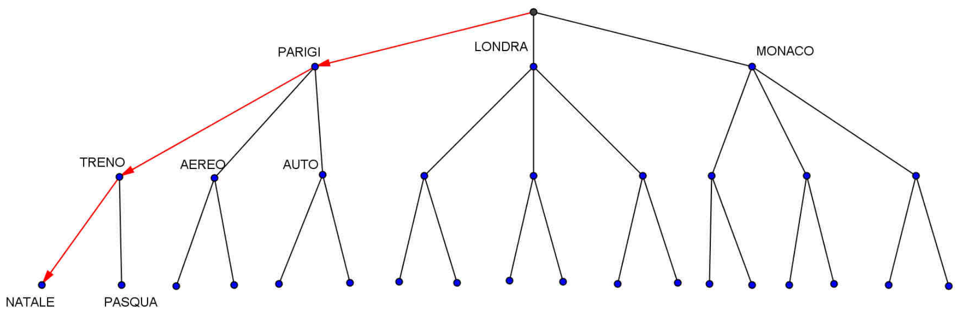
Calcolo combinatorio

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio può essere enunciato così:
"Se dobbiamo fare N scelte e la prima scelta può essere fatta in n_1 modi, la seconda scelta in n_2 modi e così via fino all'N-esima scelta che può essere fatta in n_N modi, allora la successione delle N scelte può essere fatta in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots \cdot n_N$ modi diversi."
Facciamo un esempio: supponiamo di voler organizzare una vacanza e di poter scegliere

- la meta tra Parigi, Londra e Monaco
- il mezzo di trasporto tra treno, aereo e auto
- il periodo tra vacanze di Natale e vacanze di Pasqua

In quanti modi diversi possiamo organizzare la nostra vacanza?
Possiamo rappresentare la situazione con un "grafo ad albero":



Ci accorgiamo che percorrendo i vari "rami" dell'albero abbiamo vacanze diverse: per esempio seguendo le frecce in figura abbiamo Parigi, in treno, a Natale.
Quindi, poiché ogni percorso-vacanza termina nell'ultimo livello, per sapere quante vacanze diverse possiamo organizzare basta contare le "terminazioni" dell'albero, che sono 18.

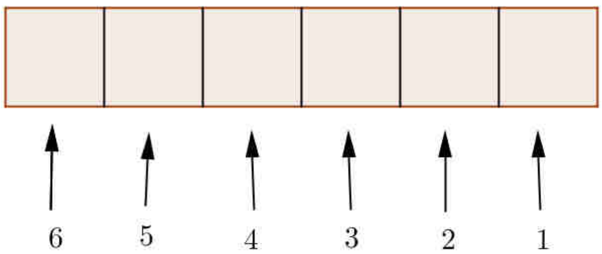
E' chiaro anche che il numero delle "terminazioni" si ottiene moltiplicando 3 (possibilità per la prima scelta) * 3 (possibilità per la seconda scelta)*2 (possibilità per la terza scelta) secondo il principio fondamentale del calcolo combinatorio che abbiamo enunciato.

Permutazioni

Se abbiamo *n* oggetti distinti e dobbiamo metterli in “fila”(quindi l’ordine è importante) **quante “file” (permutazioni) diverse possiamo fare**?

Consideriamo per esempio la parola *scuola*: **quanti anagrammi si possono fare?**

Gli oggetti in questo caso sono le sei lettere della parola s,c,u,o,l,a e sono tutte distinte.
Immaginiamo di riempire in successione sei caselle (per formare l’anagramma cioè la nostra “fila”): per riempire la prima casella ho 6 possibili scelte (posso usare una delle sei lettere), per riempire la seconda casella però ho solo 5 possibili scelte perché una lettera l’ho già usata e non posso ripeterla e così via fino al riempimento dell’ultima casella per la quale ho solo 1 scelta.



