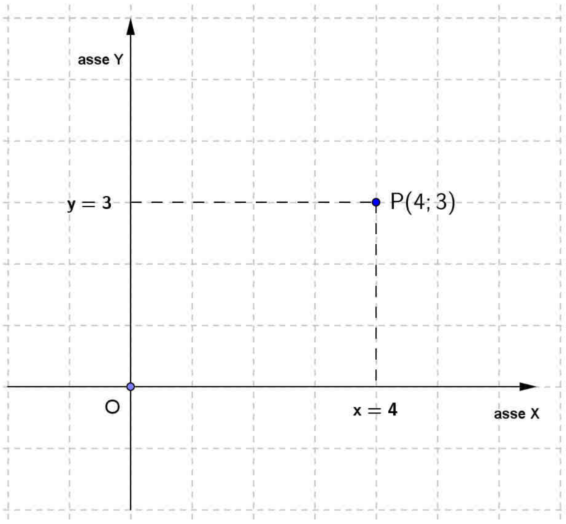
Il piano cartesiano

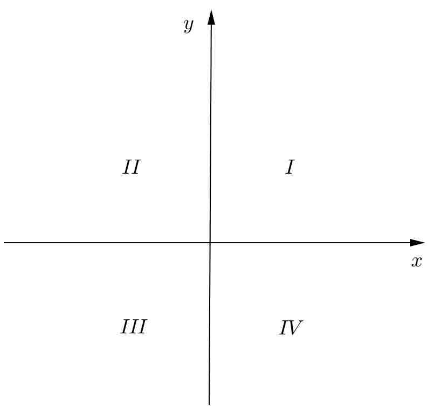
Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.
In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** *(x;y)* di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata *(x;y)* di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).
Il numero ***x*** si chiama ***ascissa*** del punto P e il numero ***y*** si chiama ***ordinata*** del punto P.
x e *y* si dicono anche **coordinate** del punto P.



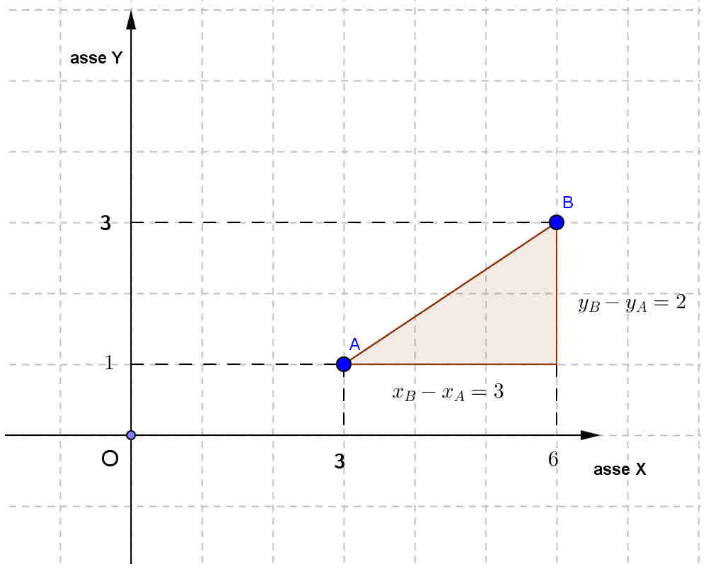
Nota
E' importante sottolineare che $(x; y)$ è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.

Osservazione
I punti sull'asse x hanno ordinata y=0; i punti sull'asse y hanno ascissa x=0.
Inoltre osserviamo che i punti che si trovano nel cosiddetto I° quadrante (vedi figura) hanno ascissa e ordinata positive, quelli del II° quadrante ascissa negativa e ordinata positiva ecc.



Distanza tra due punti

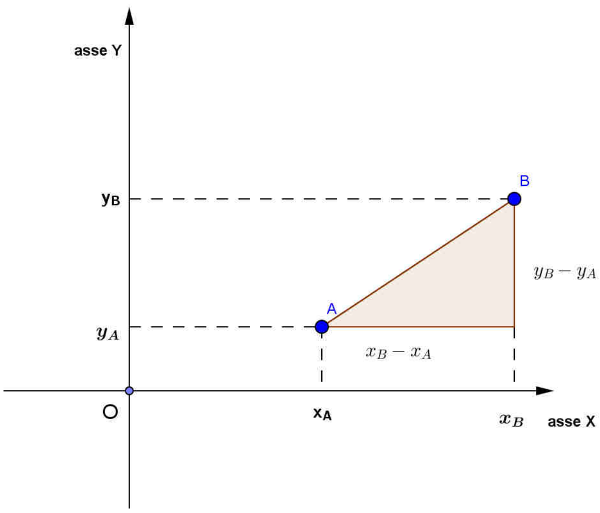
Come possiamo calcolare la lunghezza del segmento che congiunge due punti assegnati?
Consideriamo per esempio $A(3;1)$, $B(6;3)$. Come possiamo determinare $\overline{AB}$?



