

Introduzione al calcolo delle probabilità



Eventi certi, impossibili, aleatori

Supponiamo di lanciare un dado e consideriamo i seguenti “eventi”:

$E_1 = \{ \text{esce un numero compreso tra 1 e 6 (estremi inclusi)} \}$

$E_2 = \{ \text{esce il numero 7} \}$

$E_3 = \{ \text{esce il numero 2} \}$

L’evento E_1 è “**certo**”: infatti lanciando un dado possono uscire i numeri da 1 a 6.

L’evento E_2 è “**impossibile**”.

L’evento E_3 è possibile ma non è certo e viene detto “**aleatorio**”.

Il termine “aleatorio” deriva da “**alea**” che in latino significa proprio “dado” e per gli antichi il lancio del dado era il tipico esempio di situazione casuale.

Nota

Il calcolo delle probabilità è nato proprio in relazione ai giochi di dadi e vedremo come Galileo fu interpellato da alcuni giocatori del “gioco dei tre dadi”.

È chiaro però che non tutti gli eventi aleatori hanno la stessa “probabilità” di accadere (di verificarsi). Se per esempio considero $E_4 = \{ \text{esce un numero pari} \}$, scommettereste su $E_3 = \{ \text{esce il numero 2} \}$ o su E_4 ?

È chiaro che l’evento E_4 ha più probabilità di verificarsi di E_3 : infatti se consideriamo che i casi possibili nel caso del lancio di un dado non truccato sono l’uscita dei numeri 1,2,3,4,5,6 vediamo che perché accada E_3 ho solo un caso favorevole {2} mentre perché si verifichi E_4 ho i tre casi favorevoli {2} {4} {6}.

Ma come è definita la probabilità di un evento E ?

Probabilità di un evento E

Definizione “classica”

La probabilità (classica) di un evento E è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli ad E e il numero dei casi possibili (tutti ugualmente possibili)

$$p(E) = \frac{n^\circ \text{ casi favorevoli}}{n^\circ \text{ casi possibili}}$$

Nel nostro esempio

$$\begin{aligned} p(E_1) &= 1 && \text{(evento certo)} \\ p(E_2) &= 0 && \text{(evento impossibile)} \\ p(E_3) &= \frac{1}{6} \\ p(E_4) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

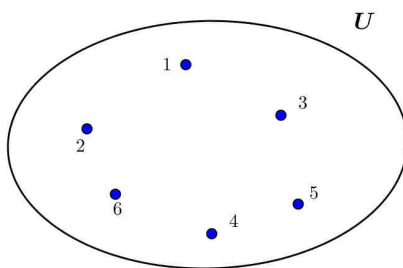
Osserviamo che essendo $n^\circ \text{ casi favorevoli} \leq n^\circ \text{ casi possibili}$ si ha che la probabilità di un evento E è un numero compreso tra 0 e 1

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Eventi ed insiemi

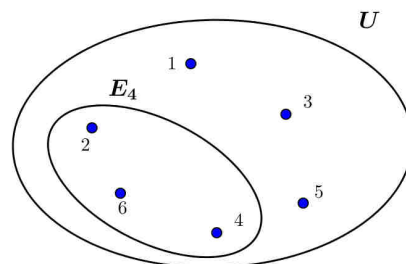
Possiamo rappresentare gli eventi utilizzando gli insiemi.

Considerando sempre il lancio di un dado, l'insieme di tutti gli eventi “elementari” (chiamato insieme universo U) sarà:



L'evento E_4 sarà rappresentato da un sottoinsieme di U

$$E_4 = \{2, 4, 6\}$$



Poiché $E_1 \equiv U$ si ha che E_1 è l'evento certo;
 $E_2 = \Phi$ si ha che E_2 è l'evento impossibile.

Definizione “frequentista”

La definizione che abbiamo dato della probabilità di un evento viene detta definizione “classica” e presuppone che gli eventi “elementari” siano tutti ugualmente possibili cioè, per esempio nel lancio di un dado, che il dado non sia truccato.

Ma se il dado fosse truccato?

