Studio del grafico di una funzione

Iniziamo con la definizione di punto di massimo o minimo relativo di una funzione.

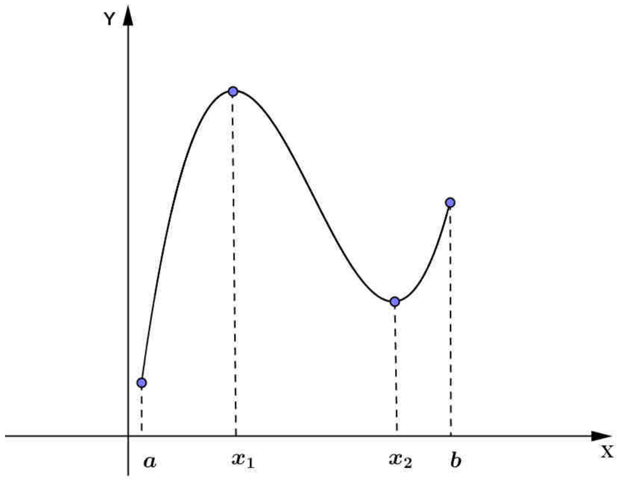
Definizione: $x_0 \in D_f$ è un punto di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Definizione: $x_0 \in D_f$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Nota: un punto di massimo (minimo) assoluto è anche un punto di massimo (minimo) relativo ma il viceversa non è vero.



a e x_2 sono punti di minimo relativo ; a è punto di minimo assoluto.

x_1 e b sono punti di massimo relativo e x_1 è punto di massimo assoluto.

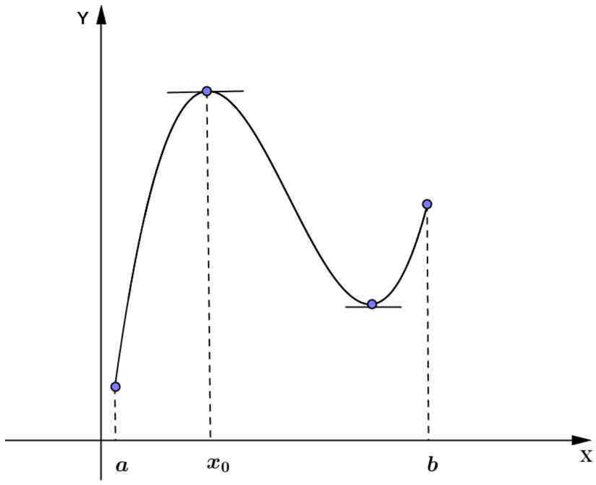
Per studiare il grafico di una funzione è fondamentale la ricerca di punti di massimo (minimo) relativi.

Per capire come possano essere individuati vediamo due teoremi riguardanti le funzioni derivabili di cui non faremo la dimostrazione ma ne daremo un'interpretazione "geometrica".

Partiremo dal **teorema di Fermat** riguardante i massimi (minimi) relativi interni al dominio (per es. x_1 e x_2 nel grafico dell'esempio precedente) in cui la funzione è derivabile e poi enunceremo il **teorema di Lagrange** che ci permetterà di dimostrare il legame tra l'"andamento" di una funzione (funzione crescente, decrescente) e il **segno della sua derivata**.

Teorema di Fermat

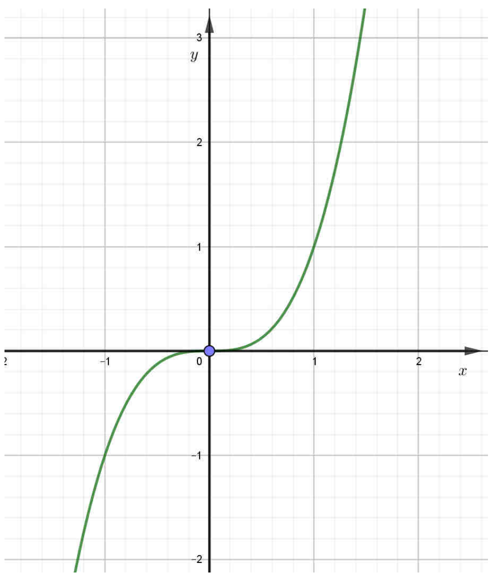
Sia $f:[a,b]\to\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b): se x_0 è un punto **di massimo o di minimo relativo interno al dominio** $\Rightarrow f'(x_0)=0$ (cioè la tangente al grafico è parallela all'asse x)



Osserviamo infatti che nei punti di massimo o minimo interni al dominio la tangente al grafico ha coefficiente angolare (derivata) uguale a zero perché è parallela all'asse x.

E' importante notare che se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo ma non è interno al dominio (per es. a e b nella figura) non è detto che in x_0 la derivata sia nulla.

Nota: il viceversa del teorema non è vero perché se in x_0 si ha $f'(x_0)=0$ significa che e x_0 potrebbe anche essere un punto in cui cambia la concavità del grafico cioè un punto detto "**punto di flesso**" a tangente orizzontale (vedi figura).

