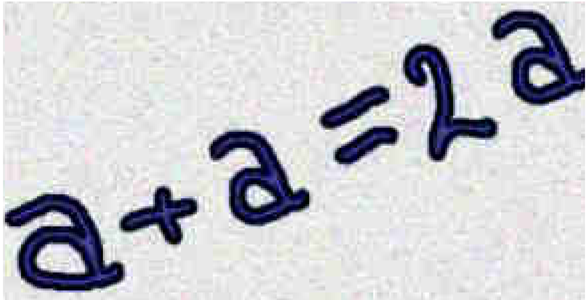
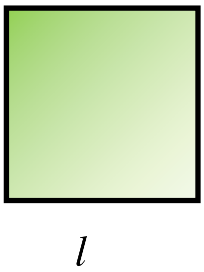
Il calcolo letterale



Finora abbiamo studiato gli insiemi numerici N, Z, Q, $\Re$ ed operato con numeri (espressioni numeriche).
In matematica però è molto importante saper operare con le lettere e sviluppare le regole di quello che viene chiamato calcolo letterale.

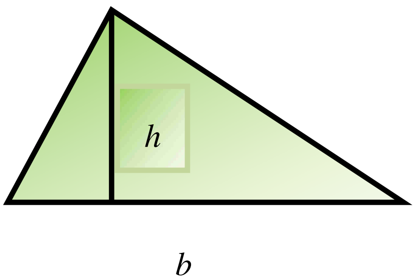
Abbiamo già trovato, nello studio della geometria, delle espressioni "letterali" : per esempio se vogliamo esprimere l'area del quadrato di lato l scriviamo A= l^2 .



$A = l^2$

Questa scrittura è generale proprio perché fa uso di una lettera e non di un numero in particolare: se poi vogliamo determinare l'area di uno specifico quadrato, per esempio di lato $l = 5$, sostituiremo il valore 5 al posto di l e otterremo l'area A = 25.

Anche l'area di un triangolo, di base b e altezza h viene indicata con



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Anche questa è un'espressione "letterale".

Per imparare a fare operazioni con le espressioni letterali occorre partire da quelle più semplici.

Monomi

Le espressioni letterali più semplici si chiamano "**monomi**" (dal greco *monos* che significa unico) e sono costituite da lettere che vengono solo moltiplicate tra loro ed eventualmente per un coefficiente numerico.

Esempio
Le espressioni letterali

$$2a^3b \ ; \ \frac{1}{3}a\ b^4c^2 \ ; \ -\frac{2}{5}a^2b^3$$

sono esempi di monomi.

Esempio
Le espressioni letterali

$$a^2-b \text{ oppure } a^{-2}b$$

non sono monomi.

Osservazione
Lo stesso monomio può essere scritto in forme diverse.
Per esempio è chiaro che

$2a^3b$ può anche essere scritto $2\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b$.

ma la prima scrittura si legge molto meglio !

Forma "normale" di un monomio
Diciamo che un monomio è ridotto a "**forma normale**" quando è scritto come prodotto fra un numero (chiamato **coefficiente** del monomio) e una o più lettere (diverse tra loro) con eventuali esponenti (si chiama **parte letterale** del monomio)

$$\underset{\text{coefficiente}}{2}\ \underbrace{a^3b}_{\text{parte letterale}}$$

Esempio : la forma normale di $3\ a\ b^2\cdot(-2)\cdot a^2\cdot b$ risulta $-6a^3b^3$

Grado di un monomio
Si chiama "grado" del monomio la somma di tutti gli esponenti delle lettere: per esempio

$$2\ a^3b$$

ha grado $3+1=4$ (è di grado 3 rispetto alla lettera a e di grado 1 rispetto alla lettera b).

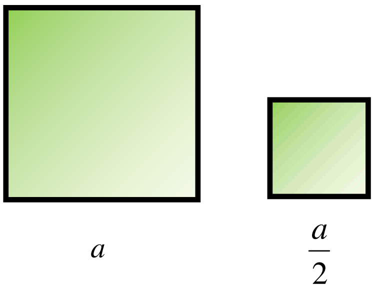
Poiché anche un numero può essere considerato un monomio, diremo che ha grado 0 perché possiamo sempre pensare che gli sia associata una parte letterale di grado 0 (che corrisponde a 1).

Esempio: 2 potrebbe essere considerato come $2\cdot a^0$.

Operazioni con i monomi

Addizione e sottrazione di monomi

Supponiamo di dover sommare le aree in figura :



$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\left(1+\frac{1}{4}\right)a^2=\frac{5}{4}a^2.$$

Quindi **se i monomi hanno la stessa parte letterale** (si dicono "**simili**") **per sommarli si sommano i loro coefficienti e si considera come parte letterale la parte letterale dei due monomi.**

E se i monomi non sono simili?

Come faccio per esempio se devo sommare

$$2a^3b+3a^2\ ?$$

Quando i monomi non sono simili non posso fare niente: la scrittura va lasciata così e sarà chiamata "**polinomio**" (dal greco polỳs che significa "molto" nel senso di molti termini).

Esempi

1) $\frac{1}{2}ab-3ab+ab=\left(\frac{1}{2}-3+1\right)ab=\left(\frac{1-6+2}{2}\right)ab=-\frac{3}{2}ab$.

2) $2a^2b-\frac{1}{3}a^2b+a^2b=\left(2-\frac{1}{3}+1\right)a^2b=\left(\frac{6-1+3}{2}\right)a^2b=+\frac{8}{3}a^2b$

3) $5xy-5xy=0$

4) $ab^4-2a^2b^4$ (rimane così)

5) $3a^2b^3-a^2b^3+ab^4-\frac{1}{4}ab^4=(3-1)a^2b^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)ab^4=2a^2b^3+\frac{3}{4}ab^4$

6) $2x^3y-\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{5}{4}x^2y^2=(2-1)x^3y+\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)x^2y^2=x^3y+\left(\frac{-2+5}{4}\right)x^2y^2=$

$=x^3y+\frac{3}{4}x^2y^2$

7) $\frac{3}{2}xy-x^2y-\frac{3}{2}xy+5x^2y=(\frac{3}{2}-\frac{3}{2})xy+(-1+5)x^2y=0+4x^2y=4x^2y$

Moltiplicazione di monomi

Come possiamo moltiplicare due monomi ?
Per esempio

$$(2ab)\cdot(3a^2)=\ ?$$

E' chiaro che basta moltiplicare i coefficienti e la parte letterale.
Avremo

$$\underset{2\cdot 3}{6}\cdot\underbrace{a^3b}_{ab\cdot a^2}$$

Esempi

1) $\frac{1}{2}ab\cdot 3a^2b^2=\frac{3}{2}a^3b^3$.
2) $5x^4y\cdot(-2xy)=-10x^5y^2$
3) $\frac{1}{3}ab\cdot 3b=ab^2$
4) $(-2a^2b^3)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)=a^3b^4$

Potenza di un monomio

Come possiamo sviluppare la potenza di un monomio?
Per esempio :

$$(2a^2b)^2=\ ?$$

Dovremo fare la potenza sia del coefficiente che della parte letterale. Nel nostro caso avremo:

$$(2a^2b)^2=\underset{\text{potenza del coeff.}}{2^2}\cdot\underbrace{a^4\cdot b^2}_{\text{potenza della parte letterale}}$$

Esempi

1) $\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3a^3b^6=-\frac{1}{8}a^3b^6$

2) $(-2xy^3)^2=(-2)^2x^2y^6=4x^2y^6$

Divisione tra monomi

Possiamo dividere due monomi ?

Per esempio :

$$2a^2b : ab = ?$$

$$\frac{2a^{\cancel{2}}\cancel{b}}{\cancel{a}\cancel{b}}$$

Quindi in questo caso abbiamo ottenuto un monomio.

Ma è sempre così ?

Se, per esempio, abbiamo :

$$2a^2b : a^3b = ?$$

$$\frac{2a^2b}{a^3b} = \frac{2}{a}$$

e *quindi in questo caso non abbiamo un monomio.*

Diremo che un monomio è divisibile per un altro monomio (divisore) quando nella sua parte letterale ci sono tutte le lettere del divisore con esponenti maggiori o uguali.

Esempi:

1) $2ab^4 : 3ab^2 = \frac{2ab^4}{3ab^2} = \frac{2}{3}b^2$

2) $5x^3y^2 : 10x^3y = \frac{5x^3y^2}{10x^3y} = \frac{1}{2}y$

3) $3a^2b^3 : (-3ab) = -\frac{3a^2b^3}{3ab} = -ab^2$

4) $4a^2b^2 : 4a^2b^2 = \frac{4a^2b^2}{4a^2b^2} = 1$

5) $3a^3b^2 : 9ab = \frac{3a^3b^2}{9ab} = \frac{1}{3}a^2b$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo fra monomi

Come per i numeri naturali, possiamo definire il M.C.D. tra due o più monomi e il m.c.m. tra due o più monomi.

Massimo comun divisore (M.C.D.)

- come coefficiente del massimo comun divisore si prende il M.C.D. dei coefficienti se sono interi (senza considerare il loro segno) e 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- come parte letterale del massimo comun divisore si prende il prodotto delle lettere comuni prese una sola volta e con il minimo esponente.

Esempi M.C.D. $\left(3a^2bc^3 \quad ; \quad 2ac^2\right) = ac^2$

M.C.D. $\left(\frac{1}{2}abc^4 \quad ; \quad 4b^2c^3\right) = bc^3$

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

- come coefficiente del minimo comune multiplo si prende il m.c.m. dei coefficienti se sono interi (senza considerare il loro segno) e 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- come parte letterale del minimo comune multiplo si prende il prodotto di tutte le lettere dei monomi prese una sola volta e con il massimo esponente.

Esempi m.c.m. $\left(3x^2yz \quad ; \quad 2xyz^4\right) = 6x^2yz^4$

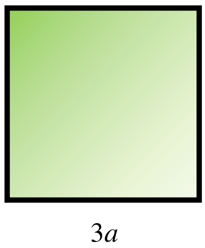
m.c.m. $\left(\frac{1}{3}xy^3 \quad ; \quad 4y\right) = xy^3$

m.c.m. $\left(2abc \quad ; \quad 4a^3\right) = 4a^3bc$

m.c.m. $\left(\frac{1}{2}a^2b^3 \quad ; \quad 5abc^4\right) = a^2b^3c^4$

Il calcolo letterale in geometria

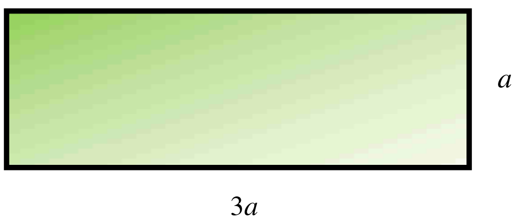
1) Consideriamo un quadrato di lato $3a$. Come si esprime la sua area? Come risulta il suo perimetro?



$$A = (3a)^2 = 9a^2$$

$$2p = 3a \cdot 4 = 12a$$

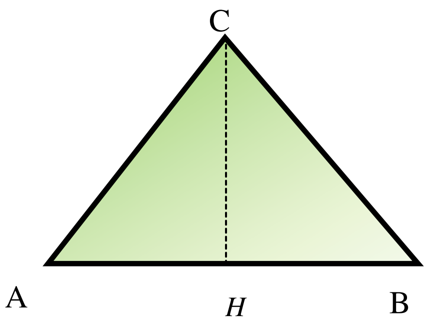
2) Consideriamo un rettangolo di base $3a$ e altezza a. Come risulta la sua area? E il suo perimetro?



$$A = 3a \cdot a = 3a^2$$

$$2p = 3a \cdot 2 + a \cdot 2 = 6a + 2a = 8a$$

3) Considera un triangolo isoscele ABC di base $AB = 6a$ e altezza $CH = 4a$. Come risulta la sua area? E il suo perimetro?