(mettendo una massa attaccata ad una faccia sarà più probabile l’uscita della faccia opposta rispetto alle altre).

In questo caso potrei lanciare il dado moltissime volte e annotare il numero di volte che è uscita ciascuna faccia.

Esempio

	1	2	3	4	5	6
numero volte che è uscito in 100 lanci	52	10	12	9	13	4
frequenza relativa f dell’uscita del numero	$\frac{52}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{4}{100}$

Potrei in questo caso considerare la frequenza relativa $f(E)$ come una valutazione della probabilità dell’evento E .

Si può verificare che al crescere del numero N delle prove (nel nostro caso lanci del dado) il valore $f(E)$ tende a stabilizzarsi intorno ad un valore ben preciso e definiamo **probabilità statistica** o **frequentista** la frequenza relativa dell’evento calcolata effettuando un numero N molto grande di prove (nelle stesse condizioni).

Naturalmente occorre supporre che sia possibile fare molte prove tutte nelle stesse condizioni e questo a volte non è possibile.

Qual è per esempio la probabilità che oggi piova?

Oppure qual è la probabilità che un dato cavallo vinca una data corsa?

In relazione alle informazioni che abbiamo (possiamo per esempio aver consultato le previsioni metereologiche oppure conoscere le precedenti prestazioni del cavallo) esprimeremo la probabilità di un evento come “**grado di fiducia**” sul verificarsi di quell’evento.

Vediamo meglio cosa si intende.

Definizione “soggettiva”
Misura del “grado di fiducia”

La probabilità soggettiva di un evento E è data dal rapporto tra la somma r che sono disposto a “rischiare” su E (che quindi perdo se l’evento non si verifica) per vincere una somma $s = r + g$ (g rappresenta il guadagno) nel caso che E si verifichi.

$$p(E) = \frac{r}{s} \quad \text{con} \quad s = r + g$$

Nota

Anche in questo caso la probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1.

Se sono certo che E non può verificarsi non rischierò niente ($r=0$) e quindi la probabilità associata risulta nulla.

D’altra parte è chiaro che mi aspetti di non guadagnare niente ($g=0$) scommettendo su un evento certo e in questo caso la probabilità associata a questo evento risulterà 1.

Esempio

Quando, nelle corse dei cavalli, gioco un cavallo 5 a 1 vuol dire che il guadagno sarà 5 volte la somma che rischio (se rischio 1 euro guadagnerò 5 euro) e quindi vuol dire che valuto la probabilità di vittoria di quel cavallo:

$$p(\text{vittoria cavallo}) = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

Osservazione

Naturalmente se scommetto su un evento E di cui posso calcolare la probabilità secondo la definizione classica, il gioco sarà “equo” se il valore $\frac{r}{s}$ corrisponde alla valutazione “classica”.

Se per esempio scommettiamo su $E = \{ \text{esce il numero 6 nel lancio di un dado} \}$, se rischiamo $r=1$ euro dovrà essere $s = 6$ euro (cioè $g = 5$ euro) poiché la probabilità dell’evento E risulta, secondo la valutazione classica, $\frac{1}{6}$.

Negli esempi seguenti tratteremo eventi di cui si può valutare la probabilità secondo la definizione classica.

Evento contrario

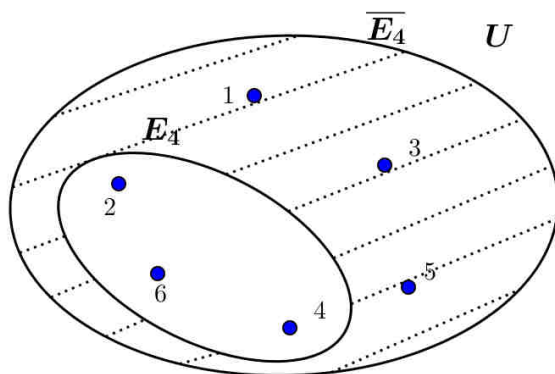
Se E è un evento indicheremo con \bar{E} l'evento contrario.

