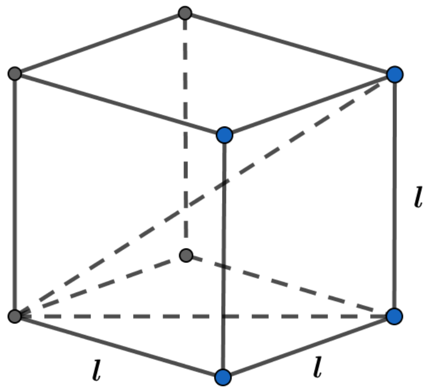
Volume e superficie di un parallelepipedo rettangolo

$$\boxed{\begin{aligned}&S_L = 2p_{base}\cdot h = 2(a+b)c\\&S_T = 2\cdot S_{base} + S_L = 2ab + 2(a+b)c = 2(ab+bc+ac)\\&V = S_{base}\cdot h = abc\\&d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\end{aligned}}$$

Cubo

Il cubo o esaedro regolare è un poliedro che ha per facce sei quadrati uguali.

E' evidente che il cubo è un particolare parallelepipedo rettangolo, avente le tre dimensioni uguali:
a=b=c=l.

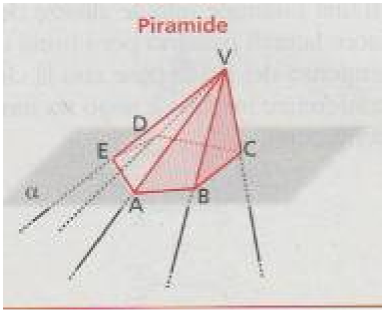


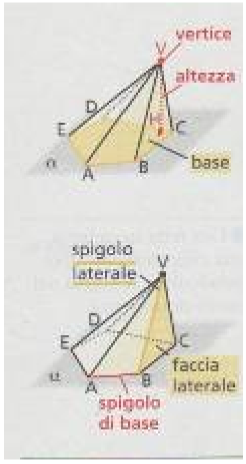
Volume , superficie , diagonale di un cubo di lato *l*

$$\boxed{\begin{aligned}&S_T = 6l^2\\&V = S_{base}\cdot h = l^3\\&d = \sqrt{(\sqrt{2}l)^2 + l^2} = \sqrt{3}l\end{aligned}}$$

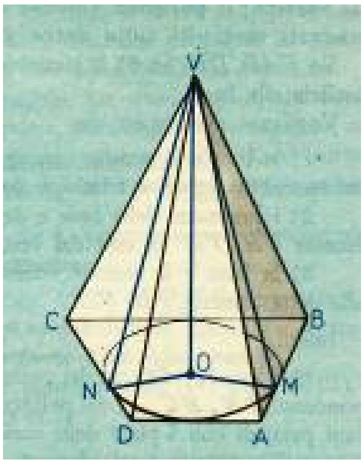
Piramide

La **piramide** si ottiene tagliando un angoloide con un piano che non passi per il vertice e che incontri tutti gli spigoli. E' perciò un poliedro limitato da un poligono (base) e da triangoli (facce laterali).
A seconda del tipo di poligono di base si parla di piramide triangolare o tetraedro, quadrangolare, pentagonale….





L'**altezza** della piramide è la distanza dal vertice V al piano della base.



Una piramide dice **retta** se il poligono di base è circoscrivibile ad una circonferenza e l'altezza cade nel centro di questa.

Se una piramide è retta, **le altezze delle facce laterali sono tutte uguali e prendono il nome di apotema che indichiamo con *a*.**

Una piramide retta si dice **regolare** se il poligono di base è un poligono regolare.

Superficie e volume di una piramide retta

$$a^2 = h^2 + r^2$$

$$S_L = \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

$$S_T = S_{base} + S_L = S_{base} + \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

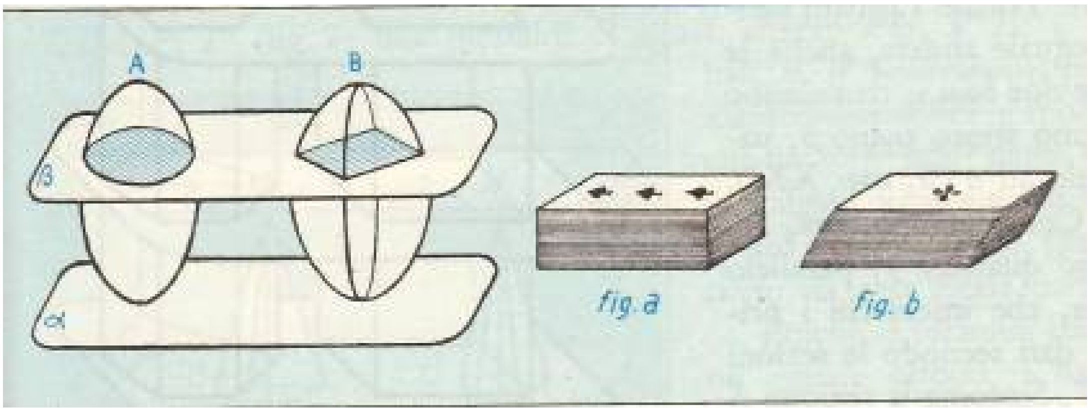
$$V = \frac{1}{3}S_{base} \cdot h$$

Volume della piramide

Per ricavare il volume della piramide enunciamo prima di tutto il

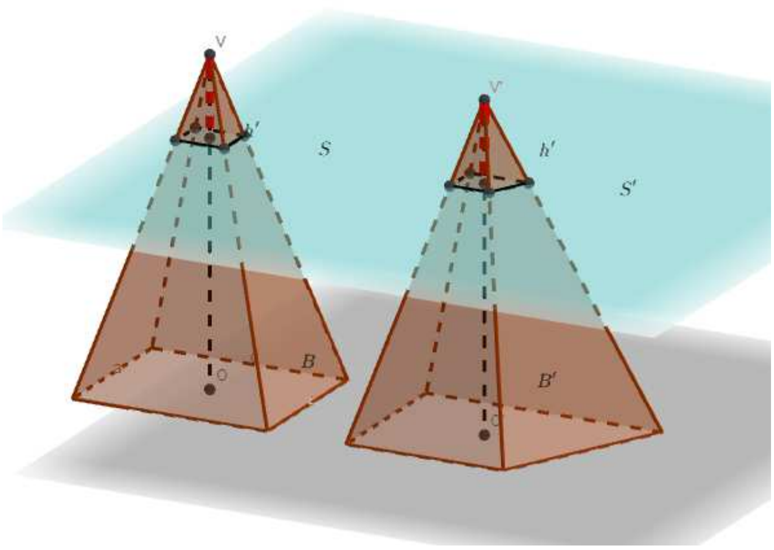
Principio di Cavalieri

Due solidi che si possono disporre rispetto ad un piano in modo che ogni piano parallelo a questo individui su di essi sezioni equivalenti, sono tra loro equivalenti, hanno cioè lo stesso volume.