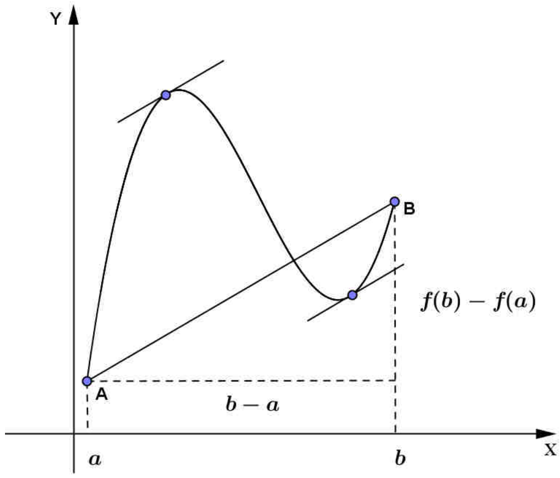


Teorema di Lagrange

Se $f:[a,b]\to\Re$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

$$\Rightarrow \exists \quad x_0 \in (a,b)\, tale \quad che\, f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interpretazione geometrica: osserviamo che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è l'inclinazione della retta passante per gli estremi del grafico e quindi il teorema afferma che esiste almeno un punto $P(x_0, f(x_0))$ in cui la tangente al grafico è parallela alla retta passante per gli estremi del grafico.



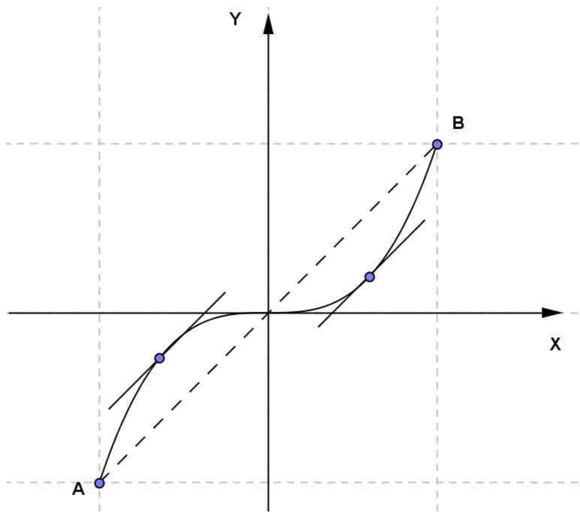
Esempio
Consideriamo $f(x)=x^3$ nell'intervallo $I=[-1,1]$.

- Verifica le ipotesi del teorema di Lagrange?
  Poiché $f(x)$ è continua e derivabile in $\Re$ lo è sicuramente anche in *I* e quindi verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
- Determina il punto x_0 (o i punti) : $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
  Nel nostro caso $f(-1)=-1 \quad f(1)=1$ e quindi, essendo $f'(x)=3x^2$ devo risolvere:

$$3x^2=\frac{1-(-1)}{2}$$

$$3x^2=1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

I valori sono interni all'intervallo *I* e quindi entrambi accettabili.
Graficamente infatti si verifica che esistono due punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta per $A(-1,-1)$ e $B(1,1)$



Corollari del teorema di Lagrange

Utilizzando il teorema di Lagrange si possono dimostrare i seguenti teoremi (corollari):

1) Se $f:[a,b]\to\Re$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b)
e $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x)=k$ cioè $f(x)$ è una funzione costante.

2) Se $f:[a,b]\to\Re$ e $g:[a,b]\to\Re$ sono continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e se

$$f'(x)=g'(x) \quad \forall x\in(a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)-g(x)=k \quad \forall x\in[a,b]$$

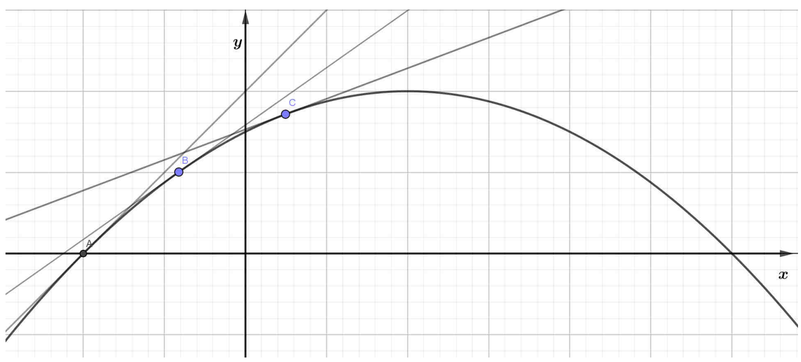
3) **Relazione tra il segno della derivata f'(x) e "andamento" della funzione**

Data $f:[a,b]\to\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) abbiamo che:

se $f'(x)>0 \quad \forall x\in(a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ è **crescente in** (a,b)

se $f'(x)<0 \quad \forall x\in(a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ è **decrescente** in (a,b)

Osservazione: infatti "geometricamente" si osserva che quando una funzione è crescente i coefficienti angolari delle tangenti sono positivi, mentre se è decrescente sono negativi (vedi figura).