Per esempio se considero

$$E_4 = \{ \text{nel lancio di un dado esce un numero pari} \}$$

avremo $\bar{E}_4 = \{ \text{nel lancio di un dado **non** esce un numero pari} \}$

Da un punto di vista insiemistico l'evento contrario \bar{E} è rappresentato dall'insieme complementare di E (rispetto all'insieme universo U)



È chiaro quindi che $p(\bar{E}) = \frac{n^\circ \text{ casi possibili} - n^\circ \text{ casi favorevoli ad } E}{n^\circ \text{ casi possibili}} = 1 - p(E)$

Problema *Lancio di due dadi*

Consideriamo il lancio di due dadi (non truccati): possiamo avere

(1,1)	(1,2)	...	(1,6)
(2,1)	(2,2)	...	(2,6)
.			.
.			.
.			.
(6,1)	(6,2)	...	(6,6)



L'evento (1,2) è diverso dall'evento (2,1): per non confondere i due dadi possiamo pensare che siano di colori diversi, quindi l'uscita della coppia 1-2 può avvenire in due modi diversi.

Ci sono quindi 36 eventi elementari. Qual è la probabilità di $E_1 = \{ \text{nel lancio di due dadi esce il doppio 6} \}$?

È chiaro che $p(E_1) = \frac{1}{36}$ (se facessi una scommessa lo giocherei 35 a 1).

Qual è la probabilità di avere una certa somma S ?

- $p(S = 2) = ?$

Per avere somma 2 devo avere (1,1) e questo è l'unico caso favorevole.

Quindi $p(S = 2) = \frac{1}{36}$

- $p(S = 3) = ?$

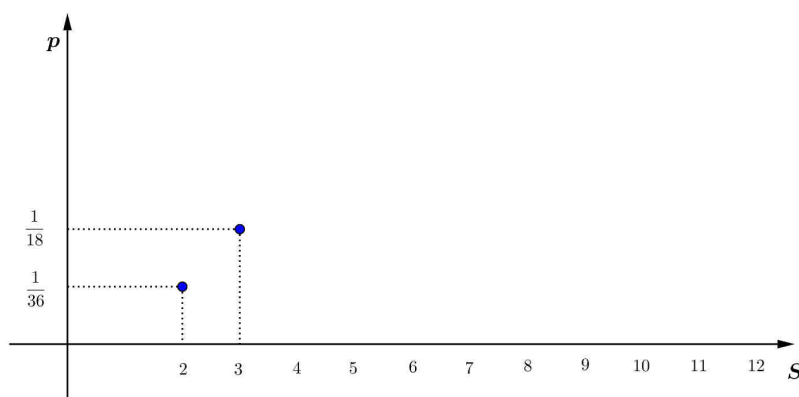
Posso ottenere somma 3 in due casi: (1,2) (2,1) e quindi

$p(S = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ecc...

Esercizio: qual è la somma S più probabile?

Prova anche a fare un “grafico” in cui sull'asse delle ascisse metti i valori di S che si possono ottenere e sull'asse delle ordinate le corrispondenti probabilità.



Questo grafico rappresenta la “*distribuzione di probabilità*” della somma S .

Esercizio: nella storia del calcolo delle probabilità è curioso ricordare che dei giocatori incalliti chiesero a Galileo su quale somma convenisse scommettere **lanciando tre dadi**. Tu cosa consiglieresti?

ESERCIZI

1) Lanciando due volte una moneta, qual è la probabilità che esca per due volte testa?

$$\left[\frac{1}{4} \right]$$

2) Nel gioco del “pari-dispari” (che consiste nell’aprire alcune dita della mano e sommare i punti dei due giocatori) è indifferente scommettere sul pari o sul dispari ?

