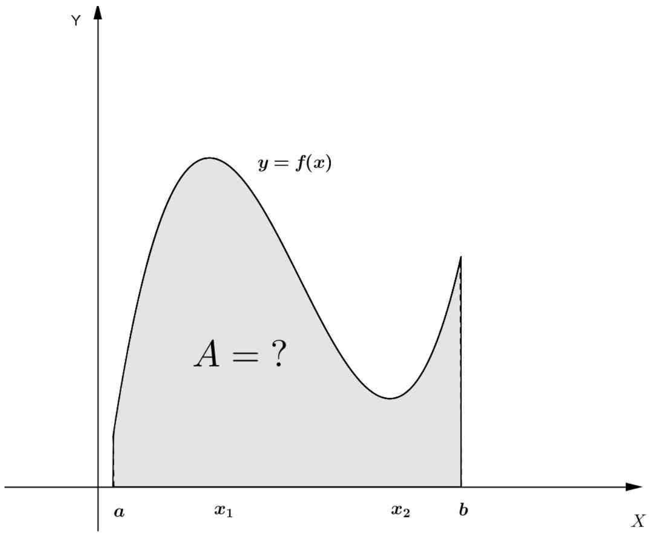
Integrali indefiniti

Il problema del calcolo dell'area del "sotto-grafico" di f(x)

Un problema importante, anche per le applicazioni in fisica, è quello del calcolo dell'area "sotto" al grafico di una funzione *f(x)* definita e continua in $[a,b]$ cioè tra l'asse x, il G_f e le rette $x=a$ e $x=b$.



Se la funzione è una retta di equazione $y=mx+q$, il calcolo si riduce a quello dell'area di un trapezio rettangolo, ma in generale come si può calcolare l'area A?

Si dimostra che questo problema è strettamente legato alla determinazione di una funzione **la cui derivata** sia uguale a *f(x)*.

Diventa quindi importante, per il calcolo dell'area A, saper determinare una funzione chiamata **"primitiva**" di *f(x)* cioè una funzione *F(x)* tale che $F'(x)=f(x)$.

Cominceremo quindi trattando questo problema.

Funzioni primitive

Definizione
F(x) si dice " primitiva" di f(x) se $F'(x) = f(x)$

Esempio
Quali sono le funzioni primitive di $f(x) = \cos x$?
Ricordando che $D(senx) = \cos x$ avrò che $F(x) = senx$ ma anche $y = senx + c$ (con $c \in R$) risulta funzione primitiva di $f(x) = \cos x$ poiché $D(senx + c) = \cos x$.

Quindi se F(x) è una primitiva di f(x) $\Rightarrow$ anche F(x) + c ($c \in R$) è una primitiva di f(x) ed ogni primitiva di f(x) è del tipo F(x) + c.

Definizione: l'insieme delle primitive di f(x) viene indicato con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

che si legge *integrale indefinito di f(x) in dx.*

Abbiamo quindi che se F(x) è una primitiva di f(x)

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ con } c \in R$$

e *f(x)* prende il nome di *funzione integranda*.

E' chiaro inoltre che $$D\left(\int f(x)dx\right) = D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$$

Osservazioni

1. $\boxed{\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx}$

Esempio: $\int 2\cos x dx = 2\int \cos x dx = 2senx + c$

Infatti $D(2senx + c) = 2 \cdot \cos x$

2. $\boxed{\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$

Esempio: $\int (x + \cos x)dx = \int x\ dx + \int \cos x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + senx + c$

Infatti $D\left(\frac{1}{2}x^2 + senx + c\right) = x + \cos x$

Integrali indefiniti immediati

1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \qquad con \qquad \alpha \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + c$ (*)

3) $\int senx\ \ dx = -\cos x + c$ $\qquad\qquad \int \cos x\ \ dx = senx + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = tgx + c$ $\qquad\qquad \int \frac{1}{sen^2 x}\ dx = -\cot gx + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsenx + c$ $\qquad\qquad \int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctgx + c$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\qquad\qquad$ (ricorda che $Da^x = a^x \cdot \ln a$)

$\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad\qquad$ (caso particolare per $a = e$)

(*) Nota $\qquad \ln|x| = \begin{cases} \ln x & x>0 \\ \ln(-x) & x<0 \end{cases} \Rightarrow D(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ -\frac{1}{x}\cdot(-1) & x<0 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

Esempi

1) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

2) $\int \frac{3}{x}\ dx = 3\int \frac{1}{x}\ dx = 3\ln|x| + c$

3) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\right) dx = tgx + senx + c$

$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4arcsenx + c$

4) $\int 2e^x dx = 2\int e^x dx = 2e^x + c$

Integrazioni basate sulla derivazione della funzione composta

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta, abbiamo:

1) $$\boxed{\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx = \frac{1}{\alpha+1}\cdot f^{\alpha+1}(x)+c \qquad \alpha\neq -1}$$

***Esempio 1*:** $\int sen^2 x\cdot\cos x\ dx = \frac{sen^3 x}{3}+c$

Infatti se deriviamo $D\left(\frac{sen^3 x}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot 3sen^2 x\cdot\cos x = sen^2 x\cdot\cos x$