Utilizzando questo principio dimostriamo che **due piramidi che hanno basi equivalenti e stessa altezza hanno lo stesso volume.**

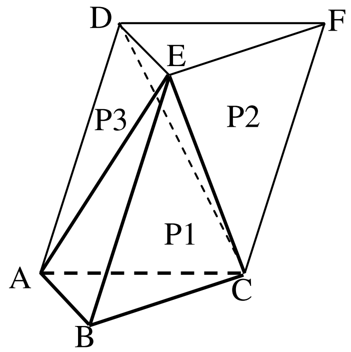
Dimostrazione
Consideriamo due piramidi aventi basi equivalenti di area B e B' cioè $B = B'$ e stessa altezza *h*: se, dopo averle disposte con le basi sullo stesso piano α (vedi figura) tracciamo un qualsiasi piano parallelo ad α, avremo due poligoni sezione di area S e S' rispettivamente simili a B e B' e poiché, per il teorema di Talete nello spazio anche le altezze h e h' sono nello stesso rapporto di similitudine, dal momento che $\frac{B}{b} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$ e $\frac{B'}{b'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$ allora avremo anche $\frac{B}{b} = \frac{B'}{b'} \rightarrow \frac{B}{B'} = \frac{b}{b'}$.
Ma se le basi B e B' sono equivalenti cioè hanno aree uguali allora anche le sezioni b e b' avranno aree uguali cioè sono equivalenti.
Poiché questo vale per qualsiasi piano parallelo ad α, per il principio di Cavalieri, le due piramidi hanno lo stesso volume.



Passiamo ora a dimostrare la formula per ricavare il volume di una piramide.

a) Iniziamo dimostrando la formula per una **piramide a base triangolare**.

Consideriamo la piramide a base triangolare *ABCE* e costruiamo un prisma avente la stessa base *ABC* e *BE* come spigolo laterale.

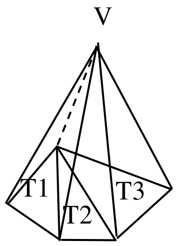


Il piano *ACE* divide il prisma in due piramidi:

la piramide *ABCE* (P1) e la piramide *ADFCE* (P2+P3) che può essere scomposta nelle piramidi P2 e P3 dal piano *EDC*.
Si osserva che P2 e P3, avendo basi *ADC* e *DFC* equivalenti (entrambe metà dello stesso parallelogrammo), e la stessa altezza (avendo lo stesso vertice E) sono equivalenti.
D'altra parte P2 e P1 sono equivalenti avendo basi ABC e EFG congruenti e stessa altezza (quella del prisma).

Segue che **P1, P2, e P3 sono equivalenti** e la piramide P1 ha volume pari alla terza parte del prisma.

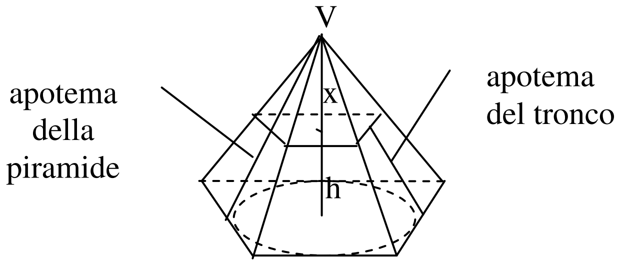
b) Poiché **una qualunque piramide a base poligonale può essere scomposta in più piramidi a base triangolare aventi tutte la stessa altezza** si ha che



$$V = \frac{1}{3}S_{T1} \cdot h + \frac{1}{3}S_{T2} \cdot h + ... + \frac{1}{3}S_{Tn} \cdot h = \frac{1}{3}S_{base} \cdot h$$

Tronco di piramide

Il **tronco di piramide** si ottiene tagliando una piramide con un piano parallelo alla base.



L'**altezza** del tronco di piramide è la distanza tra i piani delle basi .

Un tronco di piramide si dice **tronco di piramide retta** se è stato ottenuto sezionando una piramide retta.

Un tronco di piramide retta si dice **tronco di piramide regolare** se il poligono di base è regolare.

Nel tronco di piramide retta le altezze delle facce laterali, che sono tutte trapezi, sono tutte uguali e prendono il nome di **apotema del tronco** a_t.

Volume e superficie di un tronco di piramide retta

Indichiamo con B la base maggiore e con b quella minore

$$S_L = \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t]$$

$$S_T = B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t]$$

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb})\cdot h$$

Nota
Dimostriamo la formula per il volume.

Per la similitudine si ha $\frac{x^2}{(x+h)^2} = \frac{b}{B}$ da cui $\frac{x}{(x+h)} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$

e quindi si ha

$$x\cdot\sqrt{B} = \sqrt{b}(x+h)$$

$$x = \frac{\sqrt{b}\cdot h}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}\cdot h\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}{B-b}$$

e quindi

$$V = \frac{1}{3}B(x+h) - \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}[Bh + (B-b)x] = \frac{1}{3}\left[Bh + \sqrt{b}\cdot h\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[Bh + h\sqrt{Bb} + bh\right] = \frac{h}{3}\left[B + b + \sqrt{Bb}\right]$$

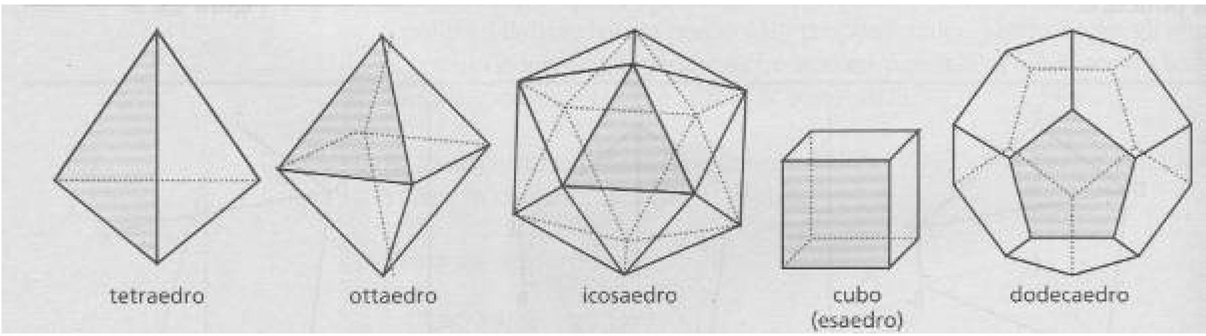
Poliedri regolari

Un **poliedro** convesso si dice **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari tutti uguali e i suoi angoloidi sono uguali.

Quanti sono i poliedri regolari?

Ricordiamo che in un angoloide le facce sono almeno tre e che la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro. Ciò limita la possibilità di ottenere poliedri regolari a cinque casi.

