Esponenziali e logaritmi

1. Funzione esponenziale

2. Funzione logaritmica

3. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

La funzione esponenziale

Consideriamo la funzione

$$f : x \to 2^x$$

(posso anche scrivere $f(x) = 2^x$ oppure $y = 2^x$).

Questa funzione risulta definita per tutti i numeri reali?

Proviamo:

- se $x = n \in \mathbb{N}$ $\quad 2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \quad \cdot 2$ (2 moltiplicato per se stesso n volte)
- se $x = -n \in \mathbb{Z}$ $\quad 2^{-n} = \dfrac{1}{2^n}$
- se $x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $\quad 2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m}$
- se x è un numero irrazionale, per esempio $x = \sqrt{2}$ **possiamo definire** $2^{\sqrt{2}}$ come l'elemento "separatore" delle due classi "contigue" di numeri reali

  $2^{1,4}$ $2^{1,41}$ $2^{1,414}$ ….

  $2^{1,5}$ $2^{1,42}$ $2^{1,415}$ ….

  (dove si sono considerate le approssimazioni per eccesso e per difetto di $\sqrt{2}$).
  Quindi $f(x) = 2^x$ risulta definita $\forall x \in \Re$ cioè il suo dominio è $\Re$.

Chiamiamo **funzione esponenziale** una funzione del tipo

$$\boxed{y = a^x}$$

La variabile x si trova all'esponente e **a è un numero reale positivo e diverso da 1** e si chiama **base** della funzione esponenziale.

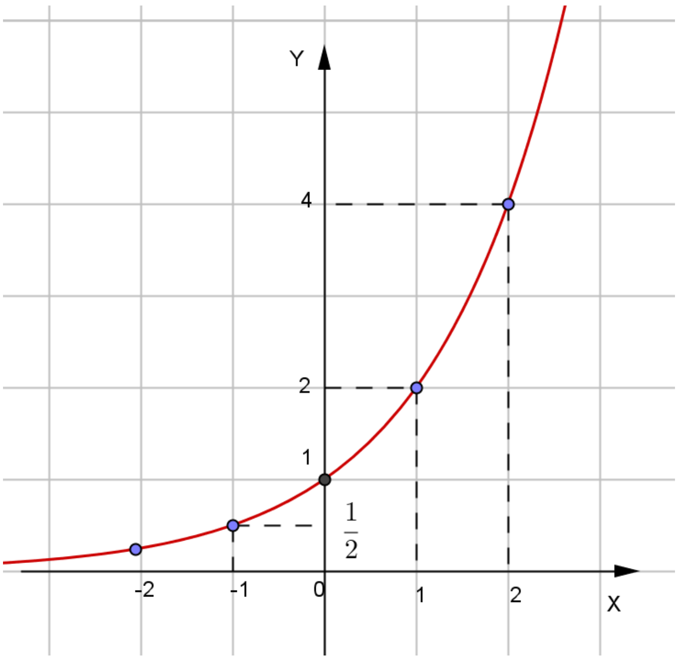
Per quello che abbiamo visto prima la funzione esponenziale ha come dominio (insieme di definizione) l'insieme $\Re$ dei numeri reali.

Osservazione 1
Si considera la base a > 0 perché la base a=0 non avrebbe nessun interesse e con basi negative non avrei sempre risultati reali: per esempio $a^{\frac{1}{2}}$ con a < 0 non è un numero reale.

Osservazione 2
Non si considera la base a = 1 perché avremmo la funzione costante y=1.

Come risulta il grafico di $y = 2^x$?

Consideriamo per esempio a = 2 : possiamo fare una tabella assegnando vari valori alla variabile x e otteniamo



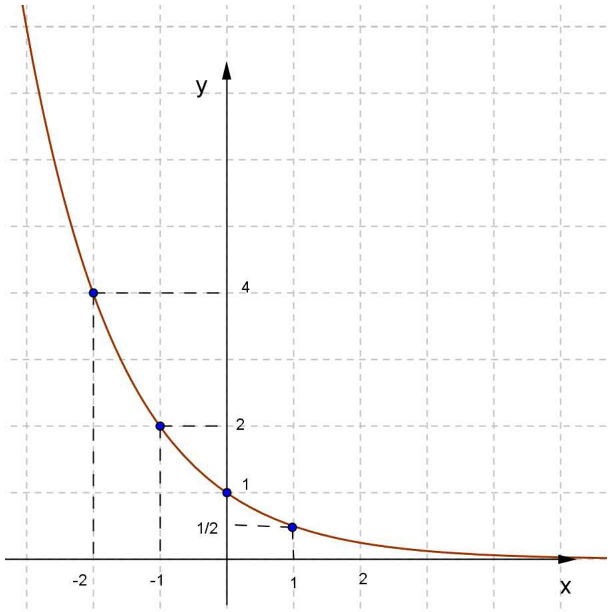
x	y
-3	2^{-3} =1/8
-2	2^{-2} =1/4
-1	2^{-1}= 1/2
0	2^0 = 1
1	2^1 = 2
2	2^2 = 4

Osservazioni

La funzione $y = 2^x$ ha le seguenti caratteristiche:

- è crescente cioè se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- è iniettiva cioè ad elementi distinti corrispondono immagini distinte (se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$);
- è sempre positiva e quindi il grafico si trova sempre sopra all'asse x;
- ha come asintoto l'asse x.

Consideriamo adesso $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Come risulta il suo grafico?



x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4

Osserviamo che in questo caso la funzione è decrescente, ma per il resto ha le stesse caratteristiche.

In conclusione quindi avremo che

$$y = a^x$$

è una funzione

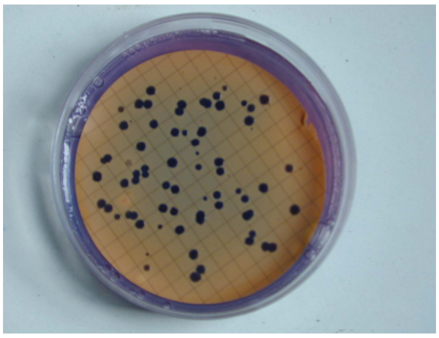
- crescente quando la base $a > 1$,
- decrescente per $0 < a < 1$.

Il codominio (insieme delle immagini) di $y = a^x$ è in ogni caso l'insieme dei reali positivi $y > 0$.

Funzioni esponenziali nella realtà

Colonie di batteri

La mitosi è un processo legato alla divisione cellulare: **una cellula si divide in due cellule** figlie che risultano geneticamente e morfologicamente identiche tra loro e alla cellula madre.



La maggior parte dei batteri si riproduce mediante il meccanismo della mitosi: una volta che una cellula ha raggiunto una certa dimensione, si divide in due cellule identiche, di massa pari a circa la metà di quella originaria.