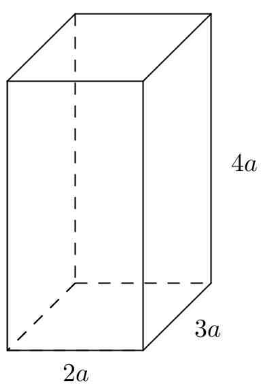
$$A = \frac{6a \cdot 4a}{2} = 12a^2$$

Poiché $\overline{AH} = 3a$ e

$$\overline{AC} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{16a^2 + 9a^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$$

$$2p = 6a + 5a \cdot 2 = 6a + 10a = 16a$$

4) Considera un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $2a$, $3a$, $4a$. Come risulta la sua superficie totale? E il suo volume?



$$S_t = S_l + 2 \cdot S_B = 2p_{base} \cdot 4a + 2 \cdot 2a \cdot 3a = 10a \cdot 4a + 12a^2 = 40a^2 + 12a^2 = 52a^2$$

$$V == 2a \cdot 3a \cdot 4a = 24a^3$$

ESERCIZI

1) Quali tra le seguenti espressioni algebriche sono monomi?

a) $-2x^3y^6$ b) $x-y-2$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{a}{b}$ e) 0

2) Riduci a forma normale i seguenti monomi:

$$(-3x)(5xy)x;\quad aabbc5b3;\quad (-a^2b^3)(5b^4a^3);\quad -x(-y)(-xy);\quad (3bx)(3bx)(3bx)$$

3) Completa le seguenti frasi:

a) In un monomio i fattori letterali devono avere come esponenti dei numeri …………..

b) Si dice grado di un monomio la ………….. degli ……………… della sua ………………..

c) Un numero è considerato un monomio di grado………………

d) Due monomi che hanno lo stesso ……………… e la stessa ……………… si dicono uguali.

4) Scrivi il grado di ciascuno dei seguenti monomi:

a) $3x^2y$ b) $7a^4m^5p^9$ c) $abcd$ d) $9y$ e) $\frac{10}{7}$

5) Completa la seguente tabella:

Monomio	Coefficiente	Parte letterale	Grado
2xy			
	4		*3*
		x^2y	
x/2			
	3		*0*

6) Completa la seguente tabella:

Monomio	Uguale	Simile	Opposto
$5ab^3$			
	6xyz		
		$-abc^2$	
			$+5x^3y^5$
x/2			

7) Utilizzando le lettere *a* e *b*, scrivi tutti i monomi possibili di coefficiente 2 e grado 3.

8) Per scrivere un monomio di grado 4 sono indispensabili quattro lettere?

9) Quante lettere sono necessarie per scrivere un monomio di grado 3? Perché?

10) Può un monomio di grado 3 essere composto da quattro lettere? Perché?

Somma di monomi, prodotto di monomi, potenza di monomi

11) $\left(\frac{1}{2}ab\right)\cdot(ab)+3a^2b^2$ $\left[\frac{7}{2}a^2b^2\right]$

12) $\left(\frac{1}{5}x^2y\right)\cdot(-5x)+2x^3y$ $\left[x^3y\right]$

13) $(5ab)\cdot\left(-\frac{1}{3}a\right)+\frac{1}{3}a^2\cdot(-2b)$ $\left[-\frac{7}{3}a^2b\right]$

14) $(2ab)^2\cdot\left(\frac{1}{4}a\right)-(-2a)\cdot(ab)^2$ $\left[3a^3b^2\right]$

15) $(2a)^3\cdot\left(\frac{1}{2}b\right)^2+(5ab)\cdot(-\frac{1}{5}a^2b)$ $\left[a^3b^2\right]$

16) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3\cdot(2ab)^2-(ab)^2\cdot(3a^6b^3)$ $\left[-\frac{7}{2}a^8b^5\right]$

17) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^4-\left(-\frac{1}{2}x^4y^2\right)^2$ $\left[-\frac{3}{16}x^8y^4\right]$

18) $\left(-\frac{1}{3}ab\right)^2\cdot(-3a)^2+\left(a^2b^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2\right)$ $\left[\frac{4}{5}a^4b^2\right]$

19) $\left(-2x^2\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}xy\right)-(3xy)\cdot\left(\frac{1}{6}x^6\right)$ $\left[-\frac{5}{2}x^7y\right]$

20) $(-a)^3+\frac{1}{2}a(-a)^2+(ab)^2-a^2\cdot(-3b^2)$ $\left[4a^2b^2-\frac{1}{2}a^3\right]$

21) $2x\left(-\frac{1}{2}y\right)-(xy)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)+xy+2x^2\cdot\left(-\frac{1}{4}xy^2\right)$ $[0]$

22) $\left(-\frac{1}{2}a\right)^3\cdot(-b)^2+3a\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)^2$ $\left[\frac{5}{8}a^3b^2\right]$

23) $(2x+x)^2-5x\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)$ $\left[\frac{32}{3}x^2\right]$

24) $(-2ab)^4+a\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)+(a^2b^2)^2+2a\cdot\left(-\frac{3}{4}b\right)$ $\left[17a^4b^4-2ab\right]$

25) $\left(-\frac{1}{3}x\right)^2\cdot(-2y)+(-xy)^3+xy\cdot\left(-\frac{1}{9}x\right)+x^3y\cdot(-y)^2$ $\left[-\frac{1}{3}x^2y\right]$

Esercizi di ricapitolazione sui monomi

26) $\left(xy-\frac{2}{3}xy\right)y^3 - x\left(-y^2\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{2}{3}xy^4$ $[10xy^4]$

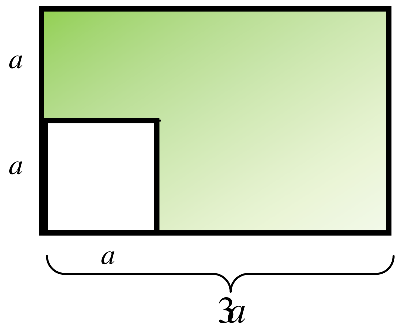
27) $\left(\frac{5}{2}ab-ab\right)^2 \cdot (-a^2b) - (3a^3b^3)^2 : (9ab^2)^2 + \left(-\frac{3}{2}a^2\right)^2 \cdot b^3$ $\left[-\frac{1}{9}a^4b^2\right]$

28) $[a^2b-(-2a^2b)]\cdot(-3ab^2)+(-2a^2b^2)^2 : \frac{1}{2}ab$ $\left[-a^3b^3\right]$

29) $3ab(-2a)^2 + (4ab^2c : \frac{1}{4}bc)a^2 - 6a^3b$ $\left[22a^3b\right]$

30) $\left[-3xy\left(\frac{1}{9}x^2y\right)-y^2(-x)^3\right] : (-x)^2 + 2x^2y^2 : (-x)$ $\left[-\frac{4}{3}xy^2\right]$

31) Con i dati della figura trova il perimetro e l'area della zona colorata.



$[10a\,;\ 5a^2]$

32) In un triangolo isoscele la base misura $10a$ e il lato obliquo $13a$. Determina perimetro e area.

$[36a\,;\ 60a^2]$

33) Considera un prisma a base quadrata il cui spigolo di base è $3a$ e l'altezza $6a$. Determina superficie totale e volume.

$[90a^2\,;\ 54a^3]$

34) Considera un cilindro di raggio a e altezza $3a$. Determina superficie totale e volume.

$[8\pi \cdot a^2\,;\ 3\pi \cdot a^3]$

Polinomi

Algebra
Polinomi

Un polinomio è una somma algebrica di monomi.

Esempio: a^2b+2a ; $xy-\frac{1}{2}y^2$; $a^3+b^3+c^2$ sono polinomi.

I vari monomi che compongono il polinomio si chiamano "termini" del polinomio. Un monomio può anche essere considerato come un polinomio con un solo termine.

NOTA: se in un polinomio ci sono monomi simili questi si sommano e il polinomio si dice **ridotto a forma normale.**

Esempio: $6ab-x^2y^2-2ab=4ab-x^2y^2$

Definizione: se un polinomio ridotto a forma normale ha 2 termini, cioè è costituito da 2 monomi, si chiama *binomio*, se è costituito da 3 monomi si chiama *trinomio*.

Esempio: $2a+b$ è un binomio
$2a^2+b+c^3$ è un trinomio

Definizione: *il grado di un polinomio è il grado del suo termine di grado maggiore.*

Esempio: x^3y-xy^2 ha grado 4

Definizione: *il grado di un polinomio rispetto ad una lettera è il massimo degli esponenti con cui compare quella lettera.*
Esempio: x^3y-xy^2 ha grado 3 rispetto alla lettera x e grado 2 rispetto alla lettera y.

Termine "noto" di un polinomio: *è il termine di grado 0 cioè il termine in cui non compare nessuna lettera.*
Esempio: a^2b+2 2 è il termine noto

Polinomio omogeneo: *un polinomio si dice omogeneo quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.*
Esempio: $a^3b+3a^2b^2+ab^3$ è un polinomio omogeneo poiché tutti i suoi termini hanno grado 4.

Operazioni con i polinomi

Addizione tra polinomi
La somma tra due o più polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

Esempio: $(x^2 y + xy) + (2xy - 4x^2 y + x^3) = \underline{x^2 y} + \underline{\underline{xy}} + \underline{\underline{2xy}} - \underline{4x^2 y} + x^3 =$

(si riduce sommando i termini simili)

$= -3x^2 y + 3xy + x^3$

Differenza tra polinomi
La differenza tra due polinomi si ottiene sommando al primo polinomio l'opposto del secondo (si cambia il segno dei coefficienti del secondo).

Esempio: $(x^2 y + xy) - (2xy - 4x^2 y + x^3) = \underline{x^2 y} + \underline{\underline{xy}} - \underline{\underline{2xy}} + \underline{4x^2 y} - x^3 =$

$= 5x^2 y - xy - x^3$

Per indicare addizione e sottrazione tra polinomi si parla di **somma algebrica**.

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio
Per moltiplicare un monomio per un polinomio si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e si moltiplica il monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio: $5a^2 \cdot (a + 3b) = 5a^2 \cdot a + 5a^2 \cdot 3b = 5a^3 + 15a^2 b$

Moltiplicazione tra due polinomi
Si moltiplica ogni termine del 1° polinomio per ogni termine del 2° e si sommano i risultati (sempre per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).

Esempio: $(5a^2 + b) \cdot (a + 3b) = 5a^2 \cdot (a + 3b) + b \cdot (a + 3b) = 5a^3 + 15a^2 b + ab + 3b^2$

NOTA: il grado del prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori (per la proprietà delle potenze).

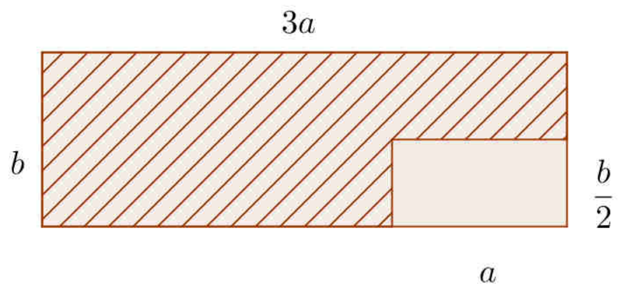
NOTA: come si moltiplicano tre polinomi? Prima si moltiplicano due polinomi e il risultato si moltiplica per il terzo.

Esempio:

$$(x+1)(2x+2)(x-4) =$$
$$(2x^2 + 2x + 2x + 2)(x-4) =$$
$$(2x^2 + 4x + 2)(x-4) =$$
$$2x^3 - 8x^2 + 4x^2 - 16x + 2x - 8 =$$
$$2x^3 - 4x^2 - 14x - 8$$

Problemi di geometria
Polinomi

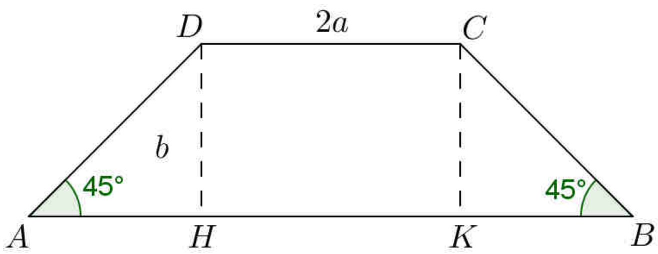
1) Determina perimetro e area della figura tratteggiata



$$[\,2p = 2b + 6a\,;\,A = \frac{5}{2}ab\,]$$

2) *Problema svolto*

Considera il trapezio isoscele in figura e determinane l'area.