Poligoni regolari	**Numero di facce in un vertice**	**Somma degli angoli delle facce**	**Nome del poliedro**	**N. Vertici**	**N. Spigoli**	**N. Facce**
Triangoli equilateri (angoli 60 °)	3	180°<360°	Tetraedro	4	6	4
	4	240°<360°	Ottaedro	6	12	8
	5	300°<360°	Icosaedro	12	30	20
	6	360°=360°	Non esiste			
Quadrati (angoli di 90°)	3	270°<360°	Cubo o Esaedro	8	12	6
	4	360°=360°	Non esiste			
Pentagoni (angoli di 108°)	3	324°<360°	Dodecaedro	20	30	12
	4	432°>360°	Non esiste			
Esagoni (angoli 120°)	3	360°=360°	Non esiste			



Storicamente lo studio dei poliedri regolari si fa risalire a Pitagora nella cui scuola assunsero un ruolo magico e vennero chiamate figure cosmiche. Platone li collegava alle forme degli elementi della natura:

- cubo = particelle di terra
- tetraedro = fuoco
- ottaedro = aria
- icosaedro = acqua
- dodecaedro = la forma dell'Universo

PROBLEMI
POLIEDRI

1) Un parallelepipedo rettangolo ha per base un quadrato di lato a e la sua altezza misura $2a$. Determina superficie totale, volume e lunghezza della diagonale.

[$S = 10a^2$, $V = 2a^3$, $\sqrt{6}a$]

2) In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base misura l ed anche l'altezza misura l. Determina superficie e volume della piramide.

[$S = \left(1+\sqrt{5}\right)l^2$, $V = \frac{1}{3}l^3$]

3) In un cubo la diagonale misura 6 cm. Qual è la misura dello spigolo del cubo?

[$2\sqrt{3}$]

4) Un parallelepipedo rettangolo ha come base un quadrato di area $64cm^2$ e altezza lunga 4 cm. Qual è la misura della diagonale del parallelepipedo?

[$12cm$]

5) Un tetraedro regolare ha lo spigolo che misura l. Calcola superficie e volume.

[$S = \sqrt{3}l^2$, $V = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3$]

6) In una piramide retta a base quadrata, il lato di base misura a e l'altezza $\frac{a}{2}$. Quanto misura l'angolo diedro tra faccia laterale e base?

[$\frac{\pi}{4}$]

7) Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero di lato l. Se il volume è $V = \sqrt{3}l^3$, quanto misura l'altezza?

[$4l$]

8) In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base misura 10 cm e l'apotema misura 10 cm. Qual è la misura dell'altezza della piramide?

[$5\sqrt{3}$]

9) Un prisma retto ha per base un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 3cm e 4 cm. Sapendo che l'altezza misura 10 cm, determina la superficie e il volume del prisma.

[$S = 132cm^2$, $V = 60cm^3$]

10) In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni della base sono una doppia dell'altra. Sapendo che l'altezza è 2 cm e che il volume è $36cm^3$, determina le dimensioni di base.

[3 cm , 6 cm]

Solidi di rotazione

Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno ad una retta *r* secondo un angolo α.

Se α è un angolo giro allora si dice che la rotazione è **completa**.
In ogni rotazione completa ogni punto *P* della figura piana descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare a *r* passante per *P*.

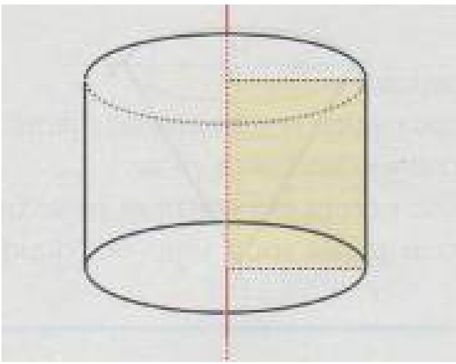
Fra i solidi di rotazione studiamo cilindro, cono e sfera.

Cilindro circolare retto (o semplicemente cilindro)

Il **cilindro circolare retto** (o semplicemente cilindro) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

Il lato attorno a cui ruota il rettangolo è detto altezza del cilindro.

Gli altri due lati perpendicolari all'**altezza** sono detti **raggi di base**.



Un cilindro si dice **equilatero** quando $h=2r$

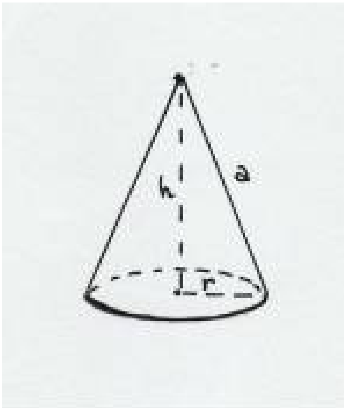
Volume e superficie di un cilindro

$$\boxed{\begin{array}{l} S_L = 2p_{base} \cdot h = 2\pi r \cdot h \\ S_T = 2 \cdot B + S_L = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \\ V = Bh = \pi r^2 \cdot h \end{array}}$$

La formula del volume è analoga a quella del prisma poiché per il principio di Cavalieri il cilindro è equivalente ad un prisma che ha base equivalente e uguale altezza.

Cono circolare retto (o semplicemente cono)

Il **cono circolare retto** (o semplicemente cono) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti.



Il lato attorno a cui ruota il triangolo è detto **altezza** h del cono. L'altro cateto è il **raggio di base** r. L'ipotenusa del triangolo rettangolo descrive la superficie laterale ed è detta **apotema** a.

Un cono si dice **equilatero** quando *a=2r*, cioè quando la sezione che si ottiene tagliandolo con un piano perpendicolare alla base passante per il vertice è un triangolo equilatero.

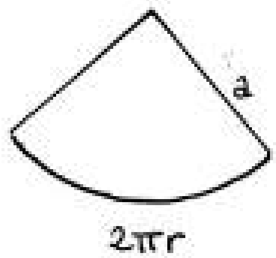
Volume e superficie di un cono

$$\boxed{\begin{aligned} S_L &= \frac{1}{2}2p_{base}\cdot a = \pi r\cdot a \\ S_T &= B + S_L = \pi r^2 + \pi r\cdot a \\ V &= \frac{1}{3}B\cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h \end{aligned}}$$

La formula del volume è analoga a quella della piramide poiché per il principio di Cavalieri il cono è equivalente ad una piramide avente la stessa altezza e la cui base abbia la stessa area della base del cono.

