Problemi di massimo e minimo

Supponiamo di avere una funzione $f: [a; b] \rightarrow R$ continua in $[a; b]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.

I problemi di massimo e minimo sono problemi (di geometria piana o solida oppure di geometria analitica ecc.) in cui dobbiamo determinare una funzione (che per esempio esprime, in funzione di una variabile scelta x, un perimetro o un'area o un volume ecc.) e individuare il valore di x per cui la funzione assume il massimo o il minimo assoluto.

Poiché la variabile avrà una limitazione data dal tipo di problema, la funzione dovrà essere considerata in un dato intervallo.

Se la funzione è continua e l'intervallo è limitato, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluto.

Possiamo quindi procedere così:

- Calcolare la derivata della funzione che dobbiamo studiare

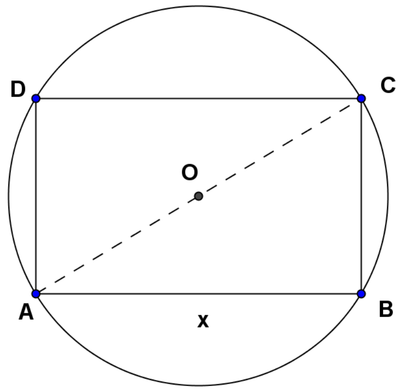
- Cercare i valori per cui si annulla e studiare il segno della derivata: individuare quindi i massimi e minimi relativi ed eventualmente "confrontarli" (confrontare le ordinate corrispondenti) per determinare il massimo o il minimo assoluto.

Attenzione: se la derivata non si annulla ed è per esempio sempre positiva cioè la funzione è crescente, è chiaro che il minimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo e il massimo nell'estremo destro.

Attenzione: controllare se ci sono punti di non derivabilità: nel caso ci siano le loro ordinate vanno confrontate con quelle dei massimi (minimi) relativi trovati.

Esempio 1

Determina, tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima.



Poniamo $x = \overline{AB}$.

Quindi avremo: $0 \leq x \leq 2r$

Poiché $\overline{BC} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ indicando con $A(x)$ l'area di $ABCD$ avremo:

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 2r$$

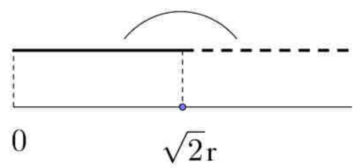
Poiché $A(x)$ è continua in $[0; 2r]$ per il teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto.

Calcoliamo quindi la derivata:

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}r$ ($x = -\sqrt{2}r$ non è accettabile)

$A'(x) > 0 \rightarrow 0 < x < \sqrt{2}r$



Quindi $x = \sqrt{2}r$ fornisce il massimo assoluto (non abbiamo trovato altri punti di massimo relativo).

Osserviamo che se $\overline{AB} = \sqrt{2}r$ $ABCD$ è un quadrato.

Quindi tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r , quello di area massima è il quadrato.

Nota

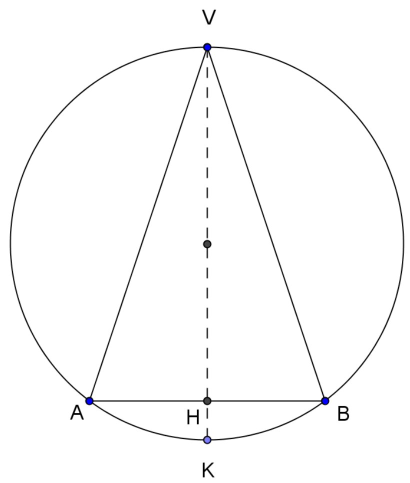
Per $x = 0$ o $x = 2r$ il rettangolo degenera in due diametri sovrapposti e sia ha area nulla (minimo assoluto).

Esempio 2

Determinare, tra i coni inscritti in una sfera di raggio r*, quello di massimo volume.*

Consideriamo una sezione. Avremo un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza.

Poniamo $\overline{VH} = x$: $0 \leq x \leq 2r$



Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo VAK: $\overline{AH}^2 = x(2r - x)$

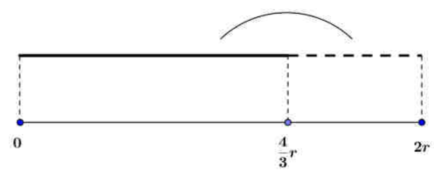
Quindi:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi x^2(2r - x) = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(4rx - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \to x = 0, \qquad x = \frac{4}{3}r$$

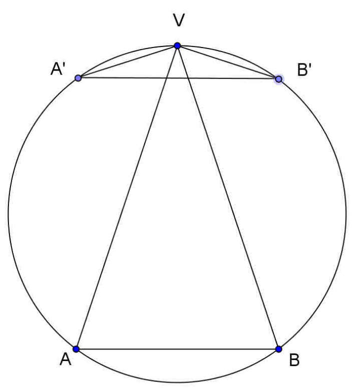
$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r$$



e quindi per $x = \frac{4}{3}r$ si ha il cono di volume massimo.