Consideriamo il triangolo in figura ed applichiamo il teorema di Pitagora:

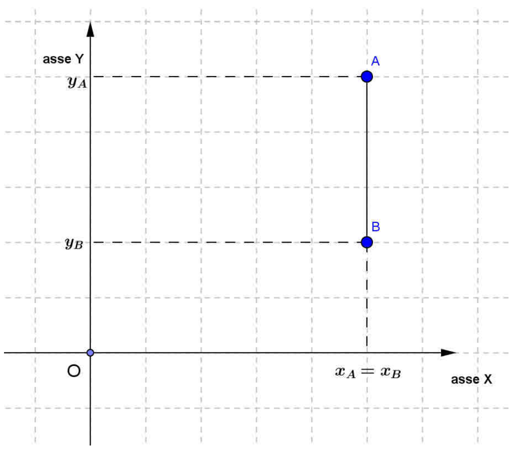
$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

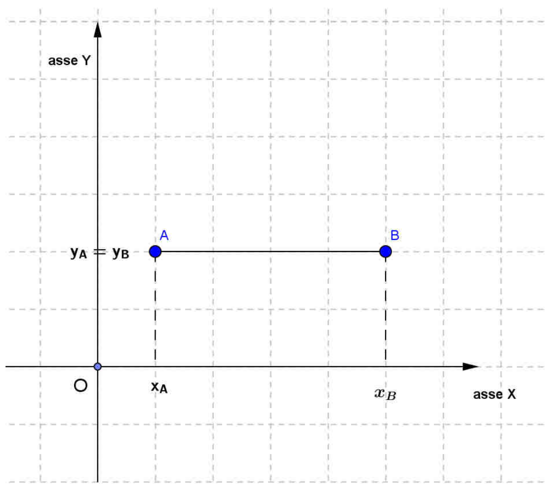
In generale se $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ abbiamo che



$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Osservazione: se i punti A e B hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata possiamo calcolare la loro distanza semplicemente facendo la differenza tra le ordinate, nel primo caso, o delle ascisse, nel secondo caso.



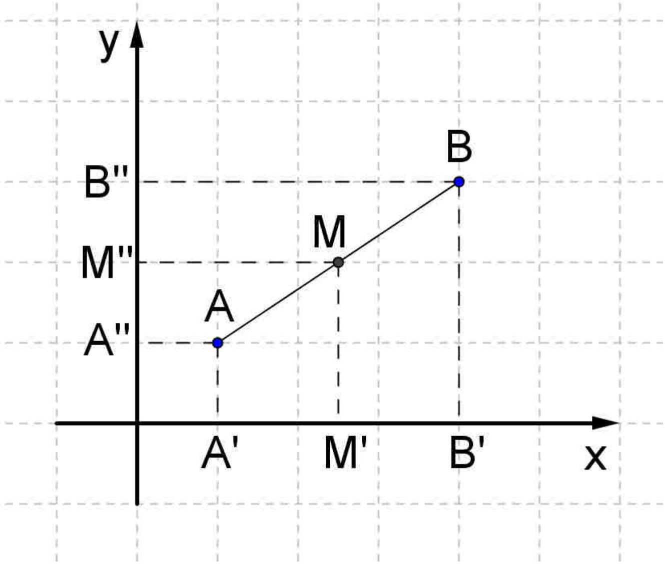


Punto medio di un segmento

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB possiamo considerare le proiezioni di A, M e B sull'asse x e poi sull'asse y e, sfruttando un teorema dimostrato sulle rette parallele, affermare che $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$, $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$ e quindi:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