Intanto anche le due cellule figlie crescono fino a dividersi ulteriormente e così via….

Supponiamo di poter osservare l'evoluzione di una popolazione di questi batteri le cui cellule ogni ora si duplicano e che all'inizio della nostra osservazione ci siano $N_0 = 100$ batteri vediamo come risulta il numero N(t) dei batteri che popolano la colonia al tempo *t* (misurando *t* in ore).

numero iniziale di batteri : N(0) = 100

numero di batteri dopo 1 ora : N(1) = $100 \cdot 2$

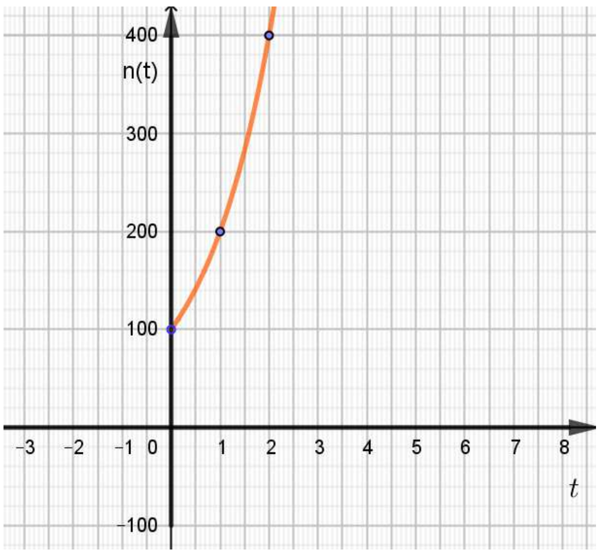
numero di batteri dopo 2 ore : N(2) = $100 \cdot 2 \cdot 2 \to 100 \cdot 2^2$

ecc.

Quindi $N(t) = 100 \cdot 2^t$

La crescita del numero dei batteri ha come "curva di sostegno" il grafico di una funzione esponenziale del tipo $y = N_o \cdot 2^x$ in cui x rappresenta il tempo t e si ha $y(0) = N_0$ cioè il valore della funzione per *x*=0 risulta N_0: naturalmente avrà senso considerare solo alcuni punti corrispondenti a t=0, t=1, t=2 ecc.

Disegniamo il grafico partendo da $t = 0$.



Decadimento radioattivo

Alcune sostanze, dette radioattive, si trasformano in altre sostanze (si dice che "decadono") e il tempo in cui la sostanza si dimezza (metà della sua massa iniziale si è trasformata) viene chiamato "tempo di dimezzamento" ed è diverso da sostanza a sostanza radioattiva.

Supponiamo per semplicità di considerare 100 grammi di una sostanza radioattiva che ha un tempo di dimezzamento di 1 giorno: se misuriamo il tempo in giorni e indichiamo con *m(t)* la massa (in grammi) della sostanza al giorno *t* possiamo scrivere che:

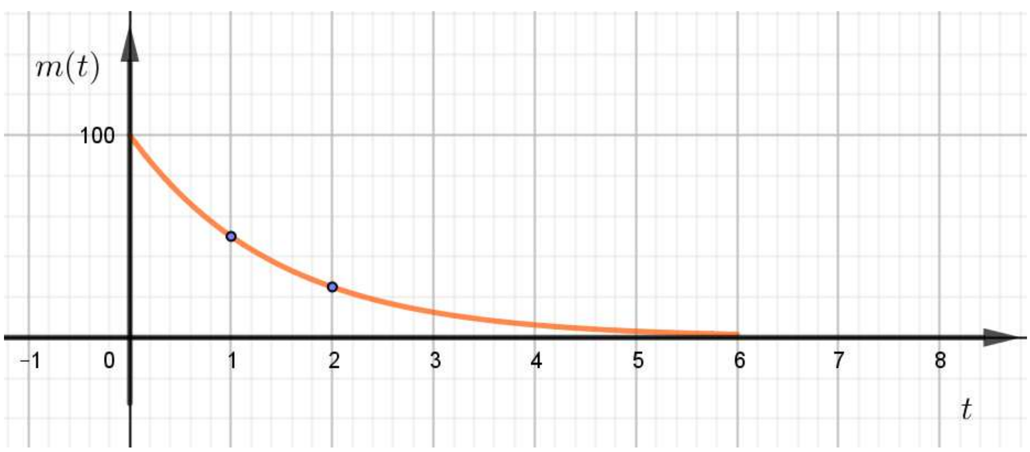
massa iniziale $m(0)=100$

massa dopo 1 giorno: $m(1)=100\cdot\frac{1}{2}$

massa dopo 2 giorni: $m(2)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\rightarrow 100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

ecc.

Quindi avremo che $m(t)=100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ cioè la massa sarà rappresentata dall'andamento di una funzione esponenziale di base $a=\frac{1}{2}$ e valore iniziale $m(0)=100$ (naturalmente dovremo considerare solo i punti del grafico corrispondenti a t=0, t=1 ecc.(t misurato in giorni).



Interesse bancario composto

Quando versiamo dei soldi in banca riceviamo un compenso che è l'interesse.
L'interesse è il prezzo che la banca paga per poter disporre del nostro denaro e quasi sempre si tratta di quello che si chiama i*nteresse composto* cioè l'interesse è calcolato alla fine di ogni anno e si capitalizza, cioè si aggiunge al capitale depositato.

Quindi se abbiamo depositato 100 euro e l'interesse è del 5% composto il primo anno guadagneremo 5 euro ma il secondo anno guadagneremo il 5% di 100+5=105 euro quindi 5,25 euro ecc.

Supponiamo di aver depositato in banca 100 euro e che la banca applichi un interesse composto del 10%.

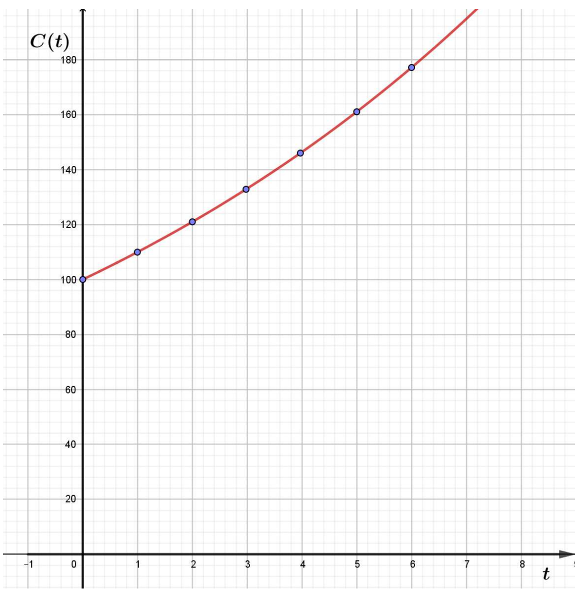
Calcoliamo il capitale $C(1)$, $C(2)$ … C(t) dopo 1, 2 anni ….*t* anni

$$C(1) = 100 + 100 \cdot \frac{1}{10} \rightarrow 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

$$C(2) = C(1) + C(1) \cdot \frac{1}{10} \rightarrow C(1) \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right) \rightarrow 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 \text{ ecc.}$$

Quindi avremo: $C(t) = 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^t$

Si tratta di una funzione esponenziale che ha valore iniziale C(0)=100 e base $a = \frac{11}{10}$ (maggiore di 1).