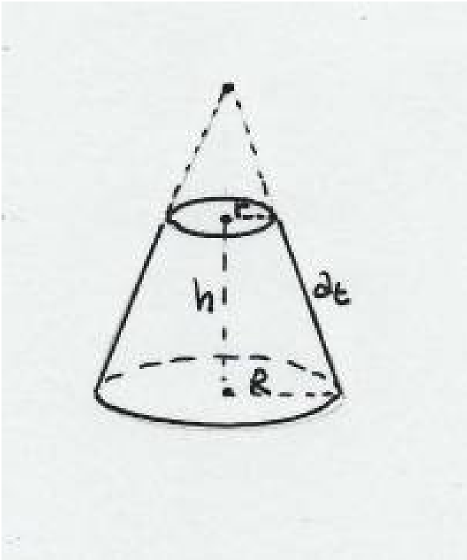
La formula dell'area della superficie laterale si ottiene dal fatto che tale superficie può essere sviluppata in un settore circolare di raggio pari all'apotema a e perciò essa , ricordando che l'area di un settore circolare è pari a $\frac{1}{2} * arco * raggio$,

$$S_l = \frac{1}{2}2\pi\ \ r\ \ a = \pi\ \ r\ \ a$$



Tronco di cono

Il **tronco di cono** si ottiene tagliando un cono con un piano parallelo alla base , oppure può essere pensato come la rotazione completa di un trapezio rettangolo intorno al lato perpendicolare alle basi.



Volume e superficie di un tronco di cono

Con una simbologia ed una dimostrazione analoga a quella vista per il tronco di piramide si ha, indicando con *B* la base maggiore di raggio R , con *b* quella minore di raggio r e con a_t l'apotema del tronco:

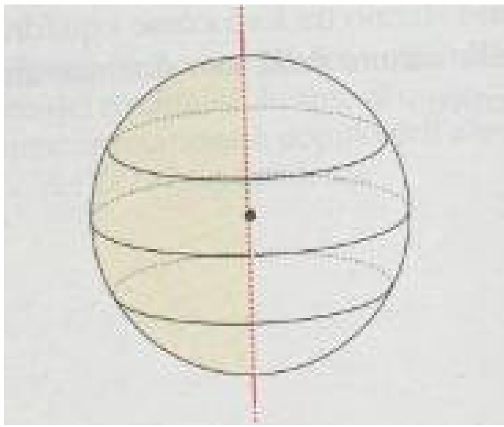
$$S_L = \frac{1}{2}\left[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t\right] = \frac{1}{2}\left[(2\pi R + 2\pi r)\cdot a_t\right] = \pi(R+r)\cdot a_t$$

$$S_T = B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}\left[(2p_B + 2p_b)\cdot a_t\right] = \pi\left[R^2 + r^2 + (R+r)a_t\right]$$

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb})\cdot h = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Sfera

La sfera è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un semicerchio intorno al diametro, oppure è l'insieme dei punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è minore o uguale alla lunghezza di un segmento assegnato detto raggio.



I punti per cui la suddetta distanza dal centro è pari al raggio formano la **superficie sferica**.

Tagliando la superficie sferica con un qualunque piano α si ottiene una circonferenza che ha raggio massimo quando α passa per il centro.

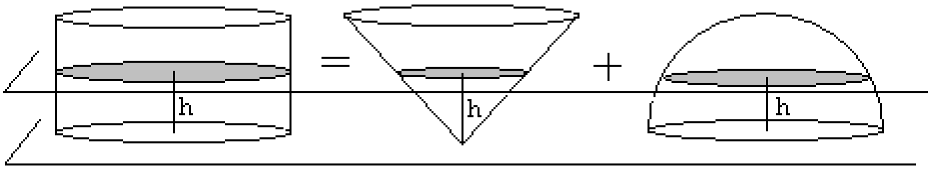
Volume e superficie di una sfera

$$\boxed{\begin{array}{l} S = 4\pi r^2 \\ V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{array}}$$

Volume della sfera

Dimostriamo la formula per il volume mediante passi successivi.

1) Un cilindro avente raggio e altezza r è equivalente alla somma di un cono avente raggio e altezza r e di una semisfera di raggio r.



Infatti se taglio i tre solidi con un piano parallelo ad una distanza h dal piano di appoggio, le sezioni hanno aree rispettivamente πr^2, πh^2 e $\pi(r^2 - h^2)$ che sono quindi legate dalla seguente relazione

$$\pi r^2 = \pi h^2 + \pi\left(r^2 - h^2\right)$$

2) Per il principio di Cavalieri si ha

volume cilindro = volume semisfera + volume cono e quindi

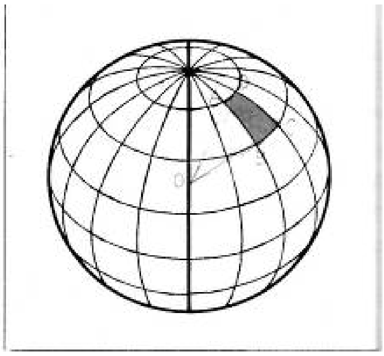
$$volumesfera = V = 2(volumecilindro - volumecono) = 2\left(\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Superficie della sfera

Dimostriamo ora in modo intuitivo e non rigoroso la formula della misura della superficie.
Supponiamo di dividere la superficie sferica in aree A1, A2, …, An individuate da paralleli e meridiani.
Possiamo considerare il volume come la somma dei volumi delle n “piramidi” di base Ai e altezza r.
Quindi

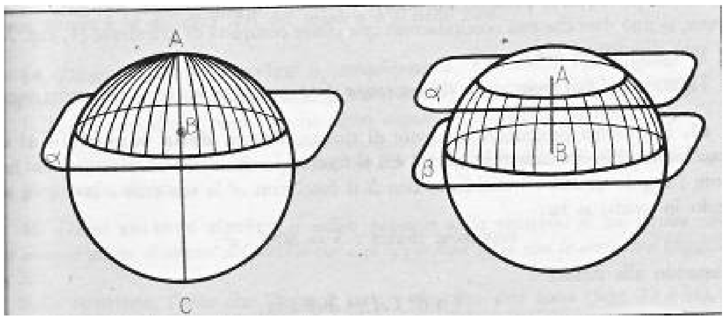
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + ... + \frac{1}{3}A_n r$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2$$



Parti della superficie sferica e della sfera

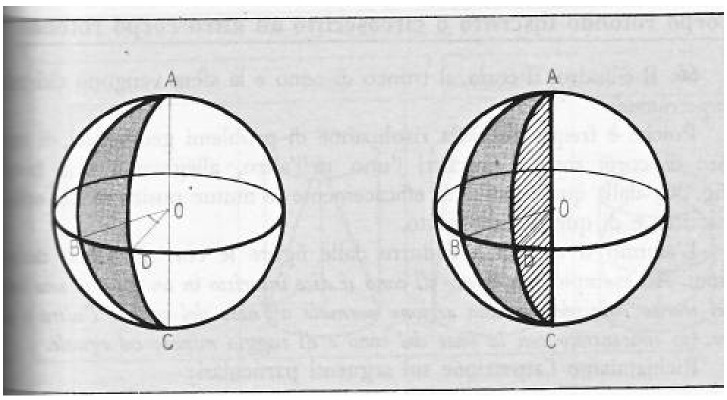
Dato un piano α secante una sfera, esso divide la sua superficie sferica in due parti ciascuna delle quali è detta **calotta**. Se invece consideriamo la sfera tagliata da un piano, individuiamo due parti ciascuna delle quali è detta **segmento sferico ad una base**.