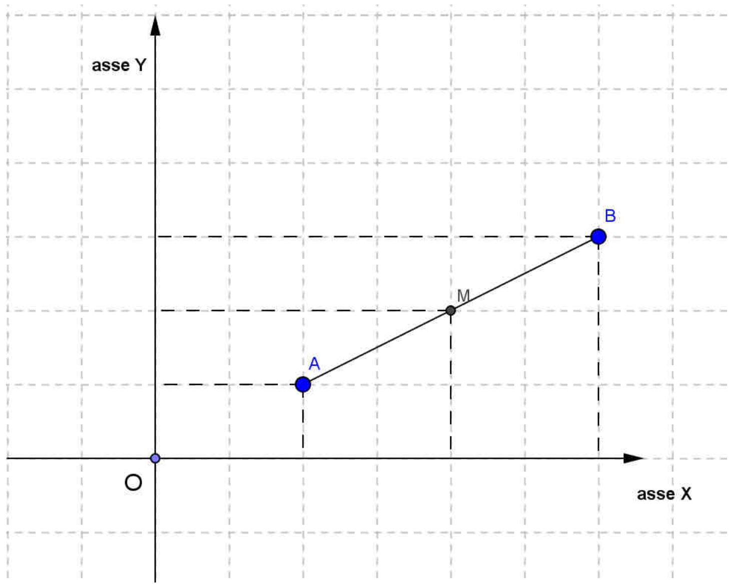
$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Esempio

Consideriamo per esempio $A(2;1)$, $B(6;3)$.

Il punto medio del segmento AB risulta essere $M\left(\frac{2+6}{2} = 4; \frac{1+3}{2} = 2\right)$.



ESERCIZI
PIANO CARTESIANO

1) Dati i punti $A(1;2)$, $B(7;2)$, $C(4;6)$, disegna il triangolo ABC e determinane perimetro e area.

[$2p = 16$; $A = 12$]

2) Dati i punti $A(2;1)$, $B(6;4)$, $C(3;8)$, disegna il triangolo ABC e verifica che $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ e che quindi (essendo verificato il teorema di Pitagora) si tratta di un triangolo rettangolo. Determina perimetro e area.

[$2p = 10 + \sqrt{50}$, $A = \dfrac{25}{2}$]

3) Dati i punti $A(2;2)$, $B(4;3)$, $C(2;6)$, disegna il triangolo ABC e detto M il punto medio di AC, determina la lunghezza della mediana MB.

[$\overline{BM} = \sqrt{5}$]

4) Dati i punti $A(2;3)$, $B(7;3)$, $C(3;5)$, disegna il triangolo ABC e detto M il punto medio di AB, verifica che $\overline{CM} = \overline{AM} = \overline{MB} = \dfrac{5}{2}$. Come risulta il triangolo ABC?

[triangolo rettangolo]

5) Dati i punti $O(0;0)$; $A(4;2)$; $B(4;5)$; $C(0;3)$, disegna il quadrilatero OABC e verifica che si tratta di un parallelogramma. Determina le coordinate del punto di incontro delle sue diagonali.

[$\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$]

6) Dati i punti $A(1;-2)$; $B(4;2)$; $C(1;6)$; $D(-2;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un rombo. Determina perimetro e area. Determina le coordinate del punto M in cui si intersecano le sue diagonali.

[$2p = 20$; $A = 24$; $M(1;2)$]

7) Dati i punti $A(1;-1)$; $B(4;0)$; $C(3;3)$; $D(0;2)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un quadrato. Determina perimetro, area e le coordinate del punto M di intersezione delle sue diagonali.

[$2p = 4\sqrt{10}$; $A = 10$; $M(2;1)$]

8) Dati i punti $A(1;2)$; $B(4;1)$; $C(4;6)$; $D(1;5)$, disegna il quadrilatero ABCD e verifica che si tratta di un trapezio isoscele. Determina perimetro e area.