Osservando il triangolo AHD (triangolo rettangolo isoscele) si ha

$$\overline{AH} = \overline{KB} = b$$

Quindi $\overline{AB} = 2a + 2b$

In conclusione $A = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2a) \cdot b = \frac{1}{2}(4a + 2b) \cdot b = (2a + b) \cdot b = 2ab + b^2$

Prodotti notevoli

Nella moltiplicazione dei polinomi ci sono dei casi particolari che conviene ricordare.

Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

$$(A+B)(A-B)$$

Consideriamo per esempio:

$(2a+b)(2a-b)=4a^2-2ab+2ab-b^2=4a^2-b^2$

In generale si ha:

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$$

cioè si ottiene sempre la differenza tra il quadrato del 1° monomio e il quadrato del 2° monomio.

Esempi

1) $(a+1)(a-1)=a^2-1$

2) $(3a+5b)(3a-5b)=9a^2-25b^2$

3) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(\frac{1}{2}x+y\right)=\frac{1}{4}x^2-y^2$

4) $(x+y)(-y+x)=(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

5) $(3a-b)(b+3a)=(3a-b)(3a+b)=9a^2-b^2$

6) $(a-1)(a+1)(a^2+1)=(a^2-1)(a^2+1)=a^4-1$

Quadrato di un binomio

$$(A+B)^2$$

Consideriamo per esempio:

$$\begin{aligned}&(2a+b)^2=(2a+b)(2a+b)=4a^2+2ab+2ab+b^2=\\&=4a^2+4ab+b^2=\\&=(2a)^2+2\cdot(2a)\cdot b+(b)^2\end{aligned}$$

In generale si ha:

$$\begin{aligned}&(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+AB+B^2=\\&=A^2+2AB+B^2\end{aligned}$$

Quindi il quadrato di un binomio risulta uguale alla somma tra il quadrato del 1° termine, il quadrato del 2° termine e il doppio prodotto tra il 1° termine e il 2° termine del binomio.

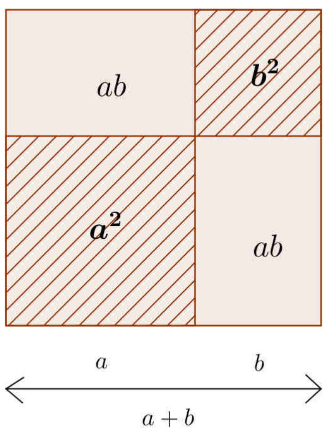
Esempi

1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

2) $(x-y)^2=x^2+2(x)(-y)+(-y)^2=x^2-2xy+y^2$

3) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2=\frac{1}{4}x^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot y+y^2=\frac{1}{4}x^2+xy+y^2$

Interpretazione geometrica



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Il quadrato di lato ***a+b*** è dato dall'unione del quadrato di lato ***a***, del quadrato di lato ***b*** e di due rettangoli di lati ***a*** e ***b*** (e quindi area ***2ab***)

Nota: vediamo come risulta il quadrato di un trinomio.

$$
\begin{aligned}
&(A+B+C)^2 = (A+B+C)(A+B+C) = \\
&= A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2 = \\
&= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC
\end{aligned}
$$

Quindi il quadrato di un trinomio è dato dalla *somma tra quadrato del 1° termine, quadrato del 2° termine, quadrato del 3° termine e il doppio prodotto tra il 1° e il 2° termine, il doppio prodotto tra il 1° e il 3° termine e il doppio prodotto tra il 2° e il 3° termine.*

Esempio

$$
\begin{aligned}
&(3a-b-2c)^2 = \\
&= 9a^2+b^2+4c^2+2\cdot(3a)\cdot(-b)+2\cdot(3a)\cdot(-2c)+2\cdot(-b)\cdot(-2c) = \\
&= 9a^2+b^2+4c^2-6ab-12ac+4bc
\end{aligned}
$$

Cubo di un binomio

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B) = \\
&= (A+B)^2(A+B) = (A^2+2AB+B^2)(A+B) = \\
&= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = \\
&= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3
\end{aligned}
$$

Quindi il cubo di un binomio risulta *la somma tra cubo del 1°termine, cubo del 2°termine, triplo prodotto tra il quadrato del 1°termine e il 2°termine, triplo prodotto tra il 1°termine e il quadrato del 2°termine.*

Esempi

1) $(2a+b)^3 = 8a^3+b^3+3\cdot(2a)^2\cdot(b)+3\cdot(2a)\cdot(b)^2 = 8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$

2) $(2a-b)^3 = 8a^3+(-b)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(-b)+3\cdot(2a)\cdot(-b)^2 = 8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$

Divisione tra polinomi

Divisione di un polinomio per un monomio

Esempio 1

$$(2a^3b+a^2):a^2=?$$

Per la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione ho:

$(2a^3b:a^2)+(a^2:a^2)=2ab+1$

Quindi in questo caso, essendo ogni termine del polinomio divisibile per il monomio, il polinomio risulta divisibile per il monomio.

$(2a^3b+a^2):a^2=2ab+1$

Quindi: $(2ab+1)\cdot a^2=2a^3b+a^2$ cioè se

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline & Q(quoziente) \end{array}$$

si ha $Q\cdot B=A$

Esempio 2

$$(2a^3b+a^2):a^3=?$$

In questo caso il polinomio non è divisibile per a^3 poiché il suo 2° termine a^2 non è divisibile per a^3.

Possiamo scrivere $\dfrac{2a^3b+a^2}{a^3}=2b+\dfrac{1}{a}$ ma *non è un polinomio*.

Esercizi

1) $(x^3y^2+x^2):x=........$

2) $(3ab^2-2b):b=.........$

Divisione tra due polinomi in una sola lettera

Consideriamo polinomi contenenti una sola lettera.

Definizione: dati 2 polinomi A e B diciamo che A è divisibile per B se esiste un polinomio Q che moltiplicato per B dà A cioè:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline & Q \end{array} \qquad Q \cdot B = A$$

Esempio

$$(x^2-1):(x+1)=?$$

Poiché sappiamo che $(x+1)(x-1)=x^2-1$ abbiamo

$$\begin{array}{l|l} x^2-1 & x+1 \\ \hline & x-1 \end{array} \qquad \text{poiché } (x+1)(x-1)=x^2-1$$

Ma in generale come possiamo trovare il quoziente?

Per svolgere la divisione tra due polinomi possiamo seguire un procedimento simile a quello usato per la divisione tra due numeri.
Riprendiamo l'esempio precedente:

- I polinomi vanno ordinati secondo le potenze decrescenti della loro lettera e dobbiamo lasciare, nel dividendo A, degli spazi vuoti in corrispondenza delle potenze mancanti

$$\begin{array}{lll|l} x^2 & & -1 & x+1 \\ \hline & & & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} A & B \\ \hline & \end{array}$$

- Dividiamo il 1° termine del dividendo per il 1° termine del divisore e scriviamo il risultato (1° termine del quoziente Q)

$$\begin{array}{lll|l} x^2 & & -1 & x+1 \\ \hline & & & x \end{array}$$

- Moltiplichiamo x per ogni termine del divisore $(x+1)$ e sottraiamo i risultati ai termini corrispondenti in grado del dividendo A (x^2-1); sommiamo in colonna e otteniamo $-x-1$

$$
\begin{array}{lll|l}
x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & x \\ \cline{1-3}
// & -x & -1 &
\end{array}
$$

- Poiché $-x-1$ ha grado uguale al divisore si può ancora dividere.
  Ripetiamo quindi il procedimento precedente partendo da $-x-1$ ed in questo caso otterremo resto R=0 e quoziente Q=$x-1$

$$
\begin{array}{lll|l}
x^2 & & -1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & \underbrace{x-1}_{\text{Q quoziente}} \\ \cline{1-3}
// & -x & -1 & \\
 & x & 1 & \\ \cline{2-3}
 & // & // &
\end{array}
$$

NOTA IMPORTANTE

Se il resto R (di grado minore del divisore) è diverso da zero, A non è divisibile per B ma si avrà:

$$Q \cdot B + R = A$$

Esempio $\left(x^2+x+1\right):(x+1)=?$

$$
\begin{array}{lll|l}
x^2 & +x & +1 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -x & & \underbrace{x}_{\text{Q}} \\ \cline{1-3}
// & // & & \\
 & & \underbrace{1}_{R} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
Q\cdot & B+ & R= & A \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\end{array}
$$
$$x\cdot(x+1)+1=x^2+x+1$$

NOTA: il grado di Q è uguale alla differenza tra il grado di A e il grado di B.

Esempi svolti

1) $\left(x^3-8\right):\left(x-2\right)$

$$
\begin{array}{cccc|l}
x^3 & & & -8 & x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & 2x^2 & & & \underbrace{x^2+2x+4}_{Q} \\ \cline{1-2}
// & 2x^2 & & -8 & \\
 & -2x^2 & 4x & & \\ \cline{2-3}
 & // & 4x & -8 & \\
 & & -4x & 8 & \\ \cline{3-4}
 & & // & // & \\
 & & R=0 & &
\end{array}
$$

Quindi x^3-8 è divisibile per $x-2$ e $\left(x^2+2x+4\right)\left(x-2\right)=x^3-8$

2) $\left(x^3-2x+1\right):\left(2x-1\right)$

$$
\begin{array}{cccc|l}
x^3 & & -2x & 1 & 2x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & \frac{1}{2}x^2 & & & \underbrace{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{7}{8}}_{Q} \\ \cline{1-2}
// & \frac{1}{2}x^2 & -2x & +1 & \\
 & -\frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{4}x & & \\ \cline{2-3}
 & // & -\frac{7}{4}x & +1 & \\
 & & \frac{7}{4}x & -\frac{7}{8} & \\ \cline{3-4}
 & & // & \underbrace{\frac{1}{8}}_{R} &
\end{array}
$$

Verifichiamo che $Q\cdot B+R=A$

$$\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{7}{8}\right)(2x-1)+\frac{1}{8}=x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}x+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=x^3-2x+1$$

ESERCIZI

Somma e prodotto tra polinomi

1) $\left(4x^3-5x^2+2\right)+\left(-3x^2+2x^2-2\right)$ $[4x^3-6x^2]$

2) $\left(-8a^5+6a^3+3a-2\right)+\left(5a^5-3a^3+2a\right)$ $[-3a^5+3a^3+5a-2]$

3) $\left(3a^3+5a^2-2a+1\right)-\left(3a^3-2a^2+5a-7\right)$ $[7a^2-7a+8]$

4) $\left(3x^3-4y^2\right)+\left(5y^2-4x^3\right)+\left(x^3-y^3\right)$ $[y^2-y^3]$

5) $(3x-2)-(3x+2)-(-2x+1)-(-3x-1)$ $[5x-4]$

6) $x^2(x+y-1)-x(x-y)-y\left(x^2-2\right)-xy$ $[x^3-2x^2+2y]$

7) $[-2a(3a-2)-a]\cdot\left(-2a^2\right)-\left(-2a^3\right)(3a-1)-2a\left(9a^3\right)$ $[-8a^3]$

8) $\left(-x^3\right)\left[\left(-x^2\right)\cdot(2a-3x)-3x^3\right]-2ax\left(x^4-1\right)$ $[2ax]$

9) $(3a+2)(a-3)+(4a-1)(a+2)$ $[7a^2-8]$

10) $(2a-1)(a+1)-(a-1)(2a-3)$ $[6a-4]$

11) $\left(a^3+2b\right)\left(a^3-2b\right)-\left(a^5+a\right)(a-1)$ $[a^5-a^2+a-4b^2]$

12) $\left(4x^2+9y^2\right)\left(4x^2-9y^2\right)-y^3\left(16x^2-81y\right)$ $[16x^4-16x^2y^3]$