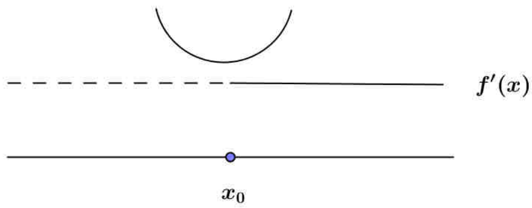
Nota
Osserviamo che se $f(x)$ è crescente in $[a,b] \Rightarrow f'(x)\geq 0$ poiché può esserci anche un flesso a tangente orizzontale.
Questo teorema è fondamentale per lo studio del grafico di una funzione poiché, come vedremo, ci permette di individuare i punti di massimo, minimo e flesso a tangente orizzontale.

Ricerca dei punti di massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale

Consideriamo un punto $x_0 \in D_f$ in cui $f'(x_0) = 0$, cioè un punto in cui la tangente è parallela all'asse x.
Potrebbe essere un punto di massimo o un punto di minimo o un punto di flesso a tangente orizzontale.

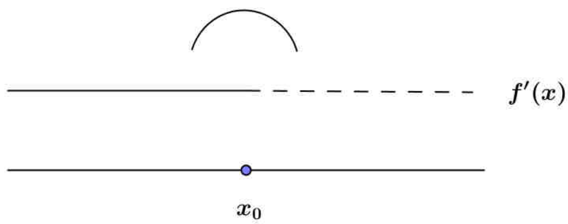
Per capirlo studiamo il segno di $f'(x)$.

1) Se il segno della derivata ha questo andamento



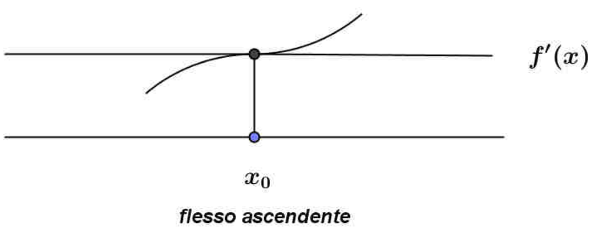
cioè negativo e poi positivo, poiché la $f(x)$ prima di x_0 decresce e poi cresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **minimo**.

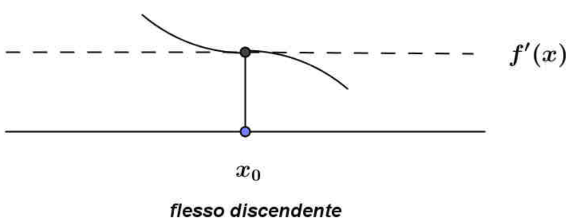
2) Se il segno della derivata ha questo andamento



la funzione prima di x_0 cresce e poi decresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **massimo**.

3) Se $f'(x)$ non cambia segno in $x_0 \Rightarrow x_0$ è un **punto di flesso a tangente orizzontale** (ascendente o discendente)





Flesso ascendente

Flesso discendente

Studio del grafico di una funzione

Esempio 1

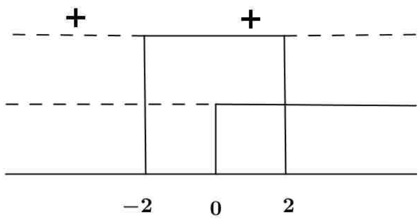
Proviamo a studiare il grafico di $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}}$

1) Per prima cosa determiniamo il dominio: $D_f=\Re\setminus\{\pm 2\}$

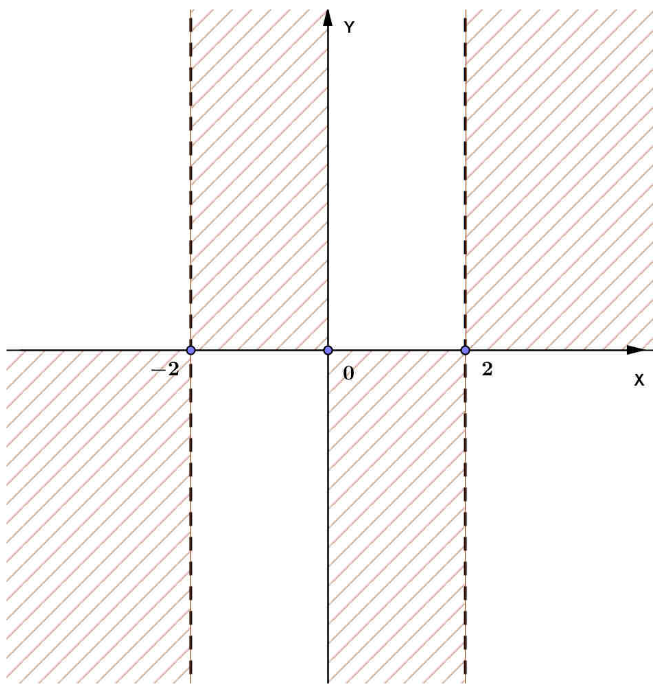
- Studiamo il segno della funzione per capire quando il grafico si trova sopra all'asse x e quando si trova sotto all'asse x.

  Studiamo: $\dfrac{x^3}{4-x^2}>0$

  Quindi $f(x)>0 \quad x<-2 \;\cup\; 0<x<2$



  Cominciamo ad eliminare con un leggero tratteggio le zone dove non si trova il grafico:



- Determiniamo le eventuali intersezioni con gli assi ponendo $x=0$ (se è nel dominio) e $y=0$.
  Nel nostro caso troviamo solo $(0;0)$
- Verifichiamo se la funzione è pari o dispari, cioè calcoliamo $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{4-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{4-x^2}=-f(x)\Rightarrow$ la funzione è dispari cioè il grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine.