Due piani paralleli dividono una superficie sferica in tre parti: due calotte e la parte compresa tra i due piani chiamata **zona sferica**. Considerando la sfera tagliata da due piani paralleli, la parte compresa tra i due piani è detta **segmento sferico a due basi**.

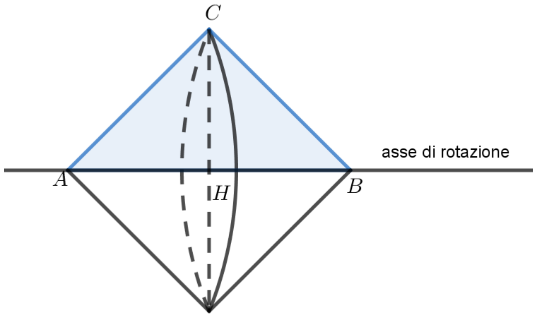
Si chiama **fuso sferico** ciascuna delle due parti in cui resta divisa una superficie sferica da due semipiani aventi come origine una retta passante per il centro della sfera.

Lo **spicchio sferico** è la parte di sfera delimitata da un fuso sferico e dai due semicerchi, lati del fuso.



PROBLEMI
SOLIDI DI ROTAZIONE

1) Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo isoscele ABC intorno all' ipotenusa AB. Sapendo che i cateti misurano $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, determina superficie e volume del solido.



Svolgimento
Osserviamo che si ottengono due coni uguali "attaccati" per la base: la superficie del solido sarà data dalla somma delle superfici laterali, il volume sarà dato dalla somma dei volumi dei due coni.

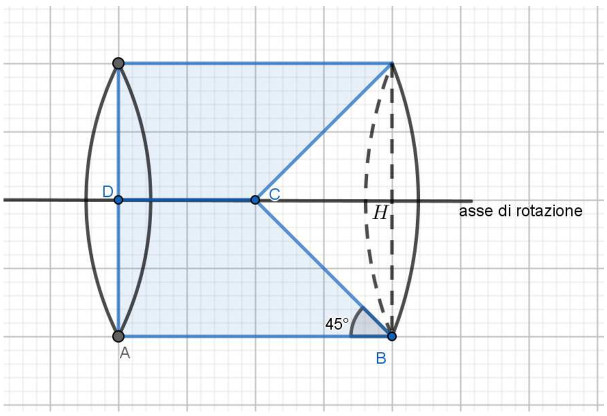
Possiamo quindi calcolare superficie e volume del solido ottenuto:

$$S_l = \pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{AC} = \pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \cdot a \rightarrow S = 2 \cdot \pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \cdot a = \sqrt{2}\pi a^2$$

$$V_{cono} = \frac{\pi}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{AH} = \frac{1}{3}\left(\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi a^3 \rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3$$

2) Considera un trapezio rettangolo ABCD avente base maggiore $\overline{AB} = 2l$, base minore $\overline{CD} = l$ e $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$.

Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base minore CD e determinane superficie e volume



Svolgimento

In questo caso otteniamo un *cilindro - cono* (un cilindro a cui si sottrae un cono) e quindi:

$$S = B_{cilindro} + S_{l(cilindro)} + S_{l(cono)} = \pi\overline{AD}^2 + 2\pi\overline{AD} \cdot \overline{AB} + \pi\overline{BH} \cdot \overline{BC}$$

$$V = V_{cilindro} - V_{cono} = \pi\overline{AD}^2 \cdot \overline{AB} - \frac{1}{3}\pi\overline{BH}^2 \cdot \overline{HC}$$

Poiché $\overline{AD} = \overline{BH} = \overline{HC} = l$ sostituendo si ha $S = \left(5 + \sqrt{2}\right)\pi l^2$, $V = \frac{5}{3}\pi l^3$

3) Un cilindro ha raggio di base $2a$ e altezza $4a$. Determina superficie e volume del cilindro.

[$S = 24\pi a^2$, $V = 16\pi a^3$]

4) Un cilindro ha superficie totale uguale a $70\pi\ cm^2$ e altezza lunga 2 cm. Determina il volume del cilindro.

[$50\pi\ cm^3$]

5) Un cono ha raggio di base $3a$ e altezza $4a$. Determina superficie e volume del cono.

[$S = 24\pi a^2$, $V = 12\pi a^3$]

6) Una sfera ha raggio $2a$. Determina superficie e volume della sfera.

[$S = 16\pi a^2$, $V = \frac{32}{3}\pi a^3$]

7) Determina il volume di una sfera sapendo che l'area della sua superficie è $9\pi\ cm^2$.

[$V = \frac{9}{2}\pi\ cm^3$]

8) Considera un cubo di lato l e determina il raggio della sfera inscritta nel cubo e il raggio della sfera circoscritta al cubo.

[$\frac{l}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}l$]

9) Considera un rettangolo di dimensioni $3a$, a. Determina i volumi dei solidi che si ottengono ruotandolo intorno alla dimensione maggiore o minore. Disegna i due solidi.

[$V_1 = 3\pi l^3$, $V_2 = 9\pi l^3$]

10) Considera un triangolo rettangolo di cateti a, $2a$. Determina i volumi dei solidi che si ottengono ruotandolo intorno al cateto maggiore o minore.

[$V_1 = \frac{2}{3}\pi a^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3$]

11) Considera un trapezio isoscele ABCD avente la base maggiore $\overline{AB} = 3a$, la base minore $\overline{CD} = a$ e l'altezza uguale alla base minore. Determina superficie e volume del solido che si ottiene ruotando il trapezio intorno alla base maggiore.

[$S = 2\left(1+\sqrt{2}\right)\pi a^2$, $V = \frac{5}{3}\pi a^3$]

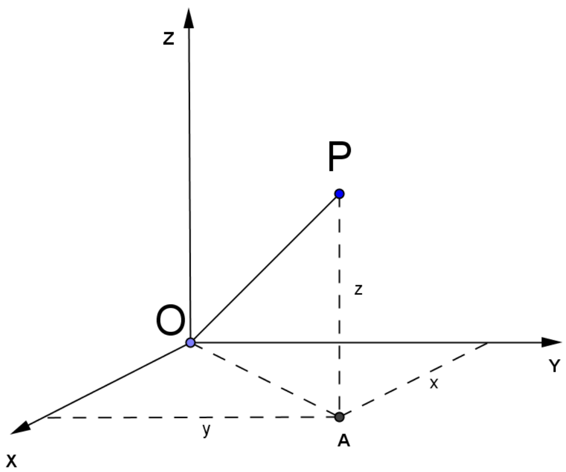
12) Considera un trapezio rettangolo ABCD avente la base maggiore $\overline{AB} = 2l$, la base minore uguale all'altezza $\overline{CD} = \overline{AD} = l$. Determina superficie e volume del solido ottenuto dalla rotazione del trapezio intorno alla base minore.