13) $(a+b)(a-b)\left(a^2+b^2\right)$ $[a^4-b^4]$

14) $3a(a+2)5a-2a(a+3)(a-1)$ $[13a^3+26a^2+6a]$

15) $(3x-2y)(x-4y)-(5x+3y)(2x-5y)$ $[-7x^2+23y^2+5xy]$

16) $\frac{3}{2}a(1+3a)(3a-1)+3\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)$ $[\frac{27}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{3}]$

17) $(x+3)(2x-5)+(1-3x)(4-x)+(2-5x)(4-x)$ $[10x^2-34x-3]$

Prodotti notevoli

18) $3x(x+2)-(x-1)-(x+3)(x-3)-2x^2$ $[5x+10]$

19) $3a^2+(2a-5b)(2a+5b)-b(a-3b)+22b^2+ab$ $[7a^2]$

20) $(1-2x)^2+(x+2)^2-5(x^2-2)$ $[15]$

21) $\left(\frac{1}{2}-a\right)^2-3\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right)+2(a-1)^2$ $[3-5a]$

22) $\left(\frac{3}{2}a-2b\right)^2-\left(-\frac{1}{2}a+3b\right)^2-2(-a)^2$ $[-3ab-5b^2]$

23) $(a-1)^2-(a-1)(a+1)(a^2-1)+(a^2+1)^2$ $[5a^2-2a+1]$

24) $(x+3)^2-(6+x)(x-6)-(1-x)^2+x(x-8)$ $[44]$

25) $(x+a+2)^2-(x+a)^2-4(2+x+a)$ $[-4]$

26) $(a+1+2y)^2-(a-1)(a+1)-(1+2y)^2-2a$ $[1+4ay]$

27) $a^3-(-b)^3-(a+b)^3-\frac{1}{3}a(3b+1)(1-3b)$ $[-3a^2b-\frac{1}{3}a]$

28) $(x-2y)^3-(2x-y)^3-6xy(x+y)+7y^3+8x^3$ $[x^3]$

29) $(x+y)^2-2y(x-y)-(x+y)(y-x)$ $[2x^2+2y^2]$

30) $(a^2+b^2)(a^2-b^2)-(a^2+b^2)^2+2a^2(a^2+b^2)$ $[2a^4-2b^4]$

31) $(x+1)^3+3(x+1)^2+3(x+1)+1$ $[x^3+6x^2+12x+8]$

32) $(2a+x-2)^2+4a(2-x)-(x-3)^2-\left[(-2a)^2-5\right]$ $[2x]$

33) 16) $(a-3)(a+3)-(2a+1)^2$ [$-3a^2-4a-10$]

34) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(y+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}(x+y)^2$ [$\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}y^2+xy$]

35) $(x-2y)(2y-x)-(x+y)(x-y)$ [$-2x^2-3y^2+4xy$]

36) $\left(\frac{1}{3}a+1\right)\left(\frac{1}{3}a-1\right)+(a-1)^2-\frac{2}{9}a(5a-9)$ [0]

37) $(2x-1)^2+\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2$ [$\frac{25}{4}x^2-7x+2$]

38) $(x+2y)^2-(x-2y)^2-8xy$ [0]

39) $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{2}$ [$2x^2$]

40) $(2x-3y)(2x+3y)-(2x+3y)^2$ [$-18y^2-12xy$]

41) $(xy+1)(1-xy)+(xy+1)^2$ [$2xy+2$]

42) $(a^2-2)^2-(a^2-2)(a^2+1)-a^2-6$ [$-4a^2$]

43) $(3x-y^2)^2-(3x+y^2)(3x-2y^2)-y^2(y^2-3x+2y^2)$ [0]

44) $2x(3x-2y)^2+x(x+4y)(x-4y)+8xy^2$ [$19x^3-24x^2y$]

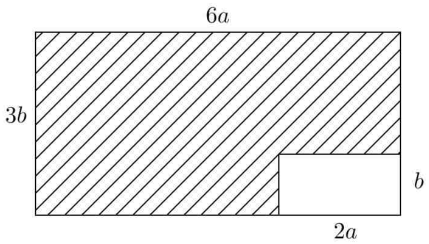
45) $(5ab-3a)^2-2(5ab-3a)(3a+5ab)+(4a+5ab)^2$ [$43a^2+10a^2b$]

46) $[(x+1)(x-1)]^2-(2+x^2)^2+\frac{3}{2}(2x-3)(2x+3)$ [$-\frac{33}{2}$]

47) $2(y-3x)^2+2(2x+y)(y-2x)-9x^2-2xy-(2y-x)^2$ [$-10xy$]

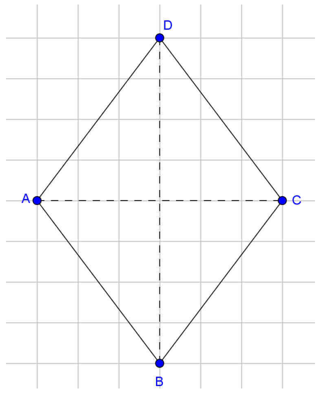
Calcolo letterale e geometria

48) Determina perimetro e area della figura tratteggiata.



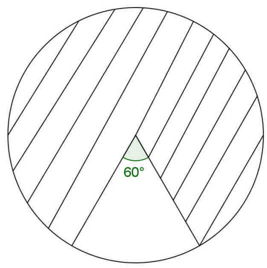
[$2p = 12a + 6b$; $A = 16ab$]

49) Determina perimetro e area del rombo in figura sapendo che $\overline{AC} = 6a$; $\overline{BD} = 8a$.



[$2p = 20a$; $A = 24a^2$]

50) Determina l'area A del settore circolare tratteggiato sapendo che il raggio misura *2a* .

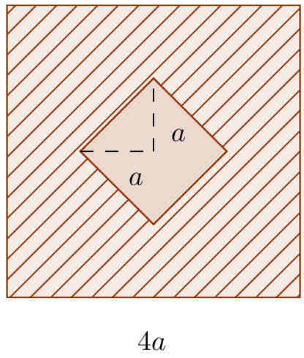


[$A = \frac{10}{3}\pi a^2$]

51) Considera un rettangolo R di dimensioni a e b . Se a viene aumentato del 50% e b viene diminuito del 50% come risulta l'area del nuovo rettangolo R'? Come risulta rispetto all'area di R?

[$A_{R'} = \frac{3}{4}ab$; $A_{R'} = \frac{3}{4}A_R$]

52) Determina l'area della zona tratteggiata.

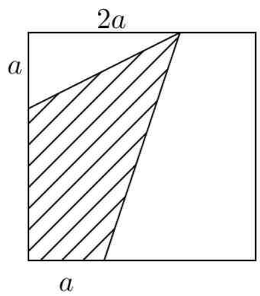


[$14a^2$]

53) Determina l'area di un esagono regolare di lato $2a$.

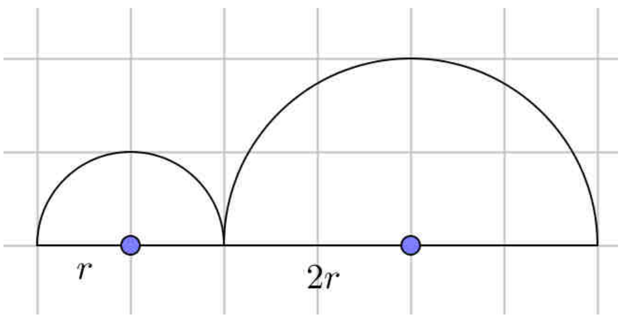
[$A = 6\sqrt{3}a^2$]

54) Considera un quadrato di lato $3a$ e determina l'area della zona tratteggiata .



[$A = \frac{7}{2}a^2$]

55) Determina perimetro e area della figura seguente.

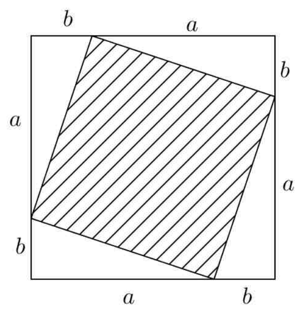


[$6r + 3\pi r$; $\frac{5}{2}\pi r^2$]

56) Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni a, $2a$, $3a$. Calcola il suo volume V. Aumenta di 1 tutte le dimensioni e calcola il nuovo volume V'.

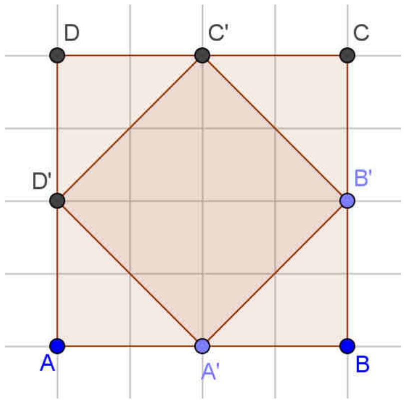
[$V = 6a^3$; $V' = 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$]

57) Calcola l'area A della zona tratteggiata.



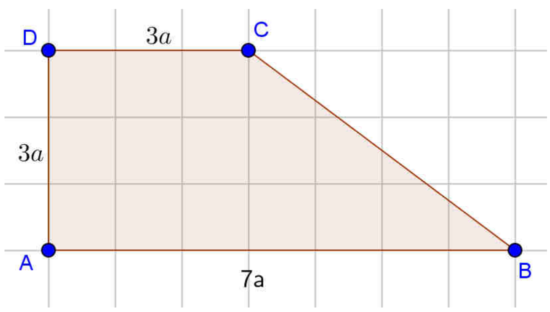
[$A = a^2 + b^2$]

58) Calcola l'area del quadrato ABCD di lato $\overline{AB} = 2a + 3$ e l'area del quadrato A'B'C'D' ottenuto congiungendo i punti medi. Come risulta l'area di A'B'C'D' rispetto all'area di ABCD ?



[$A(ABCD) = 4a^2 + 9 + 12a; \quad A(A'B'C'D') = 2a^2 + \frac{9}{2} + 6a$]

59) Determina perimetro e area del trapezio ABCD.



[$2p = 18a; \quad A = 15a^2$]

Divisione tra polinomi in una sola lettera

60) $\left(x^4+3x^2-4\right):\left(x^2-4\right)$ $[\,Q=x^2+7\ \ ;\ \ R=24\,]$

61) $\left(15a^3-8a^2-9a+2\right):\left(3a+2\right)$ $[\,Q=5a^2-6a+1\ \ ;\ \ R=0\,]$

62) $\left(7a-a^3+2+a^2\right):\left(a^2+2\right)$ $[\,Q=-a+1\ \ ;\ \ R=9a\,]$

63) $\left(16x^5-8x^3+2x-1\right):\left(x^3-1\right)$ $[\,Q=16x^2-8\ \ ;\ \ R=16x^2+2x-9\,]$

64) $\left(2a^3-4a^2+a+2\right):\left(2a^2+a-1\right)$ $[\,Q=a-\frac{5}{2}\ \ ;\ \ R=\frac{9}{2}a-\frac{1}{2}\,]$

65) $\left(x^5-x^3+1\right):\left(x^2+1\right)$ $[\,Q=x^3-2x\ \ ;\ \ R=2x+1\,]$

66) $\left(y^3-5y^2+3y-6\right):\left(y^2+1-2y\right)$ $[\,Q=y-3\ \ ;\ \ R=-4y-3\,]$

67) $\left(-3y^3+11y^2-9y-2\right):\left(3y^2-5y-1\right)$ $[\,Q=2-y\ \ ;\ \ R=0\,]$

68) $\left(a^2-a-12\right):\left(a-4\right)$ $[\,Q=a+3\ \ ;\ \ R=0\,]$

69) $\left(2x^3-9x+1\right):\left(x-3\right)$ $[\,Q=2x^2+6x+9\ \ ;\ \ R=28\,]$

70) $\left(3x^3+x^2-8x+4\right):\left(x+2\right)$ $[\,Q=3x^2-5x+2\ \ ;\ \ R=0\,]$

71) $\left(b^2-b+b^3+15\right):\left(3+b\right)$ $[\,Q=b^2-2b+5\ \ ;\ \ R=0\,]$

72) $\left(2x^3-x-3x^2+2\right):\left(x-1\right)$ $[\,Q=2x^2-x-2\ \ ;\ \ R=0\,]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
CALCOLO LETTERALE: MONOMI E POLINOMI