2) Passiamo allo studio dei limiti e alla ricerca degli asintoti (se ci sono).
Nel nostro caso abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow x = -2 \text{ as. vert.} \qquad \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow x = 2 \text{ as.vert.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1 \quad (m) \\ \lim_{x\to\infty} f(x) + x = ... = 0 \quad (q)\end{array}\right\rangle \Rightarrow y = -x \text{ as. obliquo}$$

3) Calcoliamo adesso $f'(x)$, studiamo in quali punti si annulla e il suo segno:

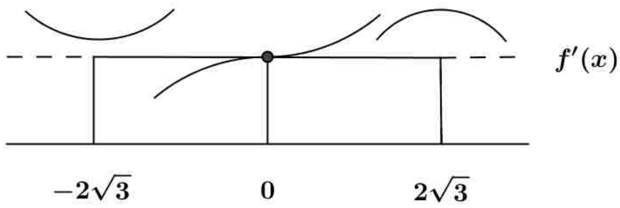
$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2\cdot(12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

Poniamo
$$f'(x) = 0$$
$$x^2(12-x^2) = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3}$$

Studiamo

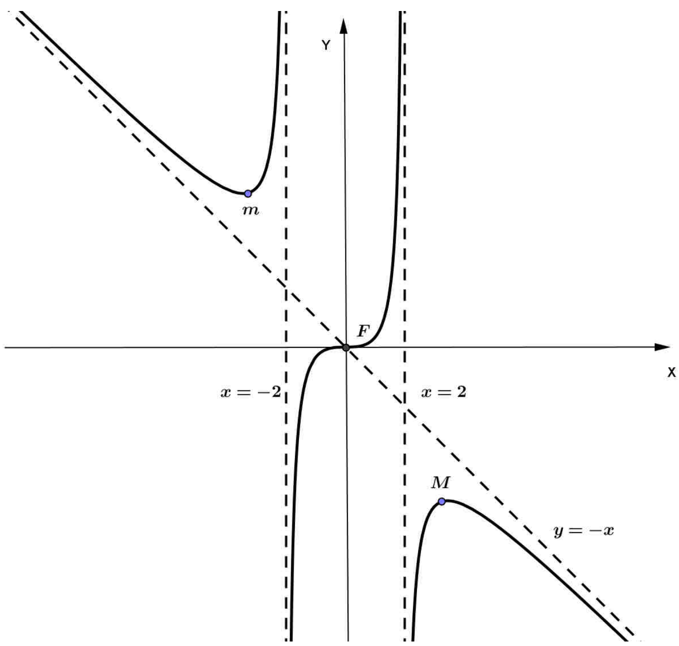
$$f'(x) > 0$$

$$\frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow \quad 12 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$$



$m\left(-2\sqrt{3}; f\left(-2\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}\right)$
$M\left(2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right)$
$F(0;0)$

Riportiamo i nostri risultati nel disegno: il grafico dovrà necessariamente avere il seguente andamento

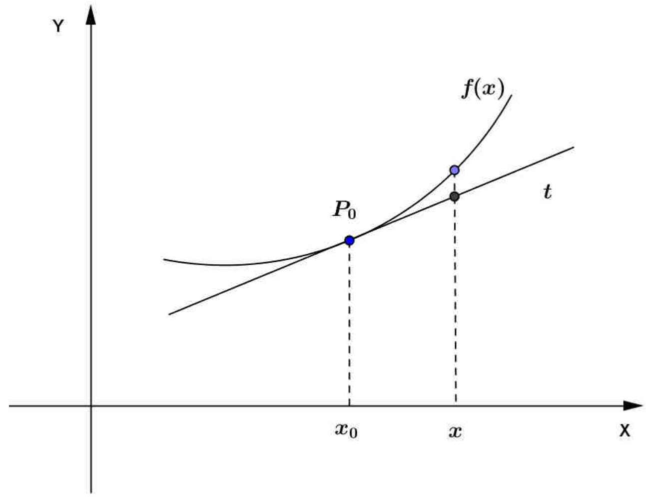


Concavità del grafico e derivata seconda

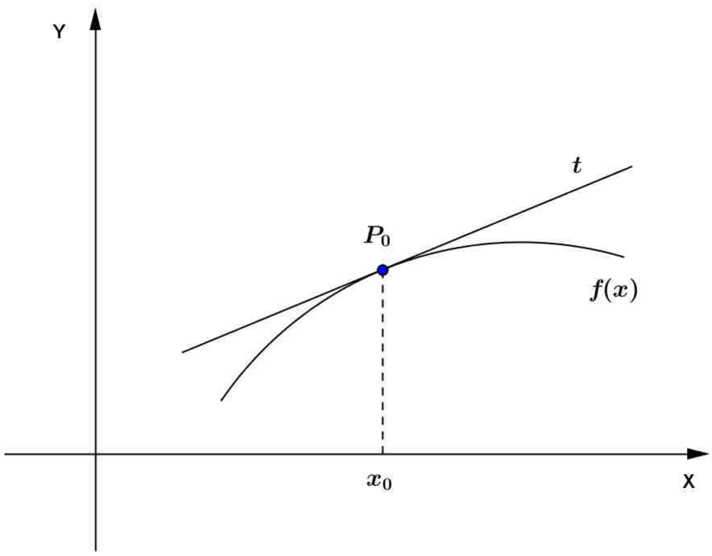
Nello studio di un grafico è importante determinare anche la "concavità" del grafico e i punti in cui c'è un cambio di concavità (punti di flesso).