[$2p = 8 + 2\sqrt{10}$; $A = 12$]

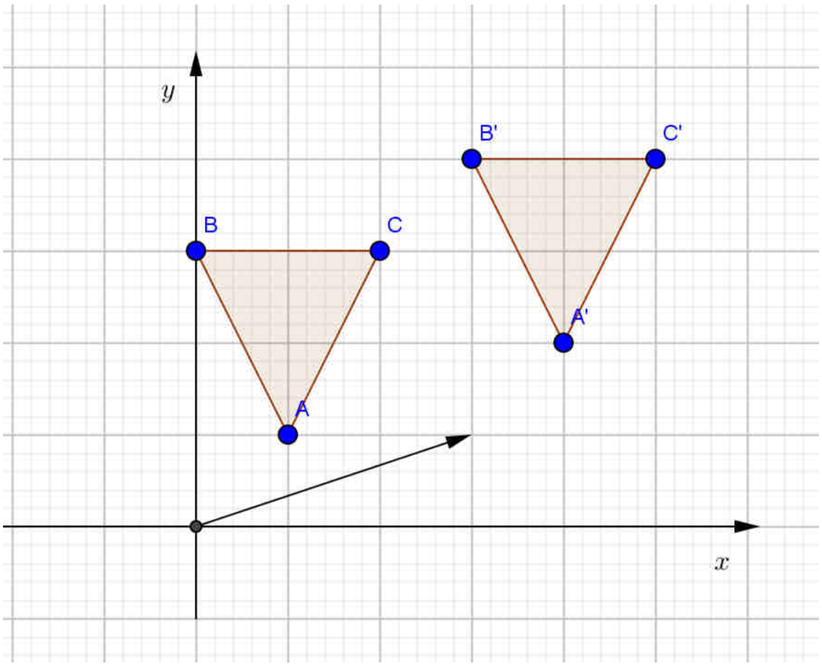
Isometrie nel piano cartesiano

Le isometrie del piano sono traslazioni, rotazioni intorno ad un punto di un dato angolo,simmetrie rispetto ad una retta e le loro "composizioni": se trasformiamo una figura del piano con un'isometria **la figura trasformata è congruente alla figura iniziale** ed infatti il termine isometria deriva dal greco e significa *iso* = stessa *metria* = misura.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e studiamo alcune isometrie utilizzando il software "Geogebra".

Traslazione

Visualizza gli assi del sistema di riferimento cartesiano.
Disegna un triangolo ABC (con il comando poligono), poi costruisci un vettore, per esempio $v=(3;1)$ con il comando "**vettore**" selezionando con il mouse l'origine e poi il punto in (3,1) e **attiva il pulsante *"traslazione"*** : seleziona il triangolo che vuoi traslare e poi il vettore che hai costruito.
Visualizza la "vista algebra" e osserva come cambiano le coordinate dei vertici del triangolo.



Osserva che se indichi con $P(x,y)$ un generico punto del piano, questa traslazione sposta P in $P'(x+3,y+1)$:

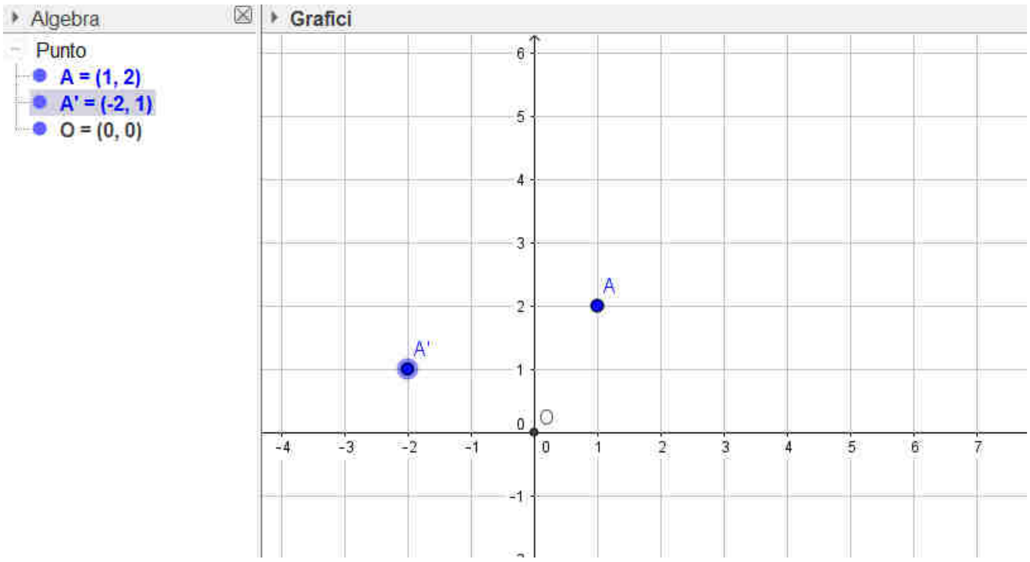
$$P(x;y)\xrightarrow{t_{(3;1)}}P'(x+3;y+1)$$