1. $\left(-\frac{1}{3}x\right)^2 \cdot (-2y) + (-xy)^3 + xy \cdot \left(-\frac{1}{9}x\right) + x^3 y \cdot (-y)^2$ $\qquad [-\frac{1}{3}x^2 y]$

2. $[-3xy \cdot \left(\frac{1}{9}x^2 y\right) - y^2 \cdot (-x)^3] : (-x)^2 + 2x^2 y^2 : (-x)$ $\qquad [-\frac{4}{3}xy^2]$

3. In un triangolo isoscele la base misura $10a$ e il lato obliquo $13a$. Determina perimetro e area del triangolo.
$[36a \quad ; \quad 60a^2]$

4. Un quadrato ha lato che misura $4a$. Calcola perimetro, area e misura della diagonale.
$[16a; \quad 16a^2; \quad 4a\sqrt{2}]$

5. Considera un triangolo equilatero di lato $3b$. Determina perimetro e area del triangolo.
$[9b; \quad \frac{9}{4}\sqrt{3}b^2]$

6. $(x+3)\cdot(2x-5)+(1-3x)\cdot(4-x)+(2-5x)\cdot(4-x)$ $\qquad [10x^2-34x-3]$

7. $\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 - 3\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{2}\right)+2\cdot(a-1)^2$ $\qquad [3-5a]$

8. $(a-2b)^2-(a+b)\cdot(a-b)$ $\qquad [5b^2-4ab]$

9. $(2a^2b+ab^3):a+(a-b)^2$ $\qquad [a^2+b^2+b^3]$

10- $(a-2b)^3-(a-b)\cdot(a^2+2ab)-(-2b)^3$ $\qquad [-7a^2b+14ab^2]$

11. $(x^3+x^2-1):(x+1)$ $\qquad [Q=x^2; \quad R=-1]$

12. $(2x^2-3x^3+x+2):(x-2)$ $\qquad [Q=-3x^2-4x-7; \quad R=-12]$

La scomposizione dei polinomi

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado inferiore.
Esempio: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
Osserviamo che l'uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il prodotto notevole $(A+B)(A-B)$.

Metodi per la scomposizione di un polinomio

- **Raccoglimento a fattor comune**

  Se in tutti i termini di un polinomio è contenuto lo stesso fattore (che può essere anche un numero) si può "*raccogliere*" questo fattore comune (si dice anche "*mettere in evidenza*")

  Esempi
  1) $3x^2 - 2x = x(3x-2)$
  2) $4x^3 - 2x^2 + 8x = 2x(2x^2 - x + 4)$

  Nota importante: il fattore comune può essere un polinomio.

  Esempi

  1) $2(a^2+b) - 3a(a^2+b) = (a^2+b)(2-3a)$

  2) $(x+y)^2 + 2(x+y) = (x+y)(x+y) + 2(x+y) = (x+y)[(x+y)+2] = (x+y)(x+y+2)$

- **Raccoglimento parziale**

  Esempio: $x^3 - x^2 + 4x - 4 =$ raccogliamo x^2 tra i primi due termini e il numero 4 tra il 3° ed il 4° termine

  $= x^2(x-1) + 4(x-1) =$ possiamo raccogliere $(x-1)$

  $= (x-1)(x^2+4)$

  Osservazione: è come percorressimo all'indietro i passaggi per la moltiplicazione di due polinomi.
  NOTA: perché questo metodo funzioni è essenziale che dopo il primo raccoglimento si possa ancora raccogliere.

  Esempio: $x^3 - x^2 + 4x + 4 = x^2(x-1) + 4(x+1)$ … non funziona!

• Scomposizioni collegate ai prodotti notevoli

Esempio: $x^2-4=(x+2)(x-2) \quad \leftarrow \quad A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$

$4a^2-b^2=(2a+b)(2a-b)$

Esempio: $x^2+2x+1=(x+1)^2 \quad \leftarrow \quad A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$

$x^2-2x+1=(x-1)^2 \quad \leftarrow \quad A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$

$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

$9b^2-6b+1=(3b-1)^2$

$25x^2-10xy+y^2=(5x-y)^2$

Esempio: $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=(x+y+z)^2 \quad \leftarrow \quad (A+B+C)^2=...$

$x^2+y^2+4+2xy+4x+4y=(x+y+2)^2$

$4a^2+b^2+1+4ab+4a+2b=(2a+b+1)^2$

Esempio: $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3 \quad \leftarrow \quad (A+B)^3=...$

$8a^3-12a^2+6a-1=(2a-1)^3$

NOTA: differenza di cubi, somma di cubi

$$\boxed{A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)}$$

Infatti $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+\underline{A^2B}+\underline{\underline{AB^2}}-\underline{A^2B}-\underline{\underline{AB^2}}-B^3=A^3-B^3$

Quindi per esempio: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Analogamente $\boxed{A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)}$

Quindi per esempio: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Esempi

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$8a^3+1=(2a+1)(4a^2-2a+1)$

$8a^3-1=(2a-1)(4a^2+2a+1)$

- ## Scomposizione con il “teorema di Ruffini”

Consideriamo un polinomio contenente una sola lettera, per esempio

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$$

Se non riusciamo a scomporlo con i metodi considerati finora possiamo provare ad utilizzare il seguente teorema di Ruffini.

Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $P(x)$, se sostituendo alla lettera x un valore a otteniamo zero, cioè se $P(a) = 0$, allora il polinomio è divisibile per $(x - a)$ e viceversa.

Dimostrazione

Supponiamo di dividere $P(x)$ per $x - a$: avremo $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$.

Sostituendo a x il valore a abbiamo $P(a) = R$ ma per ipotesi $P(a) = 0$ e quindi si ha che $R = 0 \Rightarrow P(x)$ è divisibile per x-a .

Viceversa se $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$ vuol dire che $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$ e quindi sostituendo alla lettera x il valore a otterrò come risultato zero

$$P(a) = \left(\underbrace{a - a}_{0} \right) \cdot Q(a) = 0$$

Nel nostro esempio abbiamo che

$$P(2) = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$$

e quindi $(x - 2)$ è un divisore di $P(x)$.

Eseguiamo la divisione

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & +5x & -6 & x-2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & 4x^2 & & & \underbrace{2x^2-x+3}_{Q(x)} \\ \hline
// & -x^2 & +5x & -6 & \\
 & +x^2 & -2x & & \\ \hline
 & // & +3x & -6 & \\
 & & -3x & +6 & \\ \hline
 & & // & // & R=0
\end{array}
$$

Quindi $2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(2x^2 - x + 3)$

NOTA*: ma come facciamo a sapere se esiste un numero intero* a *che annulla il polinomio?*

Se a **intero esiste, deve essere un divisore del termine noto di** $P(x)$**:** infatti se osserviamo l'ultimo passaggio della divisione dell'esempio, per avere *R=0* dovrà essere

$$a \cdot \text{numero} = \text{termine noto di } P(x)$$

e quindi a deve essere (se è intero) un divisore del termine noto del polinomio.

Nel nostro esempio quindi avremmo dovuto provare a sostituire alla lettera x i divisori di -6 cioè

$$\pm 1 \;\; ; \;\; \pm 2 \;\; ; \;\; \pm 3 \;\; ; \;\; \pm 6$$

Generalmente si parte da ± 1 e si va avanti con i divisori finché non si trova $a \,:\, P(a) = 0$.

Se nessun divisore annulla il polinomio vuol dire che non c'è a intero tale che $P(x)$ sia divisibile per $x - a$.

Esempio: $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$

I divisori di -6 sono: $\pm 1 \;\; ; \;\; \pm 2 \;\; ; \;\; \pm 3 \;\; ; \;\; \pm 6$

$P(1) = 1 - 2 - 1 - 6 \neq 0$
$P(-1) = -1 - 2 + 1 - 6 \neq 0$
$P(2) = 8 - 8 - 2 - 6 \neq 0$
$P(-2) = -8 - 8 + 2 - 6 \neq 0$
$P(3) = 27 - 18 - 3 - 6 = 0 \qquad !$

Quindi $x^3 - 2x^2 - x - 6$ è divisibile per $x - 3$: possiamo eseguire la divisione per scomporre il polinomio:

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x-3 \\
\hline
-x^3 & 3x^2 & & & x^2+x+2 \\
\hline
// & x^2 & -x & -6 & \underbrace{}_{Q(x)} \\
 & -x^2 & +3x & & \\
\hline
 & // & +2x & -6 & \\
 & & -2x & +6 & \\
\hline
 & & // & // & R=0
\end{array}$$

Quindi $x^3 - 2x^2 - x - 6 = (x - 3)(x^2 + x + 2)$

NOTA IMPORTANTE
Scomposizione di particolari trinomi di secondo grado (metodo della somma e del prodotto)

Esempio 1
Consideriamo il trinomio $x^2 - 5x + 6$.
Possiamo cercare di scomporlo con il teorema di Ruffini e abbiamo che

$P(2) = 4 - 10 + 6 = 0$
Dividendo $x^2 - 5x + 6$ per $x - 2$ otteniamo $x - 3$ e quindi

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2) \cdot (x-3)$$

Ma in questo caso c'è un procedimento più veloce se riusciamo a trovare due numeri p, q tali che

$$\begin{cases} p + q = m \\ p \cdot q = n \end{cases}$$

Nel nostro caso si vede facilmente che questi numeri ci sono e sono

$$p = -2, \quad q = -3$$

Se allora scriviamo

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6$$

possiamo fare un raccoglimento parziale

$$x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x-3)$$

e quindi scomporre il trinomio.

In generale se abbiamo un trinomio di secondo grado con coefficiente di x^2 uguale a 1 e ci sono due numeri interi la cui somma dà il coefficiente di grado 1 e il cui prodotto dà il termine noto possiamo scrivere:

$$x^2 + ax + b = x^2 + (p+q)x + p \cdot q = x^2 + px + qx + p \cdot q = x(x+p) + q(x+p) = (x+p)(x+q)$$

Esempio 2
Consideriamo il trinomio $x^2 + x - 2$
In questo caso, cercando le combinazioni di segni di 1,2 che danno come prodotto -2 e come somma 1 , abbiamo $p = 2, \quad q = -1$ e quindi abbiamo:

$$x^2 + 2x - x - 2 = x(x+2) - (x+2) = (x+2)(x-1)$$

Esempio 3
Consideriamo il trinomio $x^2 + x + 1$: ci si rende conto che non si trovano due numeri che abbiano somma 1 e prodotto 1. Anche con Ruffini abbiamo che $P(1) = 3, \quad P(-1) = 1$. Quindi questo trinomio non possiamo scomporlo (si dice irriducibile).