Osservazione

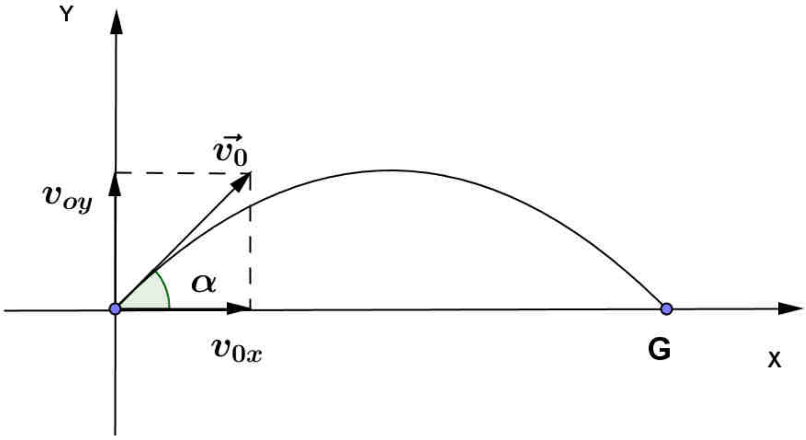
La scelta del segmento a cui associare x è importante. Scegliendo $\overline{VH} = x$ abbiamo individuato bene il cono (non ci sono coni inscritti diversi con la stessa altezza) mentre se avessimo scelto $\overline{AH}$ (o $\overline{AB}$) ad un dato valore dell'incognita corrispondevano generalmente due coni diversi.



In figura per esempio abbiamo lo stesso valore della base ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$) ma i triangoli sezione e quindi i coni sono diversi.

Esempio 3

Lanciando un corpo con velocità $\vec{v_0}$ inclinata di α rispetto all'orizzontale qual è, a parità di v_0 (intensità della velocità iniziale), l'angolo α per cui si ottiene la **massima gittata**?



Ricordiamo che per studiare il moto dobbiamo scomporlo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x} in direzione orizzontale e in un moto uniformemente decelerato (con decelerazione $g = 9{,}81\ m/s^2$) di velocità iniziale v_{0y} in direzione verticale.

$$\begin{cases} x = v_{ox} \cdot t \\ y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo t (lo ricaviamo dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda) e ponendo $y = 0$ trovo:

$$x_G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Quindi, poiché $v_{0x} = v_0 cos\alpha$ e $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ il problema si riconduce a determinare il massimo di:

$$f(\alpha) = \frac{2{v_0}^2 sen\alpha cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} sen2\alpha$$

Abbiamo quindi che $f(\alpha)$ è massima quando $sen2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ e quindi l'angolo per cui si ha la massima gittata risulta $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEMI
GEOMETRIA PIANA

1. Tra tutti i rettangoli di area assegnata a^2 determina quello di perimetro minimo.

$$[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = a \rightarrow quadrato]$$

2. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determina quello di area massima.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = \frac{p}{2} \rightarrow quadrato\right]$$

3. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata a determina quello di area massima.

$$\left[x = cateto \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow triangolo\ rettangolo\ isoscele\right]$$

4. Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.

$$\left[x = altezza\ relativa\ alla\ base \rightarrow x = \frac{3}{2}r \rightarrow triangolo\ equilatero\right]$$

5. Tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r determina quello di perimetro massimo.

$$[x = dimensione\ rettangolo \rightarrow x = r\sqrt{2} \rightarrow quadrato]$$

6. Tra i triangoli equilateri inscritti in un triangolo equilatero ABC di lato l, determina quello di area minima.

$$\left[trinagolo\ di\ lato\ \frac{l}{2}\right]$$

7. Tra tutti i triangoli iscritti in una semicirconferenza, trova quello di area massima.

[triangolo rettangolo isoscele]

8. Nell'insieme dei trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio r, determina quello di perimetro massimo.

[semiesagono regolare]

9. Fra tutti i rettangoli di data area, che misura a^2, determina quello la cui diagonale è minima.

[quadrato di lato a]

10. Tra tutti rettangoli di data diagonale, che misura d,determina quello di area massima.

[quadrato di lato $\frac{d}{\sqrt{2}}$]

PROBLEMI

GEOMETRIA SOLIDA

1. Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio r determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}r\right]$$

2. Tra i cilindri inscritti in un cono avente raggio di base r e altezza assegnata h, determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \frac{2}{3}r\right]$$

3. Tra i coni inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

$$\left[x = altezza\ del\ cono \rightarrow x = \frac{4}{3}r\right]$$

4. Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r, determina quello di minimo volume.

$$[x = distanza\ tra\ vertice\ cono - centro\ sfera \rightarrow x = 3r]$$

5. Tra i parallelepipedi rettangolari aventi per base un quadrato e un volume assegnato V, determina quello di superficie totale minima.

$$[cubo]$$

6. Tra i cilindri di superficie totale assegnata S determina quello di volume massimo.

$$[cilindro\ equilatero]$$

7. Una tipica lattina cilindrica ha volume fissato pari a 33 *cl*. Quali sono le dimensioni della lattina (altezza e diametro) che minimizzano il costo del metallo necessario a produrla, ossia la superficie totale della lattina?

[cilindro equilatero di diametro $2r = h = 2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ cm]

8. Tra i parallelepipedi rettangoli a base quadrata e diagonale di misura *d*, determina quello di volume massimo.

[cubo di lato $\frac{d}{\sqrt{3}}$]