Definiamo cosa si intende per "**concavità verso l'alto**" o "**verso il basso**" del grafico di una funzione in x_0:

Definizione: diciamo che in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sopra alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$



Definizione: diciamo che **in** x_0 **il grafico di** $f(x)$ **volge la concavità verso il basso** quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sotto alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$



Si può dimostrare che se $f(x)$ è continua in I con $f'(x), f''(x)$ continue e $x_0 \in I$:

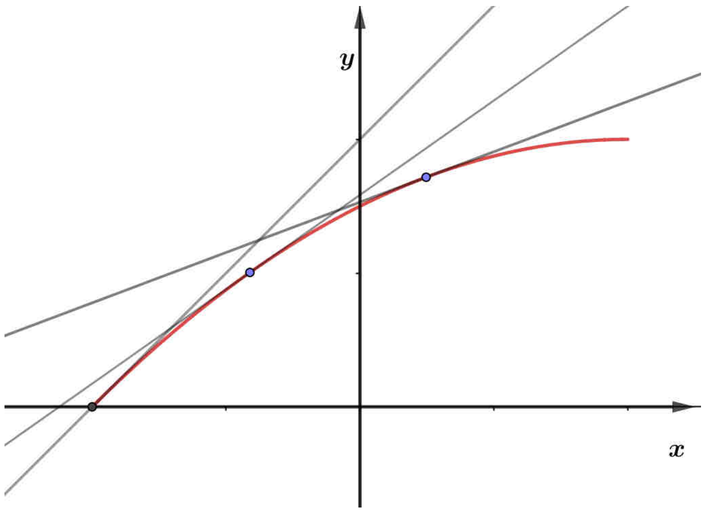
- Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la **concavità verso l'alto**.
- Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la **concavità verso il basso**.

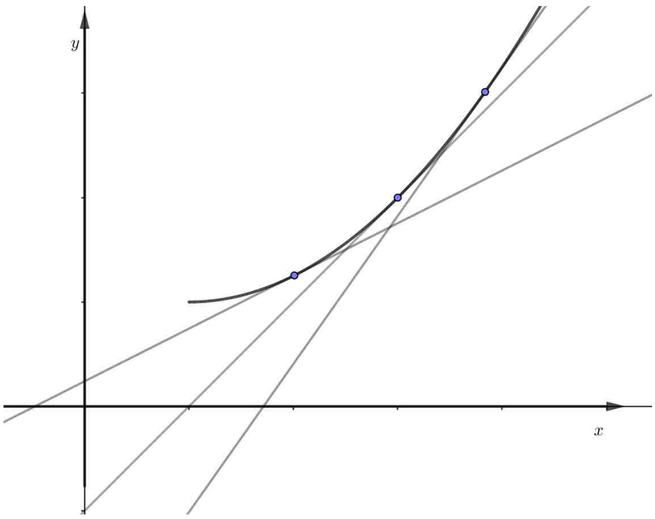
Osservazione: infatti si osserva (vedi figura) che quando la concavità è verso il basso le inclinazioni delle tangenti diminuiscono cioè la funzione derivata è decrescente cioè

$$D(f'(x)) = f''(x) < 0$$

Mentre quando la concavità è verso l'alto le inclinazioni delle tangenti aumentano cioè la funzione derivata è crescente e quindi

$$D(f'(x)) = f''(x) > 0$$

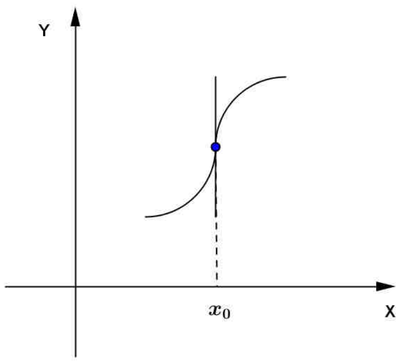


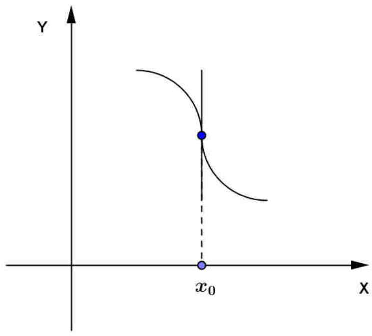


Flessi di una funzione

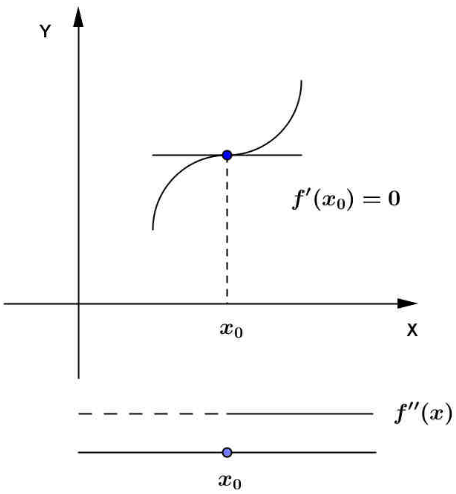
Definizione: x_0 si dice un punto di flesso per $f(x)$ se in x_0 il grafico della funzione **cambia concavità** e quindi il grafico "attraversa" la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.
A seconda dell'inclinazione della tangente possiamo avere