ESERCIZI

Raccoglimento a fattor comune, raccoglimento parziale

1) $3x+6y$; a^3x-a^3y ; x^3+4x

2) $8a^4-4a^3+2a^2$; $3xy+6x^2-9y^2$; a^2b-ab

3) $2ab-4a^2$; $\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a$; $2ax-4a+2a^2$

4) $5x-10xy+15y$; $-27a^2+9ay-18a$; $-6a^3+9a^2b+3a^2$

5) $(x+3y)-(x+3y)^2$; $(a-b)^2-(a-b)$; $(2x-3y^2)^3+(2x-3y^2)^2$

6) $5ay-y-5a+1$ [$(5a-1)(y-1)$]

7) $x^2y^2+1+x^2+y^2$ [$(x^2+1)(y^2+1)$]

8) $3a^2b-2a+12ab-8$ [$(3ab-2)(a+4)$]

9) $x^3+12x^2+6x+72$ [$(x+12)(x^2+6)$]

10) $5ax+2ay+5bx+2by$ [$(5x+2y)(a+b)$]

11) $ay-by-b+a$ [$(a-b)(y+1)$]

12) $(a+b)^2-ax-bx$ [$(a+b)(a+b-x)$]

13) $ay-4a-3y+12$ [$(y-4)(a-3)$]

14) $2ax+4x-3a-6$ [$(a+2)(2x-3)$]

15) $a^2bx+a^2b+bxy^2+by^2$ [$b(x+1)(a^2+y^2)$]

16) $x^4+4x^2-x^3y-4xy$ [$x(x^2+4)(x-y)$]

Scomposizione con prodotti notevoli

17) x^2-49y^2 ; $9-a^2b^2$

18) $4x^2-9y^2$; $25a^6b^8-\frac{1}{4}$

19) $81-a^2$; $16x^2-a^4$

20) x^4-y^4 $[\left(x^2+y^2\right)(x+y)(x-y)]$

21) $5z^2-5$; x^3-9xy^2 ; $25a^5b^3-a^3b$

22) $a^2x-b^2x+a^2y-b^2y-a^2+b^2$ $[(a+b)(a-b)(x+y-1)]$

23) $(3a-x)^3-4(3a-x)$ $[(3a-x)(3a-x+2)(3a-x-2)]$

24) $4a^3-4a^2-4a+4$ $[4(a-1)(a-1)(a+1)]$

25) $9b-18-\left(b^2-4\right)$ $[(b-2)(7-b)]$

26) $9x^2+6x+1$; $a^2+4ab+4b^2$

27) y^2-6y+9 ; $4+9b^2-12b$

28) x^2-4x+4 ; $25x^2-60x+36$

29) $4a-4a^2-1$; $9y^2+\frac{1}{4}-3y$

30) $4a^2+4ab+b^2-c^2$
$[(2a+b+c)(2a+b-c)]$

31) $25x^2-y^2-10x+1$ $[(5x-1+y)(5x-1-y)]$

32) $a^2-x^2+2xy-y^2$ $[(a-x+y)(a+x-y)]$

33) a^2-4b-b^2-4 $[(a+b+2)(a-b-2)]$

34) $27x^3+27x^2+9x+1$ [$(3x+1)^3$]

35) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$ [$(a-2b)^3$]

36) $-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$ [$(b-a)^3$]

37) $x^6+1+3x^4+3x^2$ [$(x^2+1)^3$]

38) $8a^3+b^3$; $\frac{8}{27}a^3-1$

39) $27x^3-1$; $125a^3+8b^3$

40) x^3+27 ; a^3b^3+1

41) $24x^7-3x$ [$3x(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)$]

42) $2x^9+x^6-2x^3-1$ [$(2x^3+1)(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$]

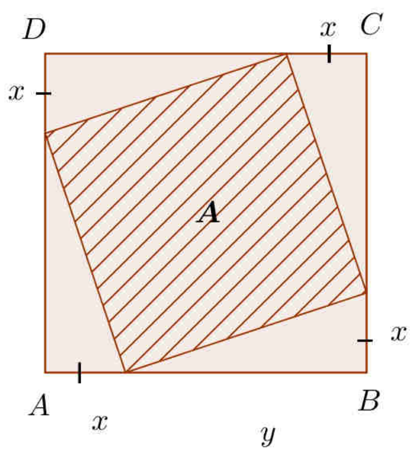
43) $2a^2+2b^2+12a+12b+4ab+18$ [$2(a+b+3)^2$]

44) x^4+2x^3-x-2 [$(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$]

45) $x^3-2x^2-9x+18$ [$(x+3)(x-3)(x-2)$]

46) $5x^4y^4-10x^2y^2+5$ [$5(xy+1)^2(xy-1)^2$]

47) Determina l'area del quadrato in figura come differenza tra l'area *A* del quadrato ABCD e le aree dei triangoli:



$[A=x^2+y^2]$

Teorema di Ruffini , trinomio di secondo grado

48) $x^2 - x - 2$ $\quad$ [$(x+1)(x-2)$]

49) $2x^2 + 3x - 2$ $\quad$ [$(x+2)(2x-1)$]

50) $x^2 - 6x + 8$ $\quad$ [$(x-2)(x-4)$]

51) $x^3 - x^2 - 3x - 9$ $\quad$ [$(x-3)(x^2 + 2x + 3)$]

52) $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$ $\quad$ [$(b-1)(b+3)(2b+1)$]

53) $3b^3 - 4b^2 + 5b - 4$ $\quad$ [$(b-1)(3b^2 - b + 4)$]

54) $x^3 - 3x - 2$ $\quad$ [$(x+1)^2(x-2)$]

55) $x^2 - 6x + 5$ $\quad$ [$(x-1)(x-5)$]

56) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\quad$ [$(x-1)(x+2)(x-3)$]

57) $6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x$ $\quad$ [$x(x-1)(6x^2 + x - 1)$]

58) $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 9y - 4$ $\quad$ [$(y-4)(y-1)(y^2 + y - 1)$]

59) $x^2 + 5x + 4$ $\quad$ [$(x+1)(x+4)$]

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
Scomposizione dei polinomi

60)	$4x^2+25-20x$	[$(2x-5)^2$]
61)	$8x^3+27+36x^2+54x$	[$(2x+3)^3$]
62)	$bx-ax+a-b$	[$(b-a)(x-1)$]
63)	$27x^3+64$	[$(3x+4)(9x^2+16-12x)$]
64)	$x^2-12x-13$	[$(x+1)(x-13)$]
65)	$3ax+3xy+2a+2y$	[$(a+y)(3x+2)$]
66)	$2a^4-2a^3-12a^2$	[$2a^2(a+2)(a-3)$]
67)	$3a^3-2b^2+2a^2b-3ab$	[$(3a+2b)(a^2-b)$]
68)	$10a^2-4ab+15a-6b$	[$(5a-2b)(2a+3)$]
69)	x^3-2x^2+4x-3	[$(x-1)(x^2-x+3)$]
70)	$8ab-ax+2a^2-4bx$	[$(4b+a)(2a-x)$]
71)	$3x^5-81x^2$	[$3x^2(x-3)(x^2+3x+9)$]
72)	$y-2-x^2y+2x^2$	[$(x+1)(1-x)(y-2)$]
73)	$x^6-x^4+x^2-1$	[$(x+1)(x-1)(x^4+1)$]
74)	$x^2-4x^2y+4xy^2-y^2$	[$(x-y)(x+y-4xy)$]
75)	$(a+2)^2-1$	[$(a+1)(a+3)$]
76)	$3x^4-12ax^2+12a^2$	[$3(x^2-2a)^2$]
77)	$a^2(x+1)-2a(x+1)+x+1$	[$(x+1)(a-1)^2$]
78)	$4a^4+4-8a^2$	[$4(a+1)^2(a-1)^2$]
79)	$a^3-a^2b-ab-a$	[$a(a+1)(a-b-1)$]

80) $x^2 - y^2 - 3(x-y)^2$ [$2(2y-x)(x-y)$]

81) $x^6 + 16x^3 + 64$ [$(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$]

82) $a^4(x^2+1) - 2a^4$ [$a^4(x+1)(x-1)$]

83) $x^3 + x^2y - x - y$ [$(x-1)(x+1)(x+y)$]

84) $7x^4 - 7$ [$7(x-1)(x+1)(x^2+1)$]

85) $-2xb^2 - 4xb - 2x$ [$-2x(b+1)^2$]

86) $x^5 - 10x^4 + 25x^3$ [$x^3(x-5)^2$]

87) $2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2$ [$(x+y)(2+x+y)$]

88) $a^3 - 6a^2 - a + 30$ [$(a+2)(a-3)((a-5))$]

89) $x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$ [$(x+y)^3(x-y)$]

90) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ [$(x-2)^2(x-3)$]

91) $x^2 - 9 + 6a - a^2$ [$(x-a+3)(x+a-3)$]

92) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ [$(2x+1)^3$]

93) $3b^2 + b - 10$ [$(b+2)(3b-5)$]

94) $9x^2 - (x-5)^2$ [$(2x+5)(4x-5)$]

95) $x^3 + 27y^3$ [$(x+3y)(x^2+9y^2-3xy)$]

96) $\frac{x^4}{4} + x^2 + 1$ [$\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^2$]

97) $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4ac + 4bc$ [$(a-b-2c)^2$]

98) $a^4 - 5a^2 + 4$ [$(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$]

99) $\frac{1}{4}a^4 + a^2 + 1 - b^2$ [$\left(\frac{1}{2}a^2+1-b\right)\left(\frac{1}{2}a^2+1+b\right)$]

Problemi

100) Considera la somma di due numeri dispari consecutivi. Cosa osservi?
Puoi dimostrare che la somma di due numeri dispari consecutivi è sempre un multiplo di 4?

101) Considera la differenza tra il quadrato di un numero dispari e 1. Cosa osservi?
Come puoi dimostrare che il numero che si ottiene è divisibile per 8?

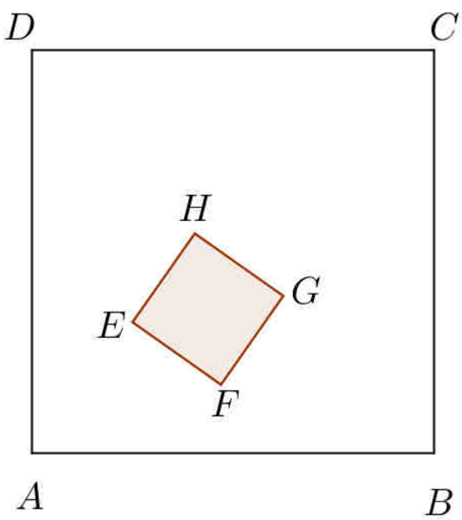
102) Il gioco "*Pensa un numero…*"
Il gioco è questo: si chiede a qualcuno di pensare un numero (intero) e poi gli si chiede di svolgere mentalmente queste operazioni:

- addiziona al numero 12
- moltiplica il risultato per 5
- sottrai 4 volte il numero pensato
- addiziona al risultato 40

Alla fine viene chiesto il risultato finale: sottraendo 100 da tale risultato si "indovina" il numero pensato in partenza.
Perché?
Prova a capirlo..
Suggerimento: indica con x il numero pensato e prova ad eseguire le operazioni indicate…

103) Un appezzamento di terreno è costituito da un quadrato ABCD e all'interno c'è uno stagno di forma quadrata EFGH.

Per recintare sia il perimetro esterno del terreno che il bordo dello stagno sono stati necessari 360m di rete; la recinzione di ABCD ha richiesto 280m di rete in più rispetto alla recinzione di EFGH. Qual è l'area della parte calpestabile dell'appezzamento?



$[6300m^2]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
CALCOLO LETTERALE: SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO

1. $x^2+xy+x+y$ $\quad [(x+y)(x+1)]$
2. $x^2+2xy+2x+4y$ $\quad [(x+2y)(x+2)]$
3. $6a+axy-3ay-2ax$ $\quad [a(x-3)(y-2)]$
4. $16a^2-36b^2$ $\quad [4(2a-3b)(2a+3b)]$
5. a^2+6a+9 $\quad [(a+3)^2]$
6. $2a^2+12a+18$ $\quad [2(a+3)^2]$
7. $a^2+6a+9-b^2$ $\quad [(a+3+b)(a+3-b)]$
8. $\frac{4}{9}a^2-b^2$ $\quad \left[\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(\frac{2}{3}a-b\right)\right]$
9. $x^2-xy+\frac{1}{3}ax-\frac{1}{3}ay$ $\quad \left[(x-y)\left(x+\frac{1}{3}a\right)\right]$
10. $3x(a-b)-2(a-b)$ $\quad [(a-b)(3x-2)]$
11. x^5-x^3 $\quad [x^3(x+1)(x-1)]$
12. $4a^2b^3-6ab^2$ $\quad [2ab^2(2ab-3)]$
13. $(x+y)^2-1$ $\quad [(x+y+1)(x+y-1)]$
14. $9a^2-9b^2$ $\quad [9(a+b)(a-b)]$
15. x^4-1 $\quad [(x^2+1)(x+1)(x-1)]$
16. $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$ $\quad [(2x-y)^3]$
17. x^3-y^3 $\quad [(x-y)(x^2+xy+y^2)]$
18. $27a^3+8$ $\quad [(3a+2)(9a^2-6a+4)]$
19. x^2-2x-8 $\quad [(x-2)(x+4)]$
20. x^2+5x+4 $\quad [(x+1)(x+4)]$

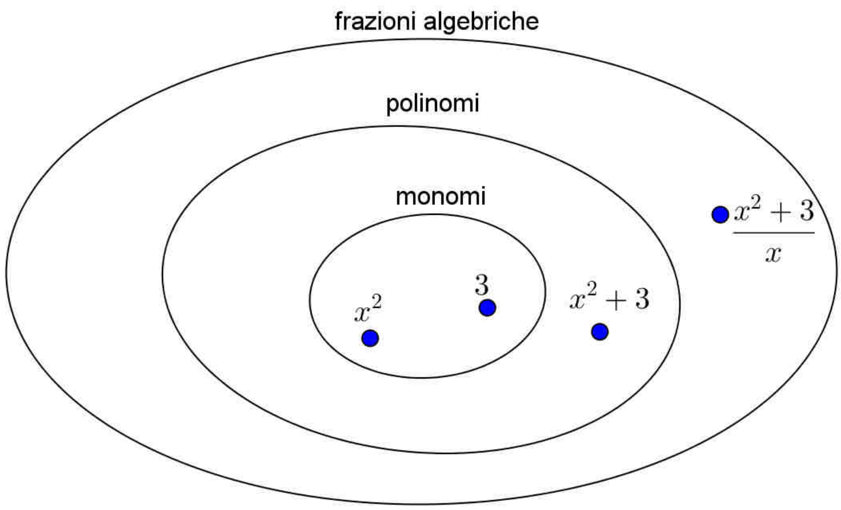
Le frazioni algebriche

Definizione: se A e B sono due polinomi e B è diverso dal polinomio nullo, $\frac{A}{B}$ viene detta frazione algebrica.