Nota: se consideriamo un vettore (a,b), la traslazione $t_{(a,b)}$ avremo:

$$P(x;y)\xrightarrow{t_{(a;b)}}P'(x+a;y+b)$$

Rotazione di 90° intorno all'origine

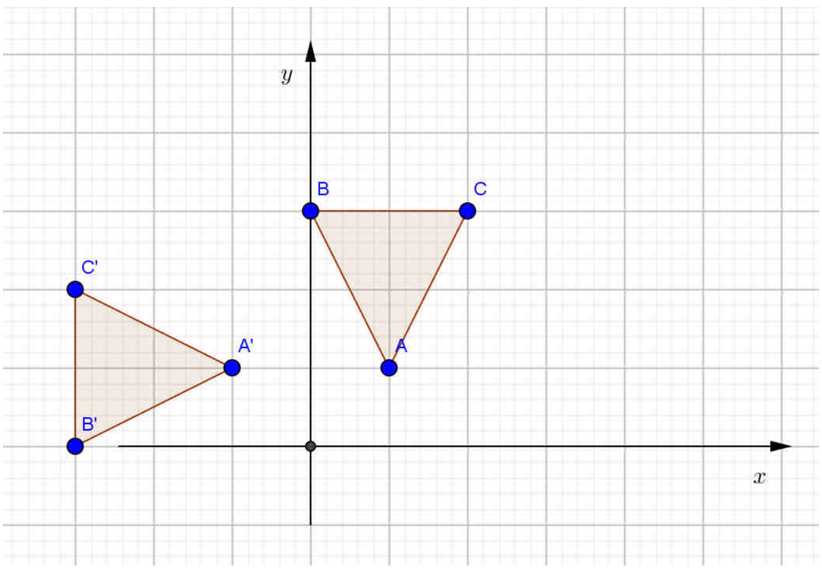
Visualizza il sistema di riferimento e crea il punto O(0,0) nell'origine del sistema di riferimento: consideriamo le rotazioni intorno a O.
Disegna un punto A **e attiviamo il pulsante "rotazione"** : seleziona prima l'oggetto da ruotare , nel nostro caso il punto, poi il centro di rotazione O e poi digita la misura dell'angolo di rotazione (90°).



Osserva nella "vista algebra" come cambiano le coordinate del punto A.
Se indichiamo con $R_{O,90°}$ la rotazione di 90° intorno all'origine possiamo scrivere

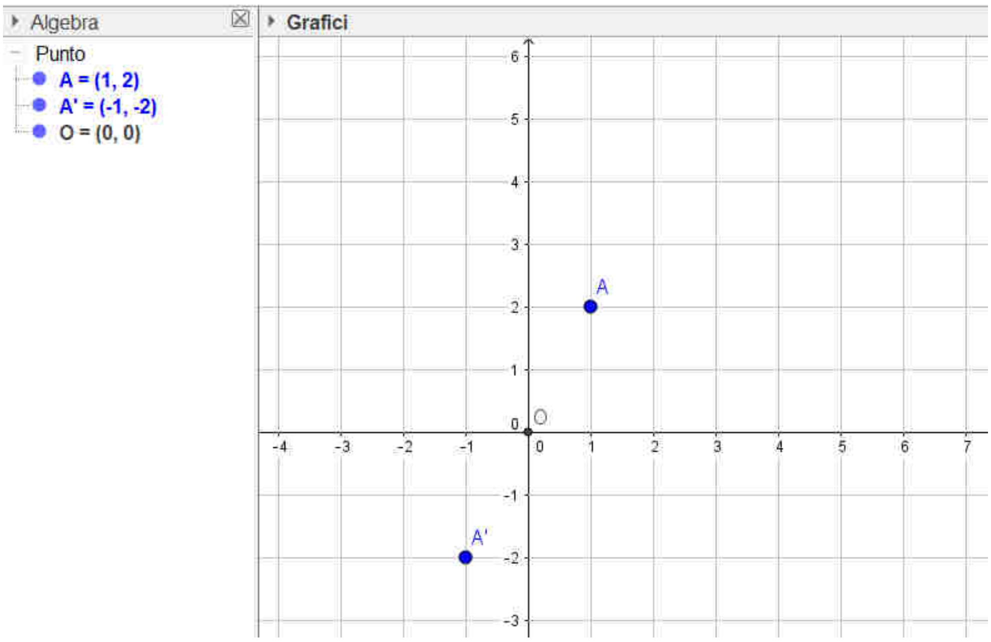
$$P(x;y) \xrightarrow{R_{O,90°}} P'(-y;x)$$