Funzione logaritmica

Definizione di logaritmo
Si definisce logaritmo in base a di un numero x e si indica con la scrittura $\log_a x$, l'esponente da dare alla base a per ottenere x.

Per esempio $\log_{10} 1000 = 3$ perché $10^3 = 1000$
La base a deve essere positiva cioè $a > 0$ e $a \neq 1$ così come avevamo visto per la funzione esponenziale.

La funzione $f : x \to \log_a x$ cioè $y = \log_a x$ viene detta funzione logaritmica ed è la **"funzione inversa" della funzione esponenziale:** infatti per esempio, considerando la base $a = 10$

$$3 \xrightarrow{10^x} 10^3$$

$$10^3 \xrightarrow{\log_{10} x} 3$$

Nota
Prova a fare alcune prove di calcolo di logaritmi in base 10 con la calcolatrice: il tasto **log** indica il logaritmo in base 10 ed è presente in tutte le calcolatrici:

$$\log_{10} 10 = 1 \qquad \log_{10} 100 = 2 \text{ ecc.}$$

Nota storica
L'idea su cui si basa il concetto di logaritmo è molto antica e se ne trova già traccia nelle opere di Archimede.
Consideriamo per esempio la base 2 (la base veniva chiamata *ragione)* e facciamo una tabella in cui mettiamo in una colonna le potenze del 2 e nella colonna accanto l'esponente corrispondente (che veniva chiamato *indice*): nel sedicesimo secolo il matematico scozzese **John Napier**, noto con il nome italianizzato di Giovanni Nepero, coniò il termine ancora oggi utilizzato di logaritmo, dal greco ***logon arithmos***, cioè *numero della ragione* intendendo l'indice, cioè l'esponente, per avere il numero della tabella.

Numero	Logon arithmos
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
…..	…

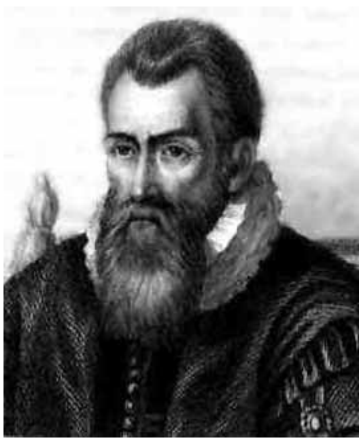
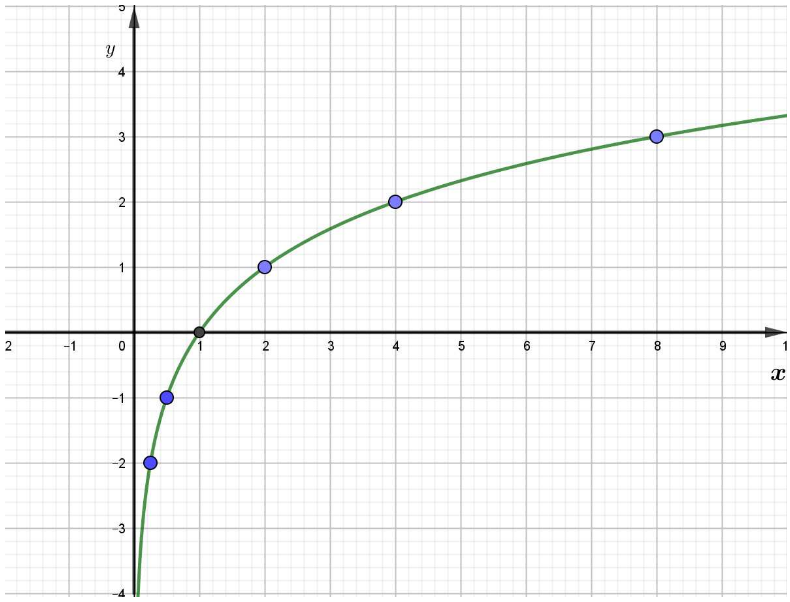


Grafico della funzione logaritmica

1) Consideriamo per esempio la funzione $y = \log_2 x$: per tracciarne il grafico facciamo prima la tabella e poi riportiamo i vari punti.

x	$y = \log_2 x$
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



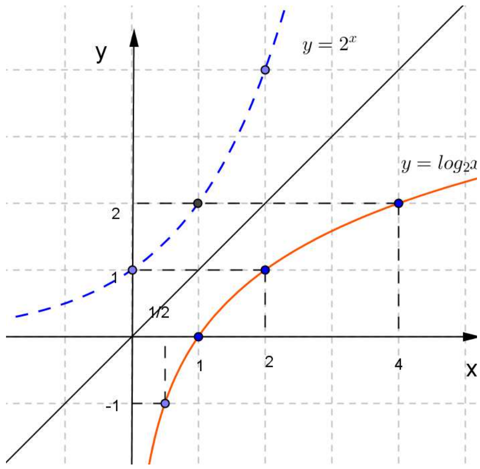
- Osserviamo che il dominio della funzione logaritmica è x > 0, mentre il codominio sono tutti i numeri reali: dominio e codominio sono scambiati rispetto alla funzione esponenziale.