Esempio: $\frac{x^2-1}{x+3}$; $\frac{a^2+b^2}{3a-b}$; $\frac{x+1}{x}$

sono esempi di frazioni algebriche.

NOTA: ogni monomio o polinomio può essere considerato come una frazione algebrica il cui denominatore è il monomio 1.



L'insieme delle frazioni algebriche è un ampliamento dell'insieme dei polinomi.

Così come abbiamo imparato a semplificare, sommare, moltiplicare le frazioni numeriche vedremo come si possono semplificare, sommare ecc. le frazioni algebriche.

Per prima cosa però dobbiamo studiare la cosiddetta "condizione di esistenza" (C.E.) di una frazione algebrica: infatti abbiamo detto che il denominatore deve essere un polinomio diverso da zero e dobbiamo quindi escludere i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione.

Condizione di esistenza di una frazione algebrica

Una frazione algebrica perde significato per tutti i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione.
Determinare le "condizioni di esistenza" (abbreviato con C.E.) significa individuare i valori delle lettere che annullano il denominatore della frazione algebrica e per determinarli è necessario *risolvere un'equazione*.

Esempio 1

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{a+3}{5a-2}$ dobbiamo risolvere l'equazione $5a-2=0$ (per determinare il valore di a che annulla il denominatore).

Per risolvere l'equazione di primo grado $5a-2=0$

- si "sposta" il termine -2 cambiandolo di segno poiché se $5a-2=0$ è chiaro che $5a=2$;
- a questo punto si divide 2 per il coefficiente 5 , cioè si ha $a=\frac{2}{5}$.

Quindi il C.E. della frazione algebrica è : $a \neq \frac{2}{5}$

Esempio 2

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{b^2+1}{\frac{1}{2}b+3}$ dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{1}{2}b+3=0$. Abbiamo: $\frac{1}{2}b=-3 \rightarrow b=\frac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$ o direttamente $b=(-3)\cdot 2=-6$

Quindi il C.E. è : $b \neq -6$

Esempio 3

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{x+5}{x^2-4}$ dobbiamo risolvere l'equazione $x^2-4=0$. Se l'equazione è di grado superiore al primo dobbiamo prima di tutto scomporla : in questo caso abbiamo:

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

Quindi dobbiamo risolvere $\qquad (x+2)(x-2)=0$

Sappiamo che un prodotto è nullo quando almeno uno dei fattori è nullo e quindi

$$(x+2)=0 \rightarrow x=-2$$
$$(x-2)=0 \rightarrow x=2$$

In conclusione il C.E. è : $x \neq \pm 2$.

Esempio 4

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{a+3}{a^2+a}$ dobbiamo risolvere l'equazione $a^2+a=0$.
Anche in questo caso scomponiamo (mettendo in evidenza):

$$a^2+a=a(a+1)$$

Quindi dobbiamo risolvere

$$a(a+1)=0$$

Abbiamo :

$$a=0$$
$$a+1=0\to a=-1$$

e in conclusione il C.E. è: $a\neq 0; a\neq -1$

Esempio 5

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{b+4}{b^2-5b+6}$ dobbiamo risolvere l'equazione $b^2-5b+6=0$.
Scomponiamo il denominatore con Ruffini ed abbiamo $b^2-5b+6=(b-2)(b-3)$.

$$(b-2)(b-3)=0\to b=2,\quad b=3$$

In conclusione C.E. : $b\neq 2,\quad b\neq 3$

Esempio 6

Per determinare il campo di esistenza della frazione algebrica $\frac{y-2}{y^3-1}$ dobbiamo risolvere l'equazione $y^3-1=0$.

Poiché $y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$ abbiamo che $(y-1)(y^2+y+1)=0\to y=1$ (l'equazione y^2+y+1 non si scompone ulteriormente e quindi non ci sono altre soluzioni reali).

Quindi C.E: $y\neq 1$

Il calcolo con le frazioni algebriche

Semplificazione di una frazione algebrica

Come per le frazioni numeriche, dividendo numeratore e denominatore di una frazione algebrica per uno stesso polinomio (diverso da zero) si ottiene una frazione algebrica equivalente.

Esempio: $\frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{x\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{x}$

(C.E. $x \neq 0$ e $x \neq -1$)

Attenzione: si semplificano i fattori della scomposizione del numeratore e del denominatore e **mai gli addendi**!

$\frac{x^2 - \cancel{1}}{x - \cancel{1}}$ ERRORE GRAVE!

Somma algebrica

Per sommare due o più frazioni algebriche bisogna prima di tutto ridurle allo stesso denominatore (come per le frazioni numeriche).

Esempio:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+2} = ?$$

Dobbiamo prendere come denominatore comune il m.c.m. dei denominatori, in questo caso $(x-1)(x+2)$

$$\frac{x(x+2)+1(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)}$$

Importante: per determinare il mc.m. dei denominatori delle frazioni algebriche da sommare occorre scomporli.

Esempi

1) $$\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x-1}=\frac{2+1(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

2) $$\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{x^2}=\frac{x+2(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{3x+2}{x^2(x+1)}$$

3) $$\frac{2}{a^2+2ab+b^2}+\frac{a}{2a+2b}=\frac{2}{(a+b)^2}+\frac{a}{2(a+b)}=\frac{4+a(a+b)}{2(a+b)^2}=\frac{a^2+ab+4}{2(a+b)^2}$$

4) $$\frac{3x}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{3x-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dots$$

5) $$\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)}=\frac{1-(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{3-x}{(x-2)^2}$$

6) $$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x^2-9}-\frac{x}{2x+6}=\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)(x+3)}-\frac{x}{2(x+3)}=\frac{2(x+3)+4-x(x-3)}{2(x-3)(x+3)}=\dots$$

7) $$\frac{1}{a^2+ab+2a+2b}-\frac{2}{a^2+4a+4}+\frac{b}{3a+3b}=$$

$$\frac{1}{\underbrace{a(a+b)+2(a+b)}_{(a+b)(a+2)}}-\frac{2}{(a+2)^2}+\frac{b}{3(a+b)}=$$

$$\frac{3(a+2)-6(a+b)+b(a+2)^2}{3(a+b)(a+2)^2}=\dots$$

Moltiplicazione

Il prodotto di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}}$$

Esempi

1) $$\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x}{x-3}=\frac{(x-1)x}{(x+2)(x-3)}$$ (C.E. $x\neq -2$ e $x\neq 3$)

2) $$\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{x+2}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x+2}$$

NOTA: prima di moltiplicare conviene scomporre numeratore e denominatore delle frazioni algebriche per effettuare eventuali semplificazioni.

Divisione

Il quoziente di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione per la reciproca della seconda.

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}}$$ ($B\neq 0$; $D\neq 0$; $C\neq 0$)

Esempio

$$\frac{x}{x^2-1}:\frac{x}{2x+2}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}:\frac{x}{2(x+1)}=$$ (C.E. $x\neq \pm 1$ e $x\neq 0$)

$$=\frac{\cancel{x}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}}=\frac{2}{x-1}$$

Potenza

$$\boxed{\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}}$$

Esempio $$\left(\frac{a+b}{a^2+3b}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{(a^2+3b)^2}$$

ESERCIZI

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche

1) $\dfrac{2}{3x+6}$; $\dfrac{1}{2x-2}$; $\dfrac{2x+3}{2x+4}$; $\dfrac{a}{a^2+a}$

2) $\dfrac{3x}{x^2+1}$; $\dfrac{x}{x^2-1}$; $\dfrac{5}{4-x^2}$; $\dfrac{1}{9-b^2}$

3) $\dfrac{2}{a^2-2a+1}$; $\dfrac{2a+3}{a^2+4a}$; $\dfrac{1}{2b^2+3b}$; $\dfrac{1}{a^2-b^2}$

4) $\dfrac{1}{x^2-5x}$; $\dfrac{2x}{x+y}$; $\dfrac{5}{x^2-y^2}$; $\dfrac{b}{x^2-4a^2}$

5) $\dfrac{1}{x^2+4}$; $\dfrac{x}{x^3+1}$; $\dfrac{5}{x^2}$; $\dfrac{1}{x^4-16}$

Dopo aver determinato C.E. semplifica le seguenti frazioni algebriche

6) $\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-12}$ [C.E. $x \neq -2$ e $x \neq 2$; $\dfrac{x-2}{3(x+2)}$]

7) $\dfrac{2x-2y}{y-x}$ [C.E. $x \neq y$; -2]

8) $\dfrac{x^2-x}{x-1}$ [C.E. $x \neq 1$; x]

9) $\dfrac{x^2+3x}{3x}$ [C.E. $x \neq 0$; $\dfrac{x+3}{3}$]

10) $\dfrac{9a^2-9}{3a+3}$ [C.E. $a \neq -1$; $3(a-1)$]

11) $\dfrac{ay+ax+2y+2x}{4ay+4ax}$ [C.E. $a \neq 0$ e $x \neq -y$; $\dfrac{a+2}{4a}$]

12) $\dfrac{4x^2-4x+1}{2ax+2x-a-1}$ [C.E. $a \neq -1$ e $x \neq \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2x-1}{a+1}$]

13) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ [C.E. $x \neq -1$ e $x \neq 2$; $\dfrac{x+2}{x+1}$]

14) $\dfrac{a^4-16}{2a^2+8}$ [C.E. $\forall a$; $\dfrac{a^2-4}{2}$]

15) $\dfrac{ax-x+3a-3}{x^2+4x+3}$ [C.E. $x \neq -3$ e $x \neq -1$; $\dfrac{a-1}{x+1}$]

16) $\dfrac{y^2-9}{y^3-3y^2}$ [C.E. $y \neq 0$ e $y \neq 3$; $\dfrac{y+3}{y^2}$]

17) $\dfrac{x^3+4x^2+4x}{4-x^2}$ [C.E. $x \neq -2$ e $x \neq 2$; $\dfrac{x(x+2)}{2-x}$]

18) $\dfrac{x^2y-4y}{-2y-xy}$ [C.E. $y \neq 0$ e $x \neq -2$; $2-x$]

19) $\dfrac{a^2-10a+25}{a^2-25}$ [C.E. $a \neq -5$ e $a \neq 5$; $\dfrac{a-5}{a+5}$]

20) $\dfrac{6x^3-6xy^2}{x^2+xy}$ [C.E. $x \neq 0$ e $x \neq -y$; $6(x-y)$]