Puoi anche disegnare una figura, per esempio un triangolo ABC con il comando poligono, e ruotarla di 90° intorno a O:



Rotazione di 180° intorno all'origine (simmetria di centro O)

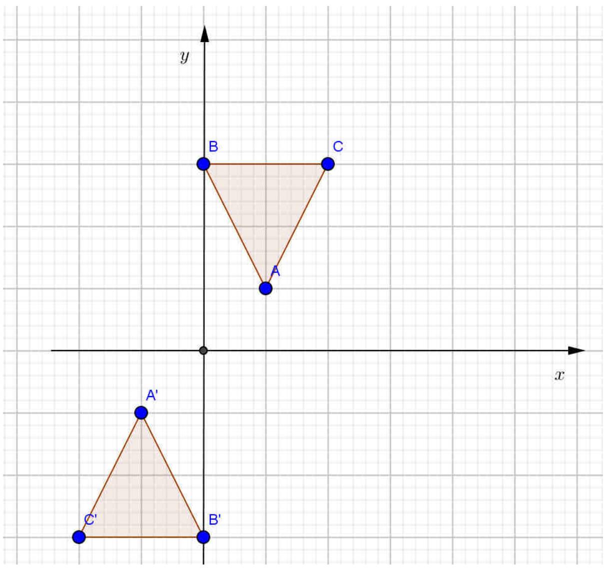
Prova a ruotare di 180° intorno ad O (origine del sistema di riferimento) un punto A e osserva come cambiano le sue coordinate.



Se indichiamo con $R_{O,180°}$ la rotazione di 180° intorno all'origine possiamo dire che

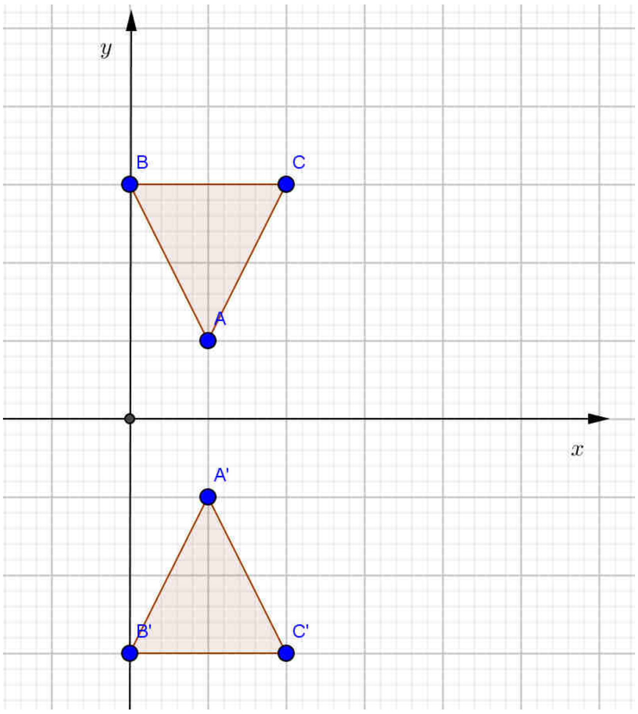
$$P(x;\, y) \xrightarrow{R_{O,180°}} P'(-x;-y)$$

Puoi ruotare una figura, per esempio il triangolo ABC costruito con il comando poligono, di 180° intorno all'origine:



Simmetria rispetto ad una retta (simmetria assiale)