[$S = \left(5+\sqrt{2}\right)\pi l^2$, $V = \frac{5}{3}\pi l^3$]

Complemento
La geometria analitica dello spazio

Il sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio

Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio è costituito da tre rette x, y, z incidenti in O (origine) , a due a due perpendicolari ed orientate come in figura: un qualsiasi punto P del piano è quindi individuato da una terna ordinata di numeri reali $(x; y; z)$ detti rispettivamente ascissa, ordinata e quota.
Il punto $A(x; y)$ rappresenta la proiezione di P sul piano Oxy.



Distanza di un punto dall'origine del sistema

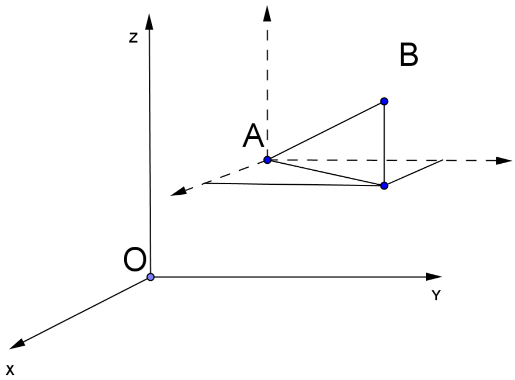
La distanza $\overline{OP}$ si può calcolare determinando prima $\overline{OA}^2 = x^2 + y^2$ e poi applicando ancora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OAP (retto in A): $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + z^2$.
In conclusione :

$$\boxed{\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Distanza tra due punti

Dati due punti $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$ la distanza $\overline{AB}$ si calcola in modo analogo al procedimento usato per la distanza di un punto dall'origine, pensando di portare l'origine del sistema di riferimento in A e si ha quindi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Vettori

Nella geometria analitica dello spazio **è particolarmente utile saper operare con i vettori.** Osserviamo che ad un punto $P(x;y;z)$ possiamo sempre associare il vettore $\vec{OP}$ dove O è l'origine del sistema di riferimento.

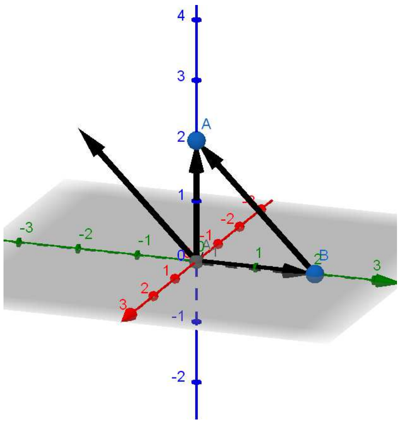
Somma di vettori

Se consideriamo i vettori $\vec{OA}$ con $A(x_A;y_A;z_A)$ e $\vec{OB}$ con $B(x_B;y_B;z_B)$ si dimostra facilmente che $\vec{OA}+\vec{OB}$ è un vettore applicato nell'origine e avente come secondo estremo il punto $(x_A+x_B;y_A+y_B;z_A+z_B)$.

Differenza di vettori

Se consideriamo i vettori $\vec{OA}$ con $A(x_A;y_A;z_A)$ e $\vec{OB}$ con $B(x_B;y_B;z_B)$ si osserva che il vettore $\vec{OA}-\vec{OB}$ è parallelo al vettore $\vec{BA}$ ed il vettore parallelo applicato nell'origine avrà come secondo estremo il punto $(x_A-x_B;y_A-y_B;z_A-z_B)$.

Esempio: $A(0,0,2)$ e $B(0,2,0)$: il vettore $\vec{OA}-\vec{OB}$ ha come secondo estremo $(0,-2,2)$ ed è parallelo al vettore $\vec{BA}$



Prodotto scalare tra due vettori

Dalla fisica sappiamo che il prodotto scalare tra due vettori è definito nel modo seguente:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=v\cdot w\cdot\cos\alpha$$

dove v, w sono i moduli dei due vettori e α è l'angolo compreso tra essi.

Si può dimostrare che se $\vec{v}(x_A,y_A,z_A)$ e $\vec{w}(x_B,y_B,z_B)$ il prodotto scalare tra due vettori risulta:

$$\boxed{(x_A,y_A,z_A)\cdot(x_B,y_B,z_B)=x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B+z_A\cdot z_B}$$

Vettori perpendicolari

Consideriamo due vettori $\vec{OA}(x_A,y_A,z_A)$ e $\vec{OB}(x_B,y_B,z_B)$: se sono perpendicolari il triangolo OAB è retto in O e quindi applicando il teorema di Pitagora avremo:

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2 \Leftrightarrow x_A{}^2+y_A{}^2+z_A{}^2+x_B{}^2+y_B{}^2+z_B{}^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2$$

Sviluppando, dopo aver semplificato, otteniamo $\boxed{x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B+z_A\cdot z_B=0}$

Quindi **se due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare risulta nullo**.

Equazione di un piano

Consideriamo un piano α : possiamo individuarlo conoscendo un vettore $\vec{n}(a,b,c)$ perpendicolare ad esso (viene chiamato **vettore normale**) e un punto $P_o(x_o, y_o, z_o) \in \alpha$.
(figura realizzata con Geogebra 3D)

$P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_o P}$ è perpendicolare ad $\vec{n}$ e quindi il prodotto scalare