- Il grafico ha come asintoto verticale l'asse *y* (l'esponenziale aveva invece l'asse *x*)

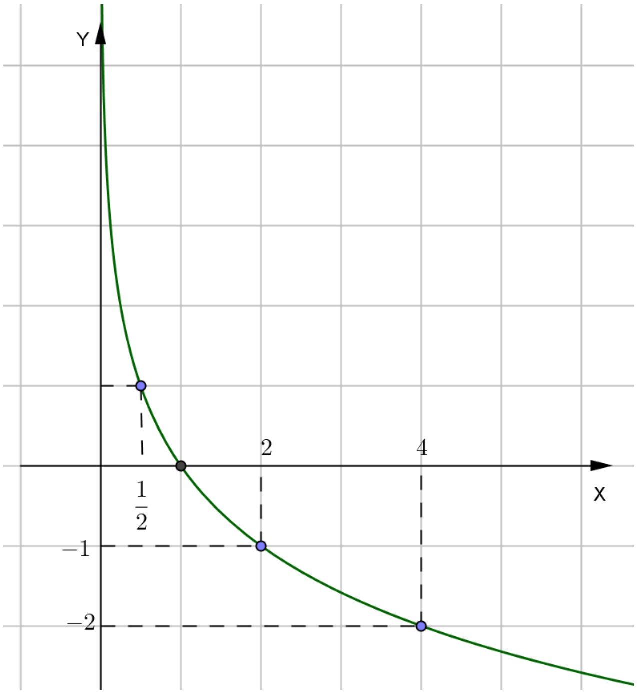
- Se, come in questo caso, la base *a* > 1 otteniamo una funzione crescente (come nel caso della funzione esponenziale).

- Il grafico interseca l'asse *x* in (1;0)

Osservazione
Poiché la funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale i grafici di $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante perché i loro punti hanno ascissa e ordinata scambiate (vedi figura).



2) Consideriamo una funzione logaritmica con base minore di 1: tracciamo per esempio il grafico di $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:



x	$\log_{1/2}$x
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2

- Osserviamo che anche in questo caso il dominio della funzione logaritmica è x > 0, mentre il codominio sono tutti i numeri reali: dominio e codominio sono scambiati rispetto alla funzione esponenziale.

- Il grafico ha come asintoto verticale l'asse *y* (l'esponenziale aveva invece l'asse *x*)

- Se, come in questo caso, la base $0 < a < 1$ otteniamo la funzione è **decrescente** (come accadeva anche per la funzione esponenziale con base minore di 1).

- Il grafico interseca l'asse *x* in (1;0)

Vediamo alcune proprietà dei logaritmi.
.

Proprietà dei logaritmi

1) $$\boxed{\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n}$$

Dimostrazione

Poniamo $\log_a m = x$ cioè $a^x = m$ e $\log_a n = y$ cioè $a^y = n$

allora $m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e quindi

$$x + y = \log_a(m \cdot n)$$

Esempio: $\log_{10} 10 \cdot 100 = \log_{10} 10 + \log_{10} 100$

Infatti $\log_{10} 10 \cdot 100 = \log_{10} 1000 = 3$ e $\log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$

2) $$\boxed{\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n}$$

Dimostrazione

Ponendo $\log_a m = x$ e $\log_a n = y$ abbiamo che $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ e quindi

$$x - y = \log_a\left(\frac{m}{n}\right)$$

Esempio: $\log_{10} \frac{1000}{10} = \log_{10} 1000 - \log_{10} 10$

Infatti $\log_{10} \frac{1000}{10} = \log_{10} 100 = 2$ e $\log_{10} 1000 - \log_{10} 10 = 3 - 1 = 2$

3) $$\boxed{\log_a(m^n) = n \cdot \log_a m}$$

Dimostrazione

Poniamo $\log_a m = x$ cioè $a^x = m$ avremo che $m^n = (a^x)^n = a^{x \cdot n}$ e quindi

$$n \cdot x = \log_a(m^n)$$

Esempio: $\log_{10}\left(10^3\right) = 3 \cdot \log_{10} 10$

Infatti $\log_{10}\left(10^3\right) = 3$ e $3 \cdot \log_{10} 10 = 3 \cdot 1 = 3$

4) **Cambiamento di base** $\boxed{\log_a m = \dfrac{\log_b m}{\log_b a}}$

Dimostrazione

Poniamo $a^x = m$: se a^x è uguale a *m* allora saranno uguali anche i loro logaritmi in base b:

$$\log_b a^x = \log_b m \Rightarrow x \cdot \log_b a = \log_b m \Rightarrow x = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

(abbiamo applicato la proprietà 3 dei logaritmi e poi ricavato *x*).

Esempio: $$\log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cong \frac{0{,}699}{0{,}477} \cong 1{,}47$$

Calcolo di un logaritmo

Alcuni logaritmi possono essere calcolati a mente utilizzando la conoscenza delle potenze.

Per esempio $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$.

Ma quanto vale, per esempio**,** $\log_2 3$ **?**

Essendo il numero 3 compreso tra 2 e 4 il suo logaritmo sarà compreso tra $\log_2 2 = 1$ e $\log_2 4 = 2$: per trovare il valore approssimato di $\log_2 3$ possiamo utilizzare la calcolatrice.

In alcune calcolatrici è presente anche il tasto che permette di calcolare il logaritmo in una base qualunque ma se non fosse presente possiamo cambiare base e riportarci alla base 10.

Abbiamo quindi:

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cong \frac{0{,}477}{0{,}301} \cong 1{,}58$$

Nota: in genere nelle calcolatrici è presente anche il tasto **ln** che permette di calcolare il logaritmo in base *e* (***e*** è un numero irrazionale molto importante in matematica per la descrizione di numerosi fenomeni ed il cui valore approssimato è 2,7).

Funzioni logaritmiche nella realtà

Logaritmi e chimica

In chimica la concentrazione molare di ioni H^+ presenti in una soluzione viene indicata con il simbolo $[H^+]$ e si ha:

$[H^+]=1$ per una soluzione di massima acidità;

$[H^+]=10^{-7}$ per una soluzione neutra;

$[H^+]=10^{-14}$ per una soluzione di minima acidità (basica).

Il pH di una soluzione si definisce come

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

e quindi abbiamo che:

se $[H^+]=1 \Rightarrow pH=0$ soluzione di massima acidità;

se $[H^+]=10^{-7} \Rightarrow pH=7$ soluzione neutra;

se $[H^+]=10^{-14} \Rightarrow pH=14$ soluzione di minima acidità (basica)

Esempio

Se la concentrazione di ioni di una soluzione è per esempio $[H^+]=10^{-8}$ avrà pH=8.

Logaritmi e livello sonoro

Ricordiamo che l'intensità I di un'onda sonora è definita come la quantità di energia che attraversa in 1 secondo una superficie di 1 m^2 disposta perpendicolarmente alla superficie di propagazione dell'onda e si misura quindi in W/m^2.

L'intensità minima percepita da un orecchio "normale" (alla frequenza di riferimento di 1000 Hz) è $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ (soglia di udibilità).

Si definisce livello sonoro, che indichiamo con l_s, misurato in decibel (dB):

$$l_s = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{(dB)}$$

Quindi se $I = I_0 \Rightarrow l_s = 0$ dB

se $I = 10 \cdot I_0 \Rightarrow l_s = 10$ dB

se $I = 100 \cdot I_0 \Rightarrow l_s = 20$ dB

ecc.