Esempio 2: $\int\left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx$

Cerchiamo di riportarci al caso $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx$ osserviamo che $D\left(x^2+1\right)=2x$, mentre nella nostra funzione integranda abbiamo solo *x*. Per ottenere *f'(x)* moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int\left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx = \frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^3\cdot 2x\ dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+c$$

Esempio 3: $\int \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\ dx = \frac{\ln^3 x}{3}+c$

Esempio 4: $\int\sqrt{x+1}\ dx$

Osserviamo che $\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{1}{2}}$ e che $D(x+1)=1$, quindi

$$\int\sqrt{x+1}\ dx = \int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x}+c$$

Nota

Un caso significativo è : $$\boxed{\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\ dx = -\frac{1}{f(x)}+c}$$

2) $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c}$

Esempio 1: $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx$

Se ci accorgiamo che $D(x^2+x) = 2x+1$, abbiamo subito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\, dx = \int \frac{D(x^2+x)}{x^2+x}\, dx = \ln|x^2+x| + c$$

Esempio 2: $\int \frac{senx}{\cos x}\, dx$

In questo caso $D(\cos x) = -senx$ mentre noi abbiamo $senx$ possiamo. Possiamo "aggiustare" le cose così:

$$\int \frac{senx}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(-senx)}{\cos x} dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

3)

a) $\boxed{\int (senf(x)) \cdot f'(x)\, dx = -\cos(f(x)) + c}$

Esempio: $\int sen2x\, dx$

Se $f(x) = 2x$ allora $D(f(x)) = 2$.

Possiamo "aggiustare" le cose:

$$\int sen2x\, dx = \frac{1}{2}\int (sen2x) \cdot 2\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

b) $\boxed{\int (\cos f(x)) \cdot f'(x)\, dx = sen(f(x)) + c}$

Esempio: $\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

$$\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

c) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx = tg\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{3}{\cos^2 3x}\ dx = tg3x + c$

d) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}\ dx = -\cot g\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{x^2}{sen^2 x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{sen^2 x^3}dx = -\frac{1}{3}\cot gx^3 + c$

e) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\ dx = arcsen\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}arcsenx^2 + c$

f) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\ dx = arctg\left(f(x)\right)+c}$$

Esempio: $\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)}\ dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

4) $$\boxed{\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c}$$

$$\boxed{\int \left(e^{f(x)}\cdot f'(x)\right)\ dx = e^{f(x)}+c}$$

Esempio 1: $\int x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+1}+c$ notando che $D\left(x^2+1\right)=2x$

Esempio 2: $\int \cos x\cdot 3^{senx}dx = \frac{3^{senx}}{\ln 3}+c$

ESERCIZI
INTEGRALI INDEFINITI

1) $\int senx \cdot \cos x \; dx$

2) $\int senx \cdot \cos^4 x \; dx$

3) $\int (1+x)^4 dx$

4) $\int \sqrt{2x+1} \; dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$

6) $\int tgx \; dx$

7) $\int \cot gx \; dx$

8) $\int \frac{1}{2x+1} \; dx$

9) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

10) $\int \frac{e^x}{2e^x+5} \; dx$

11) $\int \cos 3x \; dx$

12) $\int \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

13) $\int \frac{1}{sen^2(3-x)} \; dx$

14) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

15) $\int sen^3 x \cdot \cos x \; dx$

16) $\int (2+x)^3 dx$

17) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

18) $\int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \; dx$

19) $\int \frac{1}{sen^2(2-x)} dx$

20) $\int \frac{1}{x^2+3} dx$

21) $\int e^{2x+1} dx$

22) $\int \frac{x}{x^2-2} dx$

23) $\int \frac{x-1}{x^2+5} dx$

24) $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$

25) $\int x \cdot (x^2-1)^3 dx$

26) $\int x \cdot \cos x^2 dx$

27) $\int sen 4x \; dx$

28) $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{sen^2 x}{2} + c$

2) $-\frac{\cos^5 x}{5} + c$

3) $\frac{(1+x)^5}{5} + c$

4) $\frac{1}{3} \cdot (2x+1) \cdot \sqrt{2x+1} + c$

5) $-\sqrt{1-x^2} + c$

6) $-\ln|\cos x| + c$

7) $\ln|senx| + c$

8) $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + c$

9) $\ln|\ln x| + c$

10) $\frac{1}{2}\ln(2 \cdot e^x + 5) + c$

11) $\frac{1}{3} sen3x + c$

12) $\frac{1}{4} sen\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

13) $\cot g(3-x) + c$

14) $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$

15) $\frac{sen^4 x}{4} + c$

16) $\frac{(2+x)^4}{4} + c$

17) $\frac{3}{2} arcsenx^2 + c$

18) $-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + c$

19) $\cot g(2-x) + c$

20) $\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

21) $\frac{1}{2} e^{2x+1} + c$

22) $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 2| + c$

23) $\frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + c\right)$

24) $\ln|e^x - 1| + c$

25) $\frac{1}{8}(x^2-1)^4 + c$

26) $\frac{1}{2} senx^2 + c$

27) $-\frac{1}{4}\cos 4x + c$

28) $\frac{1}{3}\ln|x^3 - 1| + c$