$$(a,b,c)\cdot(x-x_o, y-y\ \ , z-z_o)=0$$

e sviluppando il prodotto scalare abbiamo

$$a\cdot(x-x_o)+b\cdot(y-y_o)+c\cdot(z-z_o)=0$$

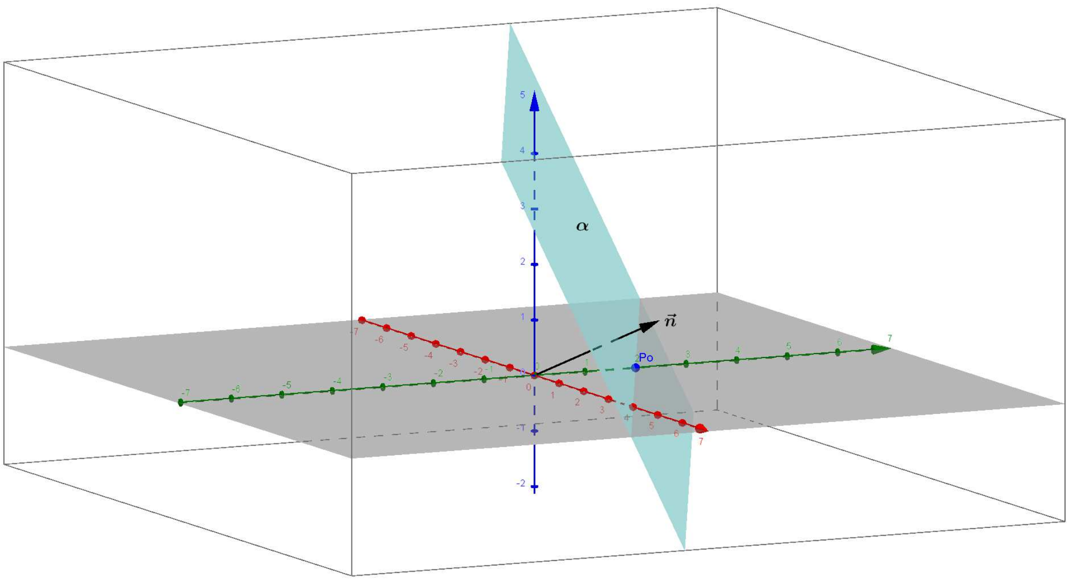
E in conclusione otteniamo una equazione del tipo

$\boxed{ax+by+cz=d}$ con (a,b,c) vettore perpendicolare al piano

Esempio: supponiamo di avere $\vec{n}(1,2,1)$ e $P_o(0,2,0)$.

Il piano di vettore normale $\vec{n}$ passante per P_o avrà equazione:

$$(1,2,1)\cdot(x-0, y-2, z-0)=0 \rightarrow x+2\cdot(y-2)+z=0 \rightarrow x+2y+z-4=0 \rightarrow x+2y+z=4$$



Osservazioni

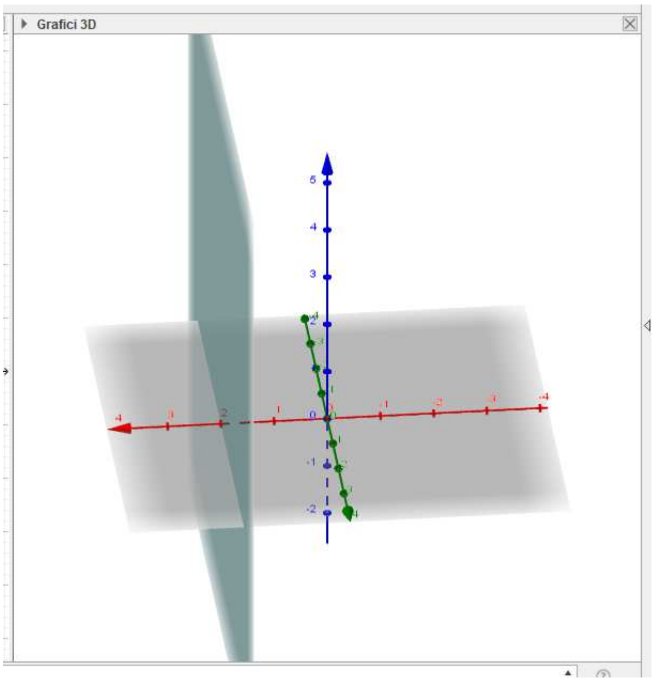
Se d=0 il piano passa per l'origine.

Il piano yz ha equazione $x=0$ e un piano parallelo al piano yz ha equazione $x=k$.

Il piano xz ha equazione $y=0$ e un piano parallelo al piano xz ha equazione $y=k$.

Il piano xy ha equazione $z=0$ e un piano parallelo al piano xy ha equazione $z=k$.

Esempio: in figura ecco come appare con Geogebra 3D il piano di equazione $x=2$.



Piani paralleli

Due piani $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono paralleli quando i vettori normali sono paralleli e quindi quando $(a',b',c')=k(a,b,c) \Rightarrow \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$.

Esempio: i piani $x+2y-z=0$, $2x+4y-2z=3$ sono paralleli.

Nota: se si ha $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}$ i due piani sono coincidenti.

Esempio: i piani $x+2y-z=1$, $2x+4y-2z=2$ sono coincidenti.

Piani perpendicolari

Due piani $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono perpendicolari quando i vettori normali sono perpendicolari cioè quando il loro prodotto scalare è nullo e quindi quando

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$$

Esempio: i piani $x+2y-z=0$, $2x+y+4z=3$ sono perpendicolari poiché $(1,2,-1)\cdot(2,1,4)=0$

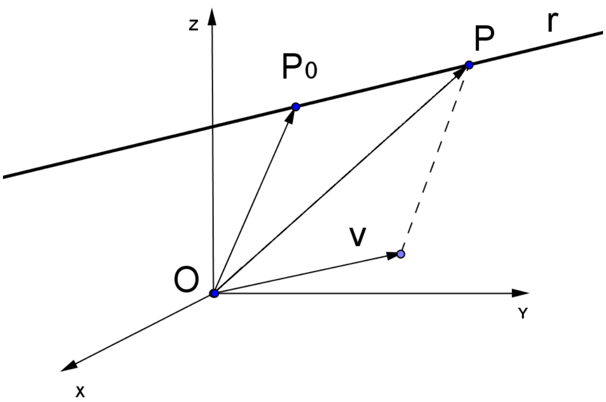
Equazione di una retta

L’equazione di una retta può essere scritta come intersezione di due piani qualsiasi passanti per essa, ma c’è un modo più significativo di scrivere le equazioni di una retta r : se conosciamo un punto $P_0 \in r$ e la **direzione della retta** $\vec{v}(a,b,c)$ (vettore parallelo alla retta chiamato vettore direzione), un qualsiasi punto $P(x,y,z) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP}$ è parallelo a $\vec{v}$ cioè

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot a \\ y - y_0 = t \cdot b \\ z - z_0 = t \cdot c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_o + t \cdot a \\ y = y_o + t \cdot b \\ z = z_o + t \cdot c \end{cases}$$

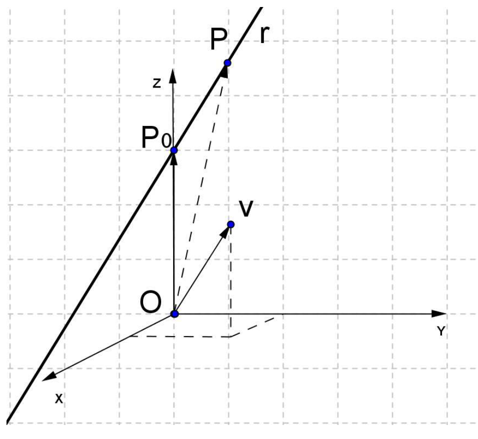
dove t è un parametro reale e per questo si parla di **equazioni parametriche** della retta: al variare del valore di t si ottengono i punti della retta r.

Nella figura seguente è stato disegnato il punto P corrispondente al valore del parametro $t = 1$.