Esempio

L'intensità del suono (per la frequenza di riferimento di 1000 Hz) che provoca una sensazione di dolore al timpano è $I = 1W/m^2$ e il livello sonoro corrispondente risulta $10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 120$

Equazioni esponenziali

Equazioni esponenziali elementari

L'equazione esponenziale elementare è

$$\boxed{a^x = k}$$

con $k > 0$ altrimenti non ci sono soluzioni e per la definizione di logaritmo la soluzione dell'equazione è:

$$x = \log_a k$$

Esempio: $2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3$

Equazioni esponenziali riconducibili a quelle elementari

Esempi

1. $2^{x-1} = 3 \rightarrow \quad x - 1 = \log_2 3 \rightarrow x = 1 + \log_2 3$

2. $2^{x-1} = 2^{3x} \rightarrow x - 1 = 3x \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

3. $2^{x-1} = 3^x$

Se due numeri sono uguali allora sono uguali anche i loro logaritmi in una base qualsiasi: se scegliamo la base 10 abbiamo

$$\log_{10} 2^{x-1} = \log_{10} 3^x$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi relativa alla potenza ed abbiamo:

$$(x-1) \cdot \log_{10} 2 = x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2 = x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = \log_{10} 2$$

Infine ricaviamo la x

$$x = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2 - \log_{10} 3}$$

Nota: applicando la proprietà del quoziente possiamo scrivere la soluzione anche così: $x = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2}{3}}$

4. $3^{2x} - 12 \cdot 3^x - 13 = 0$

Poniamo $3^x = y \rightarrow y^2 - 12y - 13 = 0 \rightarrow y_1 = -1 \cup y_2 = 13$

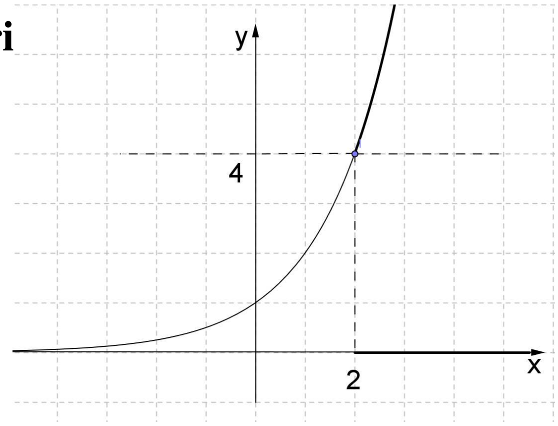
Quindi: $3^x = -1$ non ha nessuna soluzione ; $3^x = 13 \rightarrow x = \log_3 13$

Disequazioni esponenziali

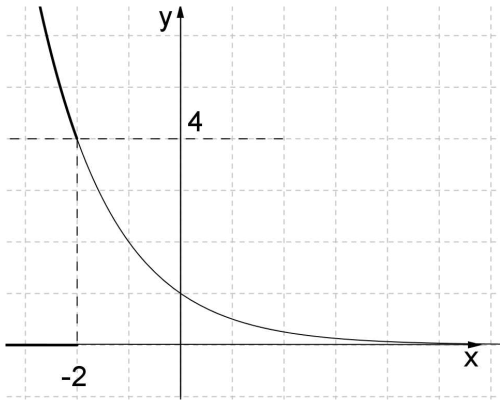
Disequazioni esponenziali elementari

Esempi

- $2^x > 4 \rightarrow x > \log_2 4$ cioè $x > 2$



- $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \rightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 4$ cioè $x < -2$



In generale se $k > 0$ abbiamo

- se $a > 1$ poiché a^x è una funzione crescente si mantiene il verso della diseguaglianza

$$\boxed{a^x > k \rightarrow x > \log_a k}$$

- se $0 < a < 1$ poiché a^x è in questo caso una funzione decrescente si inverte il verso della diseguaglianza

$$\boxed{a^x > k \rightarrow x < \log_a k}$$

Nota 1
Se $k < 0$ e dobbiamo risolvere $a^x > k$ la disequazione è verificata $\forall x \in \Re$ dal momento che a^x è sempre positivo e quindi è maggiore di un numero negativo.

Esempio: $2^x > -3 \rightarrow \forall x \in \Re$

Nota 2
Considerazioni analoghe valgono per la risoluzione della disequazione di $a^x < k$ con $k > 0$.
Se $k < 0$ non ci sarà nessuna soluzione di $a^x < k$ poiché a^x è sempre positivo.

Disequazioni esponenziali riconducibili a quelle elementari

Esempi

1. $2^{x-1} > 3 \rightarrow x-1 > \log_2 3 \rightarrow x > 1+\log_2 3$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 3 \rightarrow x-1 < \log_{\frac{1}{2}} 3 \rightarrow x < 1+\log_{\frac{1}{2}} 3$

3. $2^{x-1} > 2^{3x} \rightarrow x-1 > 3x \rightarrow 2x < -1 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \rightarrow x-1 < 3x \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$

5. $2^{x-1} > 3^x \rightarrow \log_{10} 2^{x-1} > \log_{10} 3^x \rightarrow (x-1)\cdot \log_{10} 2 > x\cdot \log_{10} 3 \rightarrow x\cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2 > x \cdot \log_{10} 3$

$$x\cdot(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) < -\log_{10} 2 \rightarrow x < -\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{3}{2}}$$

Poiché $\log_{10}\frac{3}{2} = -\log_{10}\frac{2}{3}$ possiamo scrivere la soluzione anche così: $x < \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2}{3}}$

6. $3^{2x} - 12\cdot 3^x - 13 > 0$

Possiamo risolvere questa disequazione ponendo $3^x = y$ e sostituendo otteniamo :

$$y^2 - 12y - 13 > 0 \Rightarrow y < -1 \cup y > 13$$

Quindi abbiamo $3^x < -1$ che non ha nessuna soluzione e $3^x > 13 \rightarrow x > \log_3 13$

7. $4^x - 3\cdot 2^x + 2 < 0 \rightarrow 2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2 < 0$

Poniamo $2^x = y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 < 0 \Rightarrow 1 < y < 2$ e quindi

$$1 < 2^x < 2 \Rightarrow 2^0 < 2^x < 2^1 \rightarrow 0 < x < 1$$

Equazioni logaritmiche

Equazioni logaritmiche elementari

Si dice equazione logaritmica ogni equazione in cui l'incognita x compare come argomento di un logaritmo. L'equazione logaritmica elementare è quindi:

$$\log_a x = k \quad (x > 0) \rightarrow x = a^k$$

Esempio: $\log_2 x = 3 \rightarrow x = 2^3$

Equazioni logaritmiche riconducibili a quelle elementari

Esempi

1. $\log_3(x-2) = 2 \rightarrow x - 2 = 3^2 \rightarrow x = 2 + 9 = 11$

2. $\log_2(2x-1) = \log_2(3x-5)$

In questo caso è importante determinare la condizione di accettabilità delle soluzioni ricordando che l'argomento di un logaritmo deve essere strettamente positivo. Quindi nel nostro caso avremo:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 3x-5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

Risolvendo l'equazione logaritmica abbiamo:

$$2x - 1 = 3x - 5 \rightarrow x = 4 \text{ accettabile}$$

Quindi la soluzione dell'equazione è $x = 4$.