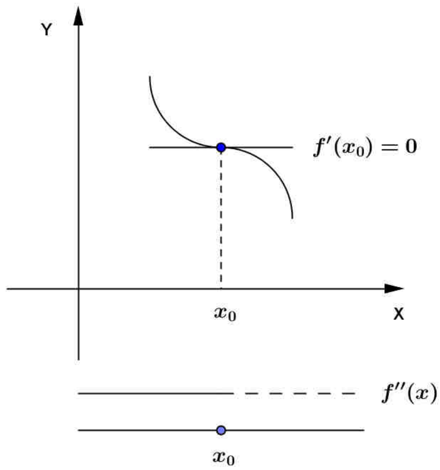
- **flesso a tangente verticale** : in questo caso $f(x)$ non è derivabile in x_0 e $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$



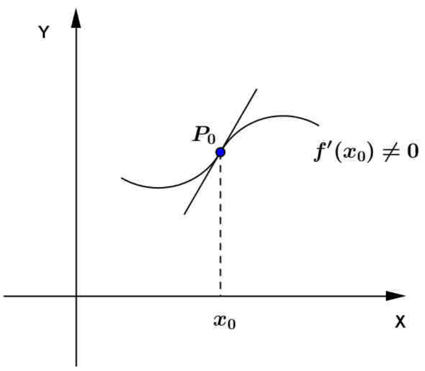


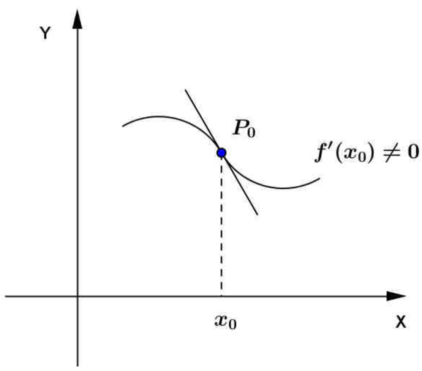
- **flesso a tangente orizzontale** : in x_0 $f'(x_0) = 0$ ma $f'(x)$ non cambia segno in x_0
  Cambia segno invece $f''(x)$ in x_0 (perché cambia la concavità) e $f''(x_0) = 0$.





- **flesso a tangente obliqua** : in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma c'è un cambio di concavità e quindi $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ **cambia segno**.



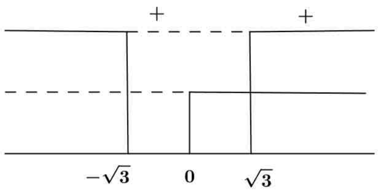


Esempio 2

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x) = x^3 - 3x}$

1) $D_f = \Re$

$f(x) > 0 \qquad x(x^2 - 3) > 0$



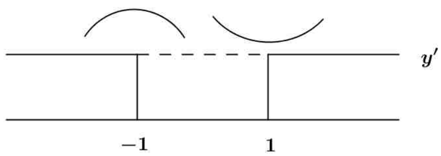
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \end{cases} \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

Quindi le intersezioni con gli assi sono $\left(-\sqrt{3};0\right)$ $(0;0)$ $\left(\sqrt{3};0\right)$.
Osserviamo che $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ e quindi la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine.

2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ma non ci sono asintoti obliqui $\left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \right)$

3) $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \quad 3(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$