Simmetria rispetto all'asse x

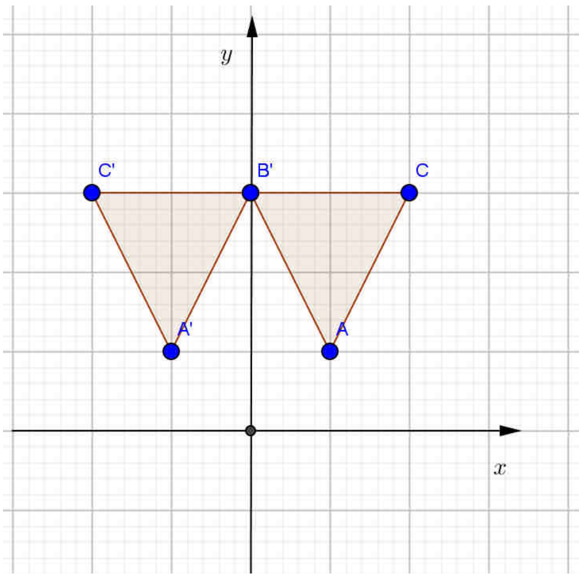


Osserva come cambiano le coordinate dei punti se li trasformi con una simmetria assiale rispetto all'asse x : attivato il **comando "simmetria assiale"** seleziona l'oggetto da trasformare (per esempio un poligono) e poi l'asse di simmetria.
Se osservi le coordinate del punto iniziale e del punto simmetrico noti che

$$P(x;\,y)\xrightarrow{S_{assex}}P'(x;-y)$$

Simmetria rispetto all'asse y

E se facciamo la simmetria è rispetto all'asse y? Come cambiano le coordinate dei punti ?

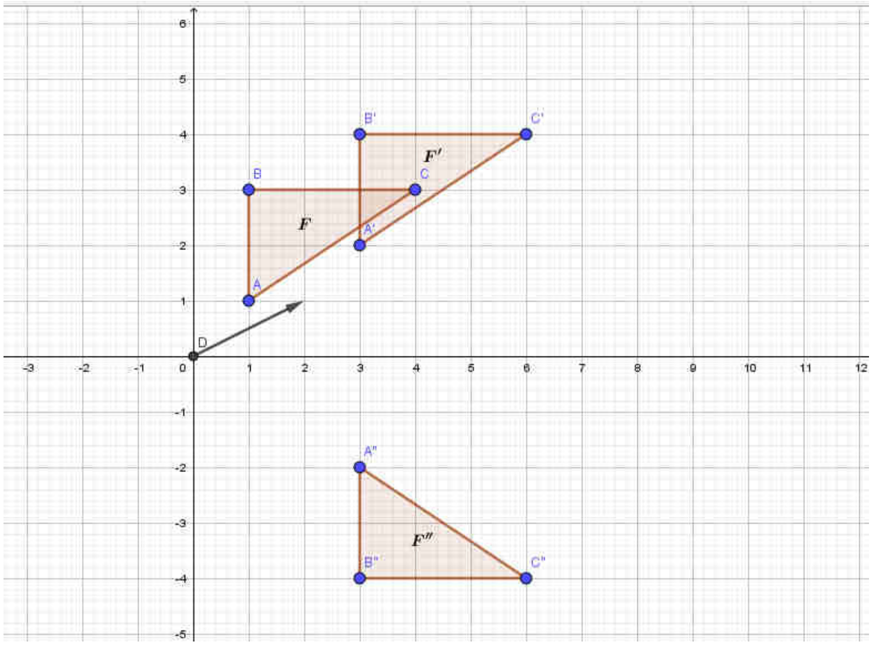


Si osserva che

$$P(x;\,y)\xrightarrow{S_{assey}}P'(-x;\,y)$$

Composizione di isometrie

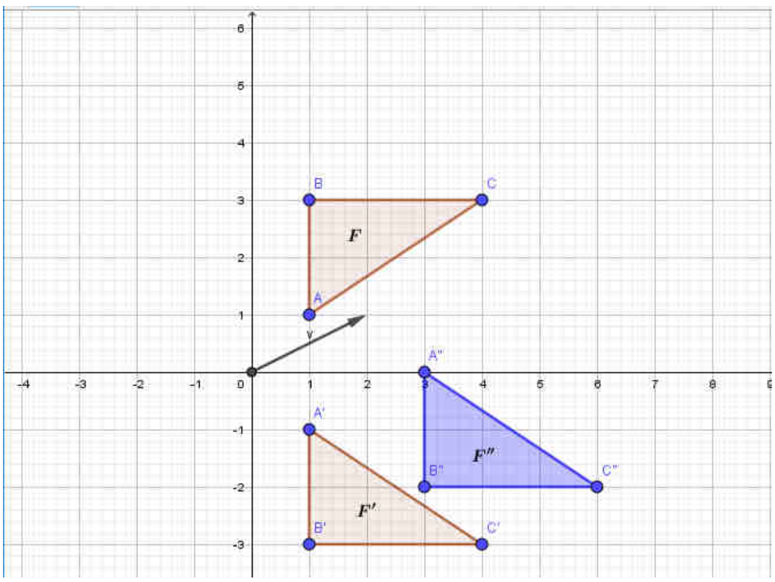
Le isometrie possono anche essere “composte” tra loro cioè **applicate in successione**: se ad una figura F, per esempio al triangolo ABC in figura, applichiamo la traslazione $t_{(2;1)}$ e poi alla figura F’ che abbiamo ottenuto applichiamo la simmetria di asse x otterremo la figura F’’.