3. $\log_2(x-1) = \log_2(2x+1)$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2$ che non è accettabile e quindi l'equazione non ha soluzioni.

4. $\log_2 x + 3 \cdot \log_4 x = 10$

In questo caso occorre operare un cambiamento di base per avere i logaritmi nella stessa base.
Per esempio possiamo portare tutto in base 2 e poiché

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

abbiamo : $\log_2 x + \frac{3}{2} \cdot \log_2 x = 10 \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \log_2 x = 10 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 2^4$

5. $\log(4x-5) + \log x = 2 \cdot \log(x+4)$

Se la base non viene indicata si intende che ci si riferisce sempre ad una stessa base e che non è importante conoscerla per risolvere l'equazione.

Impostiamo innanzitutto il sistema per avere le condizioni di accettabilità delle soluzioni:

$$\begin{cases} 4x-5>0 \\ x>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{5}{4} \\ x>0 \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow \quad x>\frac{5}{4}$$

Possiamo in questo caso applicare le proprietà dei logaritmi:

$$\log\left[(4x-5)\cdot x\right] = \log(x+4)^2$$

$$(4x-5)\cdot x = (x+4)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 = \frac{16}{3} \quad \text{accettabile}$$

$$x_2 = -1 \quad \text{non accettabile}$$

Quindi l'unica soluzione è $x = \frac{16}{3}$.

Disequazioni logaritmiche

Disequazioni logaritmiche elementari

La disequazione logaritmica elementare del tipo

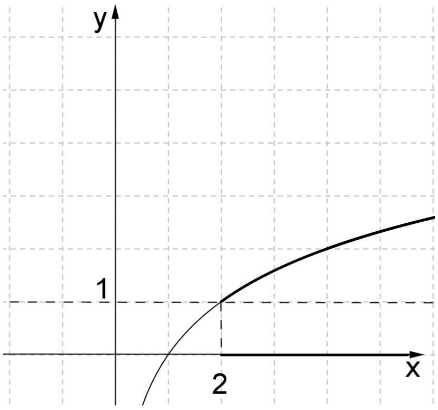
$$\boxed{\log_a x > k}$$

si risolve così:

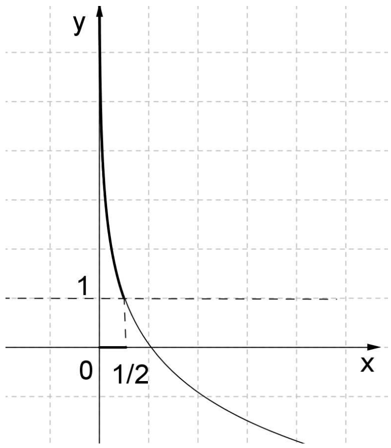
- se $a > 1 \Rightarrow x > a^k$ poiché essendo $\log_a x$ crescente si mantiene il verso della diseguaglianza
- se $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < x < a^k$ poiché essendo $\log_a x$ decrescente si inverte il verso della diseguaglianza e inoltre dobbiamo prendere solo valori positivi della x

Esempi

1) $\log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$



2) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$



Nota: se devo risolvere $\log_a x < k$ avrò:

- se $a > 1 \Rightarrow 0 < x < a^k$
- se $0 < a < 1 \Rightarrow x > a^k$

Esempi

1) $\log_2 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

2) $\log_{\frac{1}{2}} x < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

Disequazioni logaritmiche riconducibili a quelle elementari

Esempi

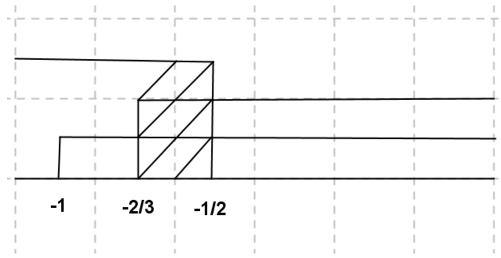
1. $\log_5(x-1) > 1 \rightarrow x-1 > 5 \rightarrow x > 6$

2. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) < 1 \rightarrow 2x-3 > \frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{7}{4}$

3. $\log_2(x+1) > \log_2(3x+2)$

In questo caso possiamo risolvere un unico sistema in cui mettiamo il dominio dei logaritmi e la risoluzione della disequazione (la base è maggiore di 1 e quindi si mantiene il verso della diseguaglianza) cioè:

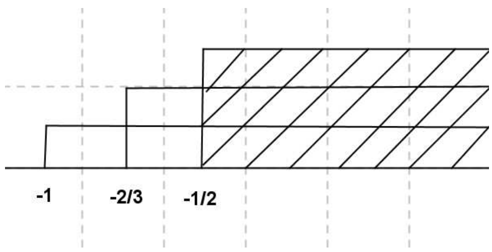
$$\begin{cases} x+1>0 \\ 3x+2>0 \\ x+1>3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-\frac{2}{3} \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$



La soluzione è: $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$

4. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 3x+2>0 \\ x+1<3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>--\frac{2}{3} \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$$



Nota: in questo caso la base è minore di 1 e quindi nella terza disequazione del sistema abbiamo invertito il verso della diseguaglianza.

La soluzione è : $x > -\frac{1}{2}$

ESERCIZI
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

I) Equazioni esponenziali

1) $4^x = 8$ $\quad [x = \frac{3}{2}]$

2) $9^x = 6 + 3^x$ $\quad [x = 1]$

3) $15 + 4^x = 2^{x+3}$ $\quad [x_1 = \log_2 3 \cup x_2 = \log_2 5]$

4) $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$ $\quad [x_1 = 3 \ \cup \ x_2 = -1]$

5) $4^x = \frac{1}{2}$ $\quad [x = -\frac{1}{2}]$

6) $3^x - 9^x = 0$ $\quad [x = 0]$

7) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ $\quad [x_1 = 1 \ \cup \ x_2 = \log_2 3]$

8) $3^{x-1} = 5^{x-2}$ $\quad [x = \dfrac{\log_{10} \frac{25}{3}}{\log_{10} \frac{5}{3}}]$

9) $\dfrac{5}{2^x + 1} + \dfrac{9}{2^x - 1} = \dfrac{15}{2^x + 1} + 1$ $\quad [x = 2]$