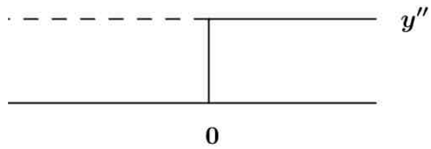
$y' > 0$

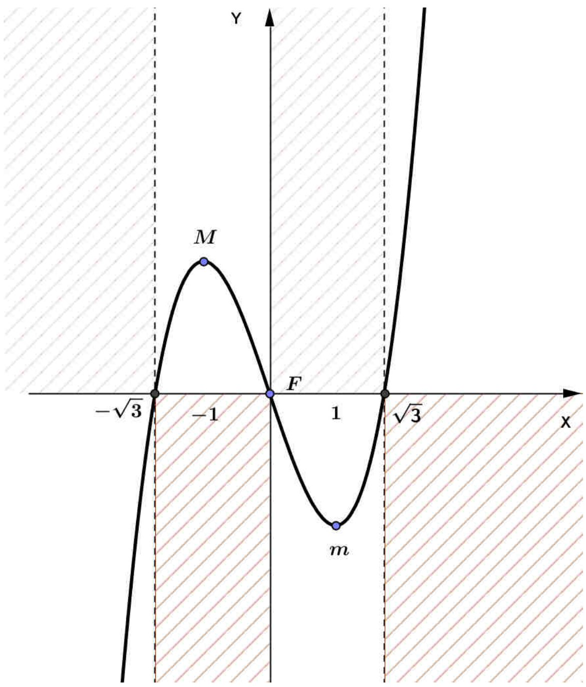
$M(-1;2) \qquad m(1;-2)$

4) $y'' = 6x$, $y'' = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$,

$y'' > 0 \Leftrightarrow \quad x > 0$

$F(0;0)$ flesso a tangente obliqua





Esempio 3

Studiamo il grafico di $\boxed{f(x)=e^{-x^2}}$

1) $D_f=\Re$

$f(x)>0 \Leftrightarrow \forall x\in\Re$

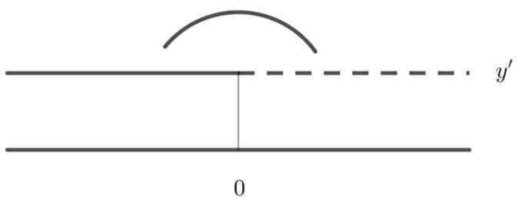
$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ e^{-x^2}=0 \rightarrow \textit{nessuna} \quad \textit{soluzione} \end{cases}$$

L'intersezione con gli assi è quindi solo il punto $(0;1)$.
$f(-x)=f(x)$ e quindi la funzione è pari cioè simmetrica rispetto all'asse y.

2) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \rightarrow y=0$ asintoto orizzontale

3) $y'=-2x\cdot e^{-x^2}$

$y'=0 \rightarrow x=0$
$y'>0 \rightarrow x<0$

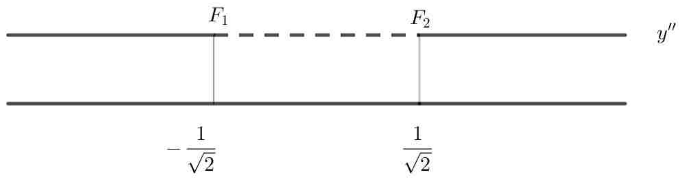


Il grafico ha un massimo in $M(0;1)$.

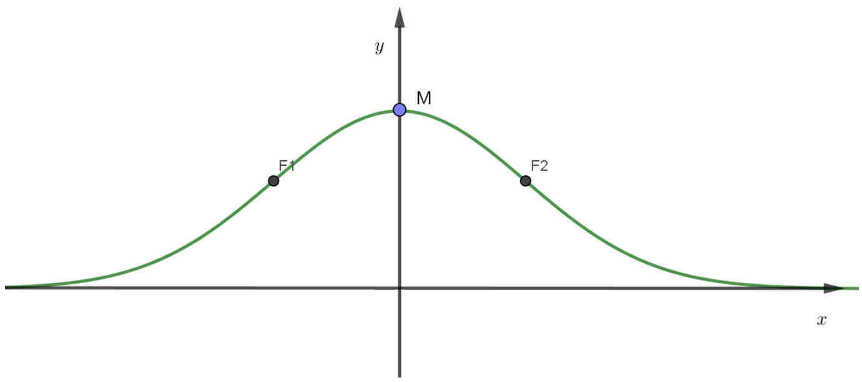
4) $y''=-2e^{-x^2}+4x^2\cdot e^{-x^2}=-2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

$y''=0 \rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y''>0 \rightarrow x<-\frac{1}{\sqrt{2}} \cup x>\frac{1}{\sqrt{2}}$



Quindi il grafico ha due flessi $F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $\quad F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

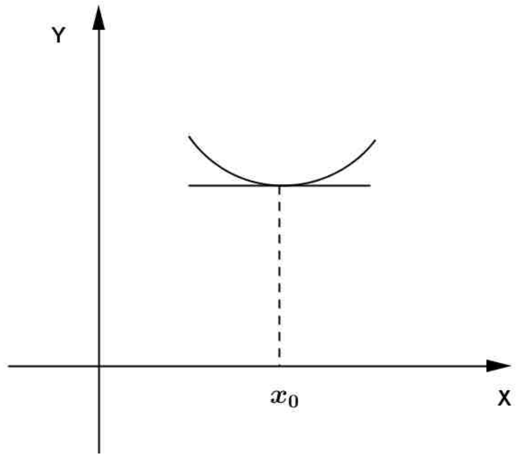


Nota

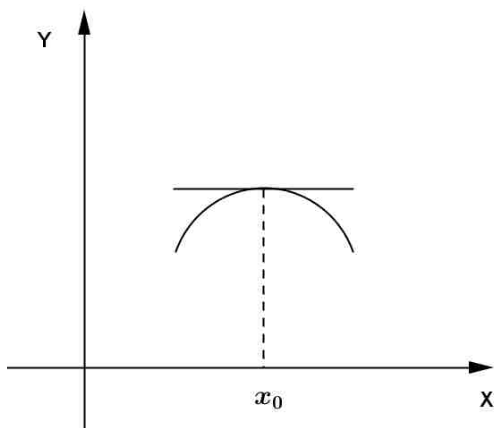
Massimi, minimi e flessi con lo studio di $f''(x_0)$

Per individuare massimi e minimi possiamo utilizzare lo studio di $f''(x)$ piuttosto dello studio del segno di $f'(x)$.

- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$ (concavità verso l'alto)$\Rightarrow x_0$ è un punto di minimo



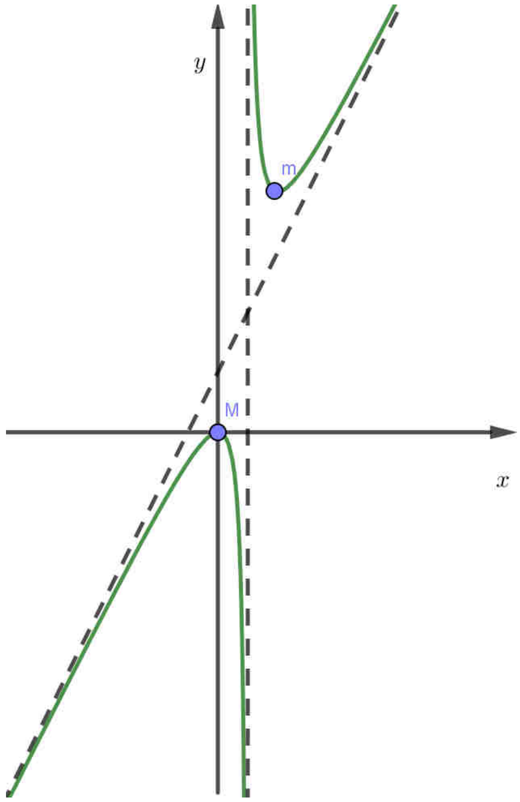
- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$ (concavità verso il basso)$\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo



Se in x_0 $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=0$ dobbiamo studiare il segno di $f''(x)$: se cambia in x_0 allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

ESERCIZI
STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

1) $y = \frac{2x^2}{x-2}$



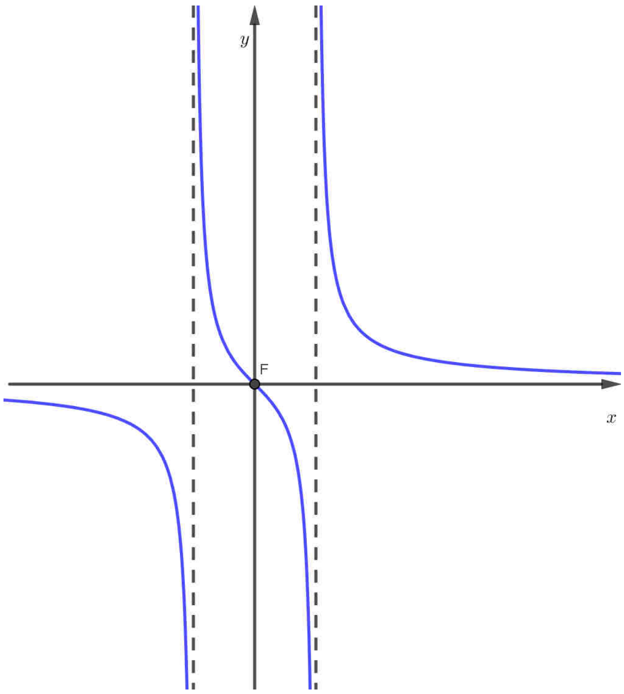
Soluzione:

$D_f = \Re \setminus \{2\}$
Asintoto verticale: $x = 2$
Asintoto obliquo: $y = 2x + 4$

$$y' = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$M(0;0)$
$m(4;16)$

2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$



Soluzione:

$$y' = -\frac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Flesso a tangente obliqua: $F(0;0)$

3) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=\pm 1;\ \ as.obl.\ \ y=-x;\ \ m\left(-\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);$

.

$M\left(\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right);\ \ F(0;0)\ \ a\ \ tg.\ \ orizz.$]

4) $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=4;\ \ as.obl.\ \ y=-x-1;\ \ m(2;-1)\ \ M(6;-9)$]

5) $y=\dfrac{2x-1}{2x^3}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=0;\ \ as.or.\ \ y=0;\ \ M\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{16}{27}\right)\ \ \ \ F\left(1;\dfrac{1}{2}\right)\ \ a\ \ tg.\ \ obliqua$]

6) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1;\ \ m(0;0);\ \ M(-2;-4)$]

7) $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=-1;\ \ as.obl.\ \ y=x-1$]

8) $y=x+\dfrac{4}{x^2}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ m(2;3)$]

9) $y=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{2x^2}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-\dfrac{3}{2};\ \ m(1;0)$]

11) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=0;\ \ as.obl.\ \ y=x-4;\ \ M\left(-\sqrt{3};-(2\sqrt{3}+4)\right);m\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}-4\right)$]

12) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=5;\ \ as.obl.\ \ y=x;\ \ M(3;1);\ \ m(7;9)$]

13) $y=\dfrac{x^2-4x}{1-x}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=1;\ \ as.obl.\ \ y=-x+3$]

14) $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ $\quad$ [$as.v.\ \ x=0\ \ \ as.or.\ \ y=\dfrac{1}{2}$]