[solo se si decide che si può “gettare” il pugno chiuso]

3) Lanciando tre volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere almeno una volta croce? (puoi pensare che sia l’evento contrario di “esce sempre testa”...)

$$\left[\frac{7}{8} \right]$$

4) Estrahendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane qual è la probabilità che:

• sia un asso;

$$\left[\frac{1}{10} \right]$$

• sia una carta di picche;

$$\left[\frac{1}{4} \right]$$

• sia una figura;

$$\left[\frac{3}{10} \right]$$

• sia il “settebello”.

$$\left[\frac{1}{40} \right]$$

5) Lanciando due dadi qual è la probabilità che:

• escano numeri uguali

$$\left[\frac{1}{6} \right]$$

• escano due numeri pari

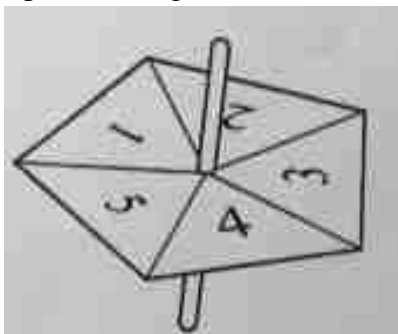
$$\left[\frac{1}{4} \right]$$

• escano due numeri primi

$$\left[\frac{1}{4} \right]$$

TEST PROBABILITY

- 1) Tom has 50 model cars. He has 10 blue cars and 19 red cars. He has no yellow cars.
- Tom chooses a car at random. Write down the probability that it is
 - red,
 - red or blue,
 - not blue,
 - yellow.
 - The probability that a car is damaged is $\frac{1}{50}$. How many cars are damaged?
- 2) The probability that FC Victoria wins the cup is 0.18. Work out the probability that they do **not** win the cup.
- 3) A whole number is picked at random from the numbers 1 to 200, inclusive.
- What is the probability that is **more than** 44? Give your answer as
 - a fraction in its lowest terms,
 - a decimal
 - What is the probability that the number is **at least** 180?
- 4) After training, the shirts are washed. There are 5 red, 3 blue and 6 green shirts. One shirt is taken from the washing machine at random. Find the probability that is
 - red
 - blue or green
 - white
- 5) Celine buys a bag of 24 tulip bulbs. There are 8 red bulbs and 5 white bulbs. All of the other bulbs are yellow. Celine chooses a bulb at random from the bag.
- Write down the probability that the bulb is red or white.
 - Write down the probability that the bulb is yellow.
- 6) Jonah uses a fair five-sided spinner in a game.



- What is the probability that the spinner lands on
 - 3,
 - an even number,
 - a number greater than 5?

b) Jonah spins the spinner 25 times and records the results in a frequency table.

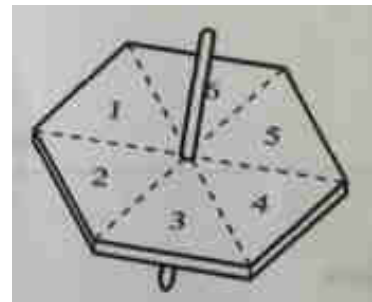
Number that the spinner lands on	Frequency
1	8
2	4
3	5
4	
5	2

- (i) Fill in the missing number.
 (ii) Write down the mode.

7) The diagram shows a six-sided spinner.

a) Amy spins a **biased** spinner and the probability she gets a two is $\frac{5}{36}$. Find the probability she

- (i) does not get a two,
 (ii) gets a seven,
 (iii) gets a number on the spinner that is less than 7.



b) Joel spins his blue spinner 99 times and gets a two 17 times.

Write down the relative frequency of getting a two with Joel's spinner.

c) The relative frequency of getting a two with Piero's spinner is $\frac{21}{102}$.

Which of the three spinners, Amy's, Joel's or Piero's, is most likely to give a two?

8) A bag contains 5 black beads, 7 white beads and 4 blue beads.

a) Mohini picks a bead at random. What is the probability that it is.

- (i) black,
 (ii) not black?

b) One of the 16 beads is lost. The probability that Mohini picks a black bead is now $\frac{1}{3}$.

What can you say about the colour of the lost bead?

9) a) The diagram shows 5 discs. One disc is chosen at random.



- (i) Which is most likely to be chosen?
 (ii) What is the probability that the number on the disc is even?
 (iii) What is the probability that the number on the disc is even and a factor of 20?

b) A disc is chosen at random from the discs with even numbers. What is the probability that the number on the disc is a factor of 20?