10) $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$ $\quad [x = \log_3 4]$

11) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ $\quad [x_1 = 1 \ \cup \ x_2 = 3]$

12) $3^{2-8x} = 9^{3x+1}$ $\quad [x = 0]$

II) Disequazioni esponenziali

16) $5^x > 25$ $[x > 2]$

17) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \geq 7^3$ $[x \leq -3]$

18) $\left(\frac{1}{10}\right)^x \leq 100$ $[x \geq -2]$

19) $(x-2) \cdot 3^x < 0$ $[x < 2]$

20) $1 \geq 7^{1+x}$ $[x \leq -1]$

21) $(2^x - 4) \cdot (3^{2x} - 3^x) \geq 0$ $[x \leq 0 \cup x \geq 2]$

22) $2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 1$ $[x < -1 \cup 0 \leq x \leq 1]$

23) $2^{x+1} \geq 5^{1-x}$ $[x \geq \log_{10} \frac{5}{2}]$

24) $25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0$ $[x \leq \log_5 3 \cup x \geq \log_5 10]$

25) $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0$ $[x < 1 \cup x > 2]$

26) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0$ $[x \geq 1]$

27) $2 \cdot 3^x - 9^x > 1$ [nessuna soluzione]

28) $4^x + 1 > 2^{x+1}$ $[x \neq 0]$

29) $4^x - 2^x > 0$ $[x > 0]$

III) Equazioni logaritmiche

30) $\log_4 x = 2$ $[x = 4^2]$

31) $\log_3 (2x + 4) = 2$ $[x = \frac{5}{2}]$

32) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) = -1$ $[x = 3]$

33) $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = \log_2 (9 - 2x)$ $[x = 3]$

34) $\log(x + 8) = 2 \cdot \log 3 - \log x$ $[x = 1]$

35) $4 \cdot \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 5 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$ $[x_1 = \frac{1}{2} \cup x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}]$

36) $3 \cdot \log_2 (x + 2) - 3 \cdot \log_2 (2x - 1) + \log_2 4 - \log_3 9 = 0$ $[x = 3]$

37) $\log_2 (x^2 - 5x) - \log_2 (1 - x) = 1$ $[x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}]$

38) $\log_a (3x - 5) + \log_a (x - 2) = \log_a 2$ $[x = \frac{8}{3}]$

39) $2 \cdot \log(x - 1) + \log(x - 2) = \log(x^2 - 3x + 2)$ [nessuna soluzione]

40) $2 \cdot \log x + \log(x^2 + 1) = \log(3 - x^2)$ $[x = 1]$

41) $\log x + \log(x + 1) = \log(1 - x)$ $[x = \sqrt{2} - 1]$

42) $3 \cdot \log_2^2 x + 5 \cdot \log_2 x - 2 = 0$ $[x_1 = \sqrt[3]{2} \cup x_2 = \frac{1}{4}]$

43) $\log_2 (x - 1) = \log_2 (3x + 5)$ [nessuna soluzione]

44) $\log_2^2 (x - 1) - 5 \cdot \log_2 (x - 1) + 6 = 0$ $[x_1 = 5 \cup x_2 = 9]$

IV) Disequazioni logaritmiche

45) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<1$ $\quad [x>\frac{7}{3}]$

46) $\log_2(2x+5)>0$ $\quad [x>-2]$

47) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)>1$ $\quad [\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}]$

48) $\log_3 x<0$ $\quad [0<x<1]$

49) $\log_3{}^2 x-\log_3 x<0$ $\quad [1<x<3]$

50) $\log_3 x+\log_3(x-8)\geq 2$ $\quad [x\geq 9]$

51) $\log_3{}^2 x+2\cdot\log_3 x-3<0$ $\quad [\frac{1}{27}<x<3]$

52) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)>\log_{\frac{1}{2}}(20-3x)$ $\quad [3<x<\frac{23}{4}]$

53) $\log_{\frac{1}{3}}(6x-x^2)+2<0$ $\quad$ [nessuna soluzione]

54) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4)+\log_3(x-3)\leq\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ $\quad [x>3]$

55) $\log_{\frac{3}{4}}(1-x^2)\leq 0$ $\quad [x=0]$

56) $\log_2(1-x^2)-1<0$ $\quad [-1<x<1]$

57) $\log_5{}^2 x+\log_5 x-2>0$ $\quad [0<x<\frac{1}{25}\cup x>5]$

58) $\log_{2} x+\log_2(1+x)<\log_2(1-x)$ $\quad [0<x<\sqrt{2}-1]$

59) $\log_2{}^2(1-x)-\log_2(1-x)>0$ $\quad [x<-1\cup 0<x<1]$

60) $\dfrac{\log_2{}^2 x-\log_2 x}{\log_3 x}<0$ $\quad [0<x<2 \text{ con } x\neq 1]$

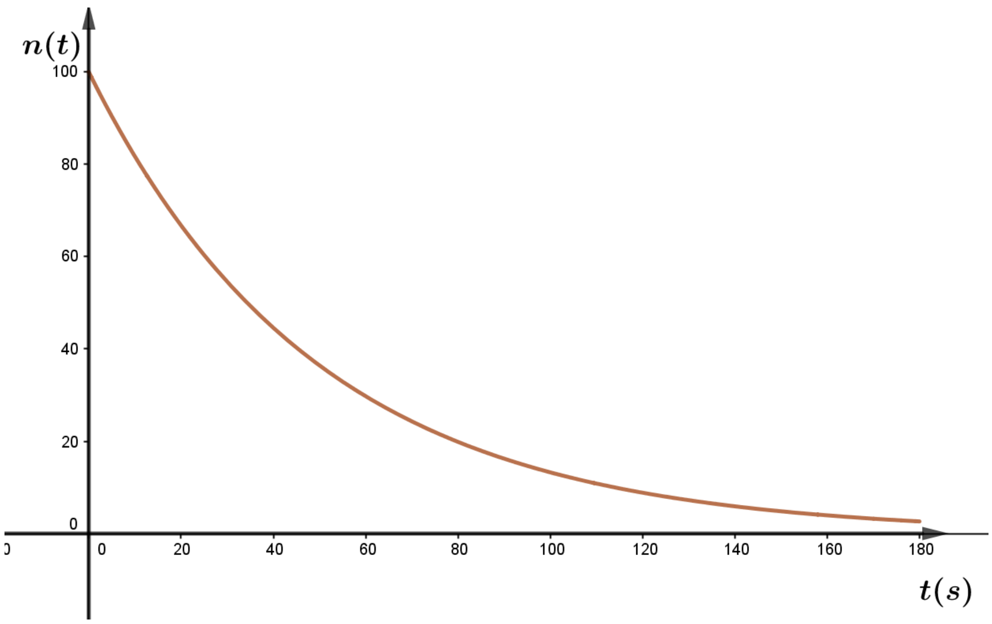
PROBLEMI
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1) Supponiamo che nella sterilizzazione del latte alla temperatura costante di 120°C il numero n(t) delle spore del microrganismo Bacillus Stearothermophilus sia regolato dalla legge

$$n(t) = 100 \cdot 0{,}98^t$$

dove t è la durata in secondi del processo di sterilizzazione.
Rappresenta l'andamento di *n(t)* e determina il tempo di dimezzamento del numero delle spore cioè dopo quanti secondi il loro numero è dimezzato rispetto a quello iniziale.