Esempio
Le equazioni parametriche della retta r di direzione $\vec{v}(1,2,2)$ passante per $P_0(0,0,3)$ sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t \\ z = 3 + 2 \cdot t \end{cases}$$



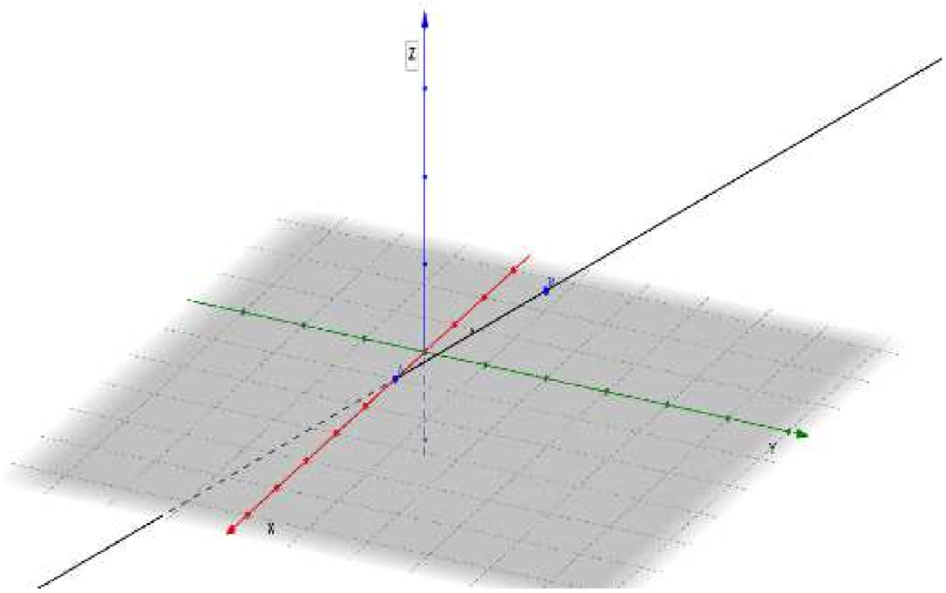
Retta passante per due punti

Come possiamo determinare le equazioni parametriche della retta passante per due punti assegnati?

Consideriamo per esempio i punti $A(1,0,0)$ e $B(0,2,1)$.
Se consideriamo i vettori associati ai due punti cioè $\overrightarrow{OA}(1,0,0)$ e $\overrightarrow{OB}(0,2,1)$ appare evidente che la direzione della retta per A e B è data dal vettore $\overrightarrow{AB}$ (o dal vettore opposto) e quindi possiamo prendere **come vettore direzione il vettore differenza** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ cioè $\vec{v}(-1,2,1)$ e scrivere le equazioni parametriche scegliendo come punto P_o il punto A oppure B (a piacere).

Per esempio possiamo scrivere: $r_{AB}\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

Ecco come appare questa retta utilizzando Geogebra 3D :



Esempi

1) Consideriamo per esempio le rette seguenti

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

Si osserva che i vettori direzione delle due rette $(1;2;-2)$, $(2;4;-4)$ sono paralleli e quindi le rette sono parallele (non sono coincidenti perché si verifica facilmente che non hanno punti in comune).

2) Consideriamo ora le rette di equazione

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} , \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

In questo caso i vettori direzione $(3;2;-1)$, $(1;3;0)$ non sono paralleli. Vediamo allora se le rette hanno un punto in comune (incidenti) oppure no (rette sghembe).

Prendiamo il sistema formato dalle equazioni relative a due coordinate, per esempio alla y e alla z

$$\begin{cases} 2t = 5 + 3\lambda \\ 1 - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato per ora $y = 2$, $z = 0$: andiamo a questo punto a sostituire i valori dei parametri nelle rispettive equazioni per trovare l'ascissa:

$$r \rightarrow x = 2, \quad s \rightarrow x = 2$$

Dal momento che abbiamo trovato la stessa ascissa le rette sono incidenti nel punto $P(2;2;0)$.
Nota: se due rette incidenti hanno vettori direzione perpendicolari allora sono perpendicolari.

3) Consideriamo le rette di equazione:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} , \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Non sono parallele, ma in questo caso risolvendo il sistema formato dalle equazioni relative alla y e alla z e sostituendo i valori di t e λ nella prima equazione, troviamo due valori diversi della x e quindi le rette non hanno punti in comune e , non essendo parallele, sono sghembe.

PROBLEMI

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

I) Piani nello spazio

1. Scrivi l'equazione del piano passante per i punti $A(1;0;0)$ $B(0;-3;1)$ $C(2;-2;0)$.

   Svolgimento: imposta un sistema sostituendo nell'equazione generica di un piano prima le coordinate del punto A, poi di B e infine di C.

   $$\begin{cases} a = d \\ -3b + c = d \\ 2a - 2b = d \end{cases} \rightarrow .... \begin{cases} a = d \\ b = \dfrac{d}{2} \\ c = \dfrac{5}{2}d \end{cases}$$

   Quindi ponendo per esempio $d = 2$ abbiamo $a = 2$, $b = 1$, $c = 5 \rightarrow 2x + y + 5z = 2$

2. Scrivi l'equazione del piano passante per i punti $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,3)$.

   $[x - y = 0]$

3. Determina l'equazione del piano α passante per $P(-1;1;1)$ e parallelo al piano β di equazione $x - 2y + z - 3 = 0$

   $[x - 2y + z + 2 = 0]$

4. Come risultano i piani $\alpha : 2x + y + z + 1 = 0$ e $\beta : 4x + 2y + 2z - 1 = 0$?

   [paralleli]

5. Come risultano i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : x + y = 0$?

   [perpendicolari]

6. Verifica che i punti $A(1;0;0)$ $B(0;2;0)$ $C(0;0;1)$ e $D\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ sono complanari e determina l'equazione del piano passante per essi.

   $[2x + y + 2z - 2 = 0]$

II) Rette nello spazio

1. Determina le equazioni parametriche della retta r passante per $A(-1;4;-5)$ e $B(0;3;-3)$.

a) Il punto $P(1;2;-1)$ appartiene alla retta?

b) Determina l'intersezione di r con il piano xy.

[$r\begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=-3+2t \end{cases}$; $P\in r$; $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right)$]

2. Come risultano le seguenti rette?

$$r\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+4t \\ z=-2t \end{cases} \quad ; \quad s\begin{cases} x=\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$$

[parallele]

3. Come risultano le rette seguenti?

$$r\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+7t \\ z=2t \end{cases} \quad ; \quad s\begin{cases} x=5\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

[sghembe]

4. Come risultano $r:(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(1;1;1)$, $s:(x,y,z)=(1,0,0)+t(-1;1;0)$?

[incidenti e perpendicolari]

5. Determina la retta passante per $P(2;0;0)$ e perpendicolare al piano $x-y=0$.

[$(x,y,z)=(2;0;0)+t(1;-1;0)$]