Nota

E’ importante l’ordine in cui si eseguono le trasformazioni perché invertendolo il risultato finale generalmente cambia.

Se nel nostro esempio avessimo prima effettuato la simmetria e poi la traslazione non avremmo ottenuto la stessa figura finale (vedi disegno).



PROBLEMI
ISOMETRIE

1) Considera il triangolo di vertici $A(3;1)$; $B(4;1)$; $C(4;3)$. Applica al triangolo le seguenti isometrie e disegna ogni volta ABC e il triangolo trasformato A'B'C' indicando le coordinate di A', B', C':

a) la traslazione di vettore $\vec{v}(2;1)$;
b) la rotazione $R(O;90°)$;
c) la rotazione $R(O;180°)$;
d) la simmetria rispetto all'asse x;
e) la simmetria rispetto all'asse y;

2) Considera il parallelogramma ABCD con $A(4;1)$; $B(6;1)$; $C(8;4)$; $D(6;4)$. Applica al parallelogramma le seguenti isometrie disegnando ogni volta il parallelogramma ABCD e il suo trasformato A'B'C'D':

a) la traslazione di vettore $\vec{v}(-3;1)$;
b) la rotazione $R(O;90°)$;
c) la rotazione $R(O;180°)$;
d) la simmetria rispetto all'asse x;
e) la simmetria rispetto all'asse y;

3) Considera il triangolo ABC di vertici $A(2;1)$; $B(6;1)$; $C(4;7)$. Applica al triangolo la traslazione $t_{(2;3)}$ e ,al triangolo traslato A'B'C', applica la simmetria rispetto all'asse x. Disegna il triangolo finale A''B''C'' e scrivi le coordinate dei suoi vertici.

$$[A''(4,-4),\quad B''(8,-4),\quad C''(6,-10)]$$

4) Considera il rombo di vertici $A(1,2)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$, $D(2,5)$: applica al rombo prima tra la simmetria rispetto all'asse y e alla figura ottenuta la traslazione di vettore $(-2,-1)$. Disegna la figura finale A''B''C''D''.

Si sarebbe ottenuta lo stessa figura finale invertendo l'ordine delle isometrie cioè applicando prima la traslazione e poi la simmetria?

$$[A''(-3,1),\quad B''(-4,-2),\quad C''(-5,1),\quad D''(-4,4)]$$

5) Considera il triangolo ABC con $A(1;1)$; $B(4;2)$; $C(3;5)$:applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x;y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse y seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (-x;-y)$]

b) la rotazione $R(O;90°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (-y;-x)$]

c) la rotazione $R(O;90°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

[$(x;y) \to (y;x)$]

d) la traslazione di vettore $(-2;0)$ seguita dalla traslazione di vettore $(0;3)$

[$(x;y) \to (x-2;y+3)$]

e) la traslazione di vettore $(2;1)$ seguita dalla traslazione di vettore $(-2;-1)$

[$(x;y) \to (x;y)$]

f) la traslazione di vettore $(2;1)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (x+2;-y-1)$]

6) Considera il trapezio ABCD con $A(1;1)$; $B(4;1)$; $C(2;3)$; $D(1;3)$: applicagli le seguenti isometrie e scrivi anche come si trasformano in generale le coordinate di un punto $P(x;y)$.

a) la simmetria rispetto all'asse x e poi la simmetria rispetto alla bisettrice del I-III quadrante

[$(x;y) \to (-y;x)$]

b) la $R(O;180°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

[$(x;y) \to (x;-y)$]

c)) la $R(O;180°)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse x

[$(x;y) \to (-x;y)$]

d) la traslazione di vettore $(0,3)$ seguita dalla simmetria rispetto all'asse y

[$(x;y) \to (-x;y+3)$]