21) $\dfrac{2x^3+2}{x^3+x^2+x+1}$ [C.E. $x \neq -1$; $\dfrac{2(x^2-x+1)}{x^2+1}$]

22) $\dfrac{a^3-3a^2+4}{a^2-a-2}$ [C.E. $a \neq -1$ e $a \neq 2$; $a-2$]

23) $\dfrac{8y^2-8}{4ay+12y+4a+12}$ [C.E. $a \neq -3$ e $y \neq -1$; $\dfrac{2(y-1)}{a+3}$]

Esegui le seguenti somme algebriche (supponi che siano verificate le condizioni di esistenza)

24) $\frac{2}{a^2b}+\frac{3b}{ab^2}-1$ $[\frac{2+3a-a^2b}{a^2b}]$

25) $\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a^2-1}$ $[\frac{a^2-a+1}{(a-1)(a+1)}]$

26) $\frac{a}{a+1}+\frac{a^2-ab+2a}{ab-a+b-1}-\frac{b}{1-b}$ $[\frac{a+b}{b-1}]$

27) $\frac{3a-b}{3a+b}-\frac{3a+b}{3a-b}$ $[-\frac{12ab}{9a^2-b^2}]$

28) $\frac{x+2}{x^2+x-2}+\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x-1}$ $[\frac{x}{x+2}]$

29) $\frac{x+3}{x^2-xy}+\frac{y-3}{xy-y^2}-\frac{2}{x-y}$ $[-\frac{3}{xy}]$

30) $\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{y^2-x^2}-\frac{xy-y^2}{2xy-x^2-y^2}$ $[\frac{x}{x-y}]$

31) $\frac{2}{x+2}+\frac{9x^2-3x}{3x^2+5x-2}+\frac{1}{-x-2}$ $[\frac{3x+1}{x+2}]$

32) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{6xy}{x^2-y^2}$ $[\frac{2xy}{x^2-y^2}]$

33) $\frac{4a+4a^2+1}{4a-8a^2}+a-\frac{4a^2+1}{4a}$ $[\frac{2a+3}{2-4a}]$

34) $\frac{2+x}{x+3}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}-\frac{x}{x+3}$ $[\frac{1}{2-x}]$

35) $\frac{a-1}{1+a}-\frac{2a^3+6}{a^3-a^2-a+1}+\frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}$ $[\frac{6}{a^2-1}]$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni algebriche (supponi che siano verificate le condizioni di esistenza)

36) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}\cdot\frac{2x-x^2}{2x}$ $\quad[-\frac{(x+2)}{2}]$

37) $\frac{4a^2}{a^2-x^2}\cdot\frac{x+a}{2a}$ $\quad[\frac{2a}{a-x}]$

38) $\frac{x^2-2x+1}{y^2}\cdot\frac{3y^3-3xy^3}{(1-x)^3}$ $\quad[3y]$

39) $\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+x-6}{3x-3}$ $\quad[\frac{x+3}{3x+6}]$

40) $\frac{2a^2+2a}{2a-1}\cdot\frac{6-12a}{a^2-a-2}$ $\quad[\frac{12a}{2-a}]$

41) $3x\cdot\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{2xy-x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy}$ $\quad[\frac{3x(y-x)}{x+y}]$

42) $\frac{b^3-8}{8+b^3}\cdot\frac{b+2}{4+2b+b^2}$ $\quad[\frac{b-2}{4-2b+b^2}]$

43) $\frac{3y-3x}{2b-a}\cdot\frac{a^2-4b^2}{2x-2y}$ $\quad[\frac{3(2b+a)}{2}]$

44) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^4-y^4}{x+y}$ $\quad[(x+y)(x-y)^2]$

45) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)$ $\quad[\frac{x}{x-1}]$

46) $\left(x-2+\frac{6}{x+3}\right)\cdot\frac{x^2+6x+9}{2x+6}\cdot\frac{1}{x+x^2}$ $\quad[\frac{1}{2}]$

47) $\frac{x^2-4y^2}{x}\cdot\left(\frac{1}{x-2y}+\frac{1}{2y+x}\right)$ $\quad[2]$

Esegui le seguenti divisioni di frazioni algebriche

48) $\frac{a^2+3a}{a-3}:\frac{a}{a^2-9}$ [C.E. $a\neq \pm 3$ e $a\neq 0$; $(a+3)^2$]

49) $\frac{a^2-b^2}{6ab}:\frac{a+b}{12a}$ [C.E. $a\neq 0$, $b\neq 0$ e $a\neq -b$; $\frac{2(a-b)}{b}$]

50) $\frac{x^2-1}{x}:\frac{x-1}{x^2}$ [C.E. $x\neq 0$ e $x\neq 1$; $x(x+1)$]

51) $\dfrac{\frac{x-2}{x^2-9}}{\frac{x+1}{x-3}}$ [C.E. $x\neq \pm 3$ e $x\neq -1$; $\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$]

52) $\dfrac{\frac{x^2+x}{x-2}}{\frac{x+1}{x^2-4}}$ [C.E. $x\neq \pm 2$ e $x\neq -1$; $x(x+2)$]

Potenze di frazioni algebriche

53) $\left(\frac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$ [$\frac{8}{(a+b)^3}$]

54) $\left(\frac{4a^2-4b^2}{2b-2a}\right)^2$ [$4(a+b)^2$]

55) $\left(x-\frac{xy}{x+y}\right)^2$ [$\frac{x^4}{(x+y)^2}$]

56) $\left(\frac{b}{b-1}\right)^2\cdot\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$ [$(b+1)^2$]

57) $\left(\frac{a^2+1}{a^2-3a-4}-\frac{a+1}{a-4}\right)^2$ [$\frac{4a^2}{(a-4)^2(a+1)^2}$]

Espressioni con frazioni algebriche

58) $\frac{2}{a}\cdot\left(\frac{a+b}{2b}+\frac{b}{a-b}\right):\frac{a^2+b^2}{ab-b^2}$ $[\frac{1}{a}]$

59) $\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2+x}:\left(x^2-4\right)$ $[\frac{1}{x(x-2)}]$

60) $\frac{1}{x}:\left(\frac{x-3y}{xy}+\frac{x+y}{x^2}-\frac{y^3-2xy^2}{x^2y^2}\right)$ $[\frac{y}{x}]$

61) $\left[\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x+y}{xy}$ $[1]$

62) $\frac{a}{a+1}:\left(\frac{2a-1}{a+3}-\frac{2a-5}{a+1}-\frac{14}{a^2+4a+3}\right)$ [impossibile, perché …]

63) $x(2x-1):\left(2x+\frac{1}{2x-2}+\frac{2x-1}{2x-2}\right)$ $[x-1]$

64) $\frac{x^2-3x}{x^2-1}:\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{3x-3}+\frac{9-x}{3x^2-3}\right)$ $[\frac{3x}{x-3}]$

65) $\left[\left(\frac{1}{1+b}+\frac{b}{1-b}\right):\left(\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1+b}\right)-a\right]:\left(1-a^2\right)$ $[\frac{1}{1+a}]$

66) $\left(\frac{6a}{a^2-9}+\frac{a}{a+3}+\frac{3}{3-a}\right)^3:\left(\frac{b}{b-2}+\frac{8}{4-b^2}-\frac{2}{b+2}\right)^4$ $[1]$

67) $\left(y^2+2y+1-\frac{1}{y^2-2y+1}\right):\left(\frac{y}{y-1}+y\right)$ $[\frac{y^2-2}{y-1}]$

68) $\left(\frac{x+2y}{2x-4y}+\frac{2y-x}{4y+2x}+\frac{8y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{8y}{x-2y}$ $[\frac{1}{2}]$

69) $\left(\frac{x-8}{x^2+5x-6}-\frac{2}{x+6}+\frac{2}{x-1}\right):\frac{1}{x^2-1}$ $[x+1]$

70) $\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)^2:\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x}{y}-1\right)^2:\left(\frac{x}{y}+1\right)+2+\frac{2x}{y}$ $[\left(\frac{x+y}{y}\right)^2]$

71) $\left[\left(x+\frac{1}{x+2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x+2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\frac{4}{x^2}\right]$

72) $\left(\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a-3}+1\right):\left(\frac{2a^2-1}{a^2-5a+6}-2\right)$ $\left[\frac{a^2-6a+7}{10a-13}\right]$

73) $\left(\frac{3}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right):\frac{1}{x^2+4x+4}$ $\left[\frac{2+x}{2-x}\right]$

74) $\left(\frac{a+2}{a^2-4a+4}-\frac{1}{a-2}\right):\left(\frac{a}{2-a}+1\right)$ $\left[\frac{2}{2-a}\right]$

75) $\left(\frac{b+2}{b^3-8}-\frac{1}{b^2+2b+4}\right)\cdot\left(\frac{b}{2}-1\right)$ $\left[\frac{2}{b^2+2b+4}\right]$

76) $\left(1-\frac{27}{27-x^3}\right):\left(\frac{1}{9+3x+x^2}-\frac{1}{6-2x}\right)$ $\left[\frac{2x^3}{x^2+5x+3}\right]$

77) $\left(\frac{1}{b^2-4}+\frac{1}{2-b}-\frac{2}{2+b}\right)\cdot\frac{b+2}{b-1}$ $\left[\frac{3}{2-b}\right]$

78) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-a^3}-1\right)$ $\left[\frac{1}{1-a}\right]$

79) $\left(\frac{3b-1}{2b-1}+\frac{b+1}{1-2b}\right):\frac{2b^2}{1-4b^2}$ $\left[\frac{(1-b)(2b+1)}{b^2}\right]$

80) $\left(\frac{1}{3x-y}-\frac{2}{y-3x}\right)\cdot(3x-y)^2$ $[\,3(3x-y)\,]$

81) $\left(\frac{1}{x-2y}+\frac{2}{2x+y}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$ $[\,0\,]$

82) $\left(\frac{6a}{9a^2-1}-\frac{1}{3a+1}-\frac{1}{3a-1}\right)\cdot\left(\frac{2}{a+1}-3\right)$ $[\,0\,]$

83) $\left(\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}\right):\frac{4x^2}{1-3x}$ $\left[-\frac{3}{x(3x+1)}\right]$

84) $(2-x)^2\cdot\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}\right):\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)$ $\left[\frac{x-2}{x+2}\right]$

85) $\left(\frac{2a^2}{a^3-8}-\frac{a+2}{a^2+2a+4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot\frac{8-a^3}{4}$ $\left[\frac{a}{2}\right]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
FRAZIONI ALGEBRICHE

Semplifica le seguenti frazioni algebriche , dopo aver determinato il C.E:

1. $\dfrac{a^2-2a}{a-2}$ $\qquad [a \neq 2; \quad a \quad]$

2. $\dfrac{x}{2x^2-x}$ $\qquad \left[x \neq 0; \ \dfrac{1}{2} \quad ; \quad \dfrac{1}{2x-1}\right]$

3. $\dfrac{x^3-x^2}{4x^2y}$ $\qquad \left[x \neq 0; \quad y \neq 0 \quad ; \dfrac{x-1}{4y} \quad \right]$

4. $\dfrac{4a^2-4}{2a+2}$ $\qquad [a \equiv -1; \quad 2(a-1)]$

Svolgi i calcoli e semplifica il risultato:

1. $\dfrac{3}{3x+3}-\dfrac{x-1}{1-x^2}-3$ $\qquad \left[-\dfrac{(3x+1)}{x+1}\right]$

2. $\dfrac{2+x}{x+3}-\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}-\dfrac{x}{x+3}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{2-x}\right]$

3. $\dfrac{x^2-2x+1}{y^2}\cdot\dfrac{3y^3-3xy^3}{(1-x)^3}$ $\qquad [3y]$

4. $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}:\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{3x-3}+\dfrac{9-x}{3x^2-3}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{3x}{x-3}\right]$

5. $\left[\left(\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{b}{1-b}\right):\left(\dfrac{1}{1-b}-\dfrac{b}{1+b}\right)-a\right]:\left(1-a^2\right)$ $\qquad \left[\dfrac{1}{1+a}\right]$

6. $\left(\dfrac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$ $\qquad \left[\dfrac{8}{(a+b)^3}\right]$