Svolgimento
Per rappresentare l'andamento di $n(t)$ possiamo utilizzare Geogebra: basterà digitare nella barra di inserimento $y = 100 \cdot (0.98)^x$ e poi indicare sull'asse *x* il tempo *t* e sull'asse *y* *n(t)*.



Si tratta di una funzione esponenziale con base minore di 1 e quindi decrescente e che al tempo $t = 0$ vale 100 cioè all'istante iniziale ci sono 100 spore.

Per determinare il tempo di dimezzamento dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale:

$$100 \cdot (0{,}98)^t = 50 \rightarrow (0{,}98)^t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \log_{0,98} \frac{1}{2}$$

Utilizzando infine la formula del cambiamento di base e calcolando i logaritmi con la calcolatrice avremo: $\log_{0,98} \frac{1}{2} = \frac{\log_{10} \frac{1}{2}}{\log_{10} 0{,}98} \cong 34{,}2$ e quindi in conclusione il tempo di dimezzamento è circa 34,2 s.

2) Un biologo ha scoperto che il numero N(t) di un dato tipo di batteri presenti al tempo t (misurato in ore) in una coltura raddoppia ogni ora. Sapendo che all'inizio (t=0) il numero dei batteri era 50 scrivi l'espressione di N(t). Dopo quanto tempo (in ore) il numero di batteri è maggiore di 1 milione?

[$N(t) = 50 \cdot 2^t$;15 h]

3) Se sappiamo che il nostro capitale iniziale raddoppierà in 10 anni, qual è il tasso di interesse composto applicato dalla nostra banca?

[7%]

4) Dopo la fecondazione, per scissione della cellula madre nel processo chiamato mitosi, si hanno due cellule figlie ogni 30 ore.
a) Quante cellule si hanno dopo 5 giorni dalla fecondazione?
b) quanti giorni devono passare dalla fecondazione per avere circa 2^{20} (circa un milione) cellule?

[16 ; 25 giorni]

5) a)Una banca applica un tasso di interesse composto del 4% con capitalizzazione ad 1 anno (ogni anno l'interesse viene aggiunto al capitale). Scrivi quanto risulta il capitale, partendo da un capitale iniziale $C_0 = 100$ (euro), dopo 5 anni.
b) Un'altra banca applica lo stesso tasso composto del 4% ma con capitalizzazione a 6 mesi cioè ogni 6 mesi l'interesse si somma al capitale. In questo caso, sempre partendo da 100 euro, quanto risulta il capitale dopo 5 anni?

[circa € 122; circa € 148]

6) Abbiamo bisogno di un prestito e confrontiamo le proposte di due banche: la prima ci propone un tasso composto del 4% con durata di 15 anni (cioè dovremo restituire quanto abbiamo avuto in prestito con l'interesse maturato in 15 anni), la seconda un tasso del 3% con durata 20 anni. Qual è la proposta migliore?Quanto dobbiamo restituire alla prima banca? E alla seconda? (Indica con C_0 il valore iniziale del prestito)

[la prima; $1{,}801 \cdot C_0$; $1{,}806 \cdot C_0$]

7) Il numero di batteri in una certa coltura raddoppia in 20' (20 minuti). Sapendo che il numero iniziale è $N_0 = 500$ scrivi come risulta il numero $N(t)$ di batteri presenti dopo *t* minuti . Dopo quanto tempo i batteri sono 1 milione?

[$N(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$; 220']

SCHEDA DI VERIFICA
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1) $9^{x+1} - 3^{3x-1} = 0$ $[x = 3]$

2) $2^{x-1} = 3^{1+x}$ $\left[x = \dfrac{\log_{10} 6}{\log_{10} \frac{2}{3}}\right]$

3) $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$ $[x = \log_5 2 \cup x = \log_5 3]$

4) $(2^x - 4)\cdot\left(\left(\dfrac{1}{9}\right)^x - 1\right) > 0$ $[0 < x < 2]$

5) $2\cdot 5^x - 25^x + 8 > 0$ $[x < \log_5 4]$

6) $\log_5(x+2) - \log_5(x-1) = \log_5 x$ $[x = 1 + \sqrt{3}]$

7) $\log_2{}^2(5x-4) - \log_2(5x-4) = 0$ $\left[x_1 = 1 \cup x_2 = \dfrac{6}{5}\right]$

8) $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) + \log_2(2x-1) = 2$ [nessuna soluzione]

9) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}} 3x > 0$ $\left[x > \dfrac{1}{2}\right]$

10) $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) - \log_{\frac{1}{3}}{}^2(x-4) < 0$ $\left[4 < x < \dfrac{13}{3} \cup x > 5\right]$

SCHEDA DI VERIFICA
ESPONENZIALI E LOGARITMI

1) $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ [$x = 0, \quad x = 2$]

2) $3^{x-2} = 5^{x-1}$ [$x = \dfrac{\log_{10} \frac{5}{9}}{\log_{10} \frac{5}{3}}$]

3) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 > 0$ [$x > 1$]

4) $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$ [$x = 1$]

5) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) > 1$ [$x > 2$]

6) $\log_3^2(x+2) - \log_3(x+2) = 0$ [$x_1 = -1, \quad x_2 = 1$]

7) Una sostanza radioattiva si dimezza ogni ora. Supponendo che inizialmente si abbiano 100 g della sostanza , determina l'espressione della massa quantità *m(t)* in grammi di sostanza radioattiva al tempo t misurando t in ore. Dopo quanto tempo la quantità di sostanza radioattiva è ridotta a meno di 1 grammo?

[$m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$; 7 h]

8) In quanti anni raddoppia un capitale iniziale C_0 se la banca applica un interesse composto del 2%?

[35 anni]

9) Se una soluzione ha la concentrazione molare di ioni H^+ $[H^+] = 10^{-9}$, qual è il suo pH?

$[pH = 9]$

10) Qual è l' intensità sonora di un suono di livello sonoro 100 dB?

[$I = 10^{-2} W/m^2$]