Quindi **per il principio fondamentale del calcolo combinatorio** avremo

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

possibili “file” cioè permutazioni dei 6 oggetti distinti (le lettere *s,c,u,o,l,a*).

In generale il numero delle permutazioni di n elementi distinti sarà dato dal prodotto

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \quad \cdot 2 \cdot 1$$

che viene indicato con il simbolo

$$n!$$

e si legge ***n* fattoriale.**

Il numero delle **permutazioni di n elementi distinti** viene in genere indicato con P_n e quindi abbiamo:

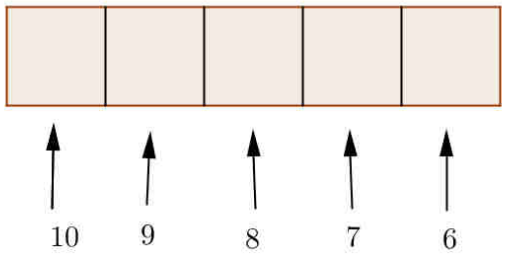
$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \quad \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Osservazioni
$n!$ cresce molto rapidamente: per esempio 5!=120 , 6!=720 , 7!=5040 ecc.
Si ha inoltre che $n! = n \cdot (n-1)!$
Per convenzione si pone 0!=1

Disposizioni semplici

Consideriamo adesso questo problema: *quanti diversi codici di 5 cifre distinte si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*

E' chiaro che anche in questo caso l'ordine è importante: si tratta di scegliere come riempire 5 caselle potendo scegliere tra un insieme di 10 elementi e quindi, ragionando come nell'esempio precedente, avremo 10 possibilità di scelta per la cifra da mettere nella prima casella, 9 (perché le cifre devono essere distinte) possibilità di scelta per la seconda casella e così via…



In conclusione possiamo comporre

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

codici diversi con cifre distinte.

In questo caso si parla di disposizioni di ordine 5 su 10 oggetti distinti e il loro numero si indica con il simbolo $D_{10,5}$.
Generalizzando **il numero delle disposizioni semplici** cioè senza ripetizioni di k elementi scelti tra n elementi distinti è

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}$$

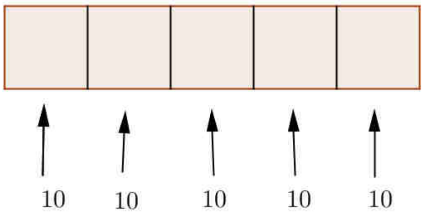
Note
E' chiaro che $k \leq n$ e che nel caso in cui $k = n$ si ritrova il numero delle permutazioni P_n.
L'ultimo fattore risulta $n-k+1 = n-(k-1)$ perché quando si riempie l'ultima casella (la *k*-esima) abbiamo già scelto *k-1* elementi e quindi abbiamo ancora solo *n-(k-1)* possibilità.

Osservazione
Possiamo esprimere il numero delle disposizioni $D_{n,k}$ anche utilizzando i fattoriali: se moltiplichiamo e dividiamo per $(n-k)!$ abbiamo :

$$D_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione

Riprendiamo l'esempio precedente: *quanti sono i codici di 5 cifre **anche ripetute** che si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*
Se in questo caso posso ripetere le cifre per ogni casella da riempire avrò sempre 10 possibilità.



Quindi avrò $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ codici diversi.

In generale **il numero delle disposizioni con ripetizione** (possono ripetere gli elementi) di ordine k su n oggetti distinti si indica con $D_{n,k}{}^{rip}$ e risulta

$$\boxed{D_{n,k}{}^{rip} = n^k}$$

Nota 1
Mentre se consideriamo le disposizioni semplici (senza ripetizione) $D_{n,k}$ è chiaro che dovrà essere $k \le n$, nel caso delle disposizioni con ripetizione $D_{n,k}{}^{rip}$ si può avere anche $k > n$.

Per esempio se consideriamo la schedina del totocalcio in cui ci sono 13 caselle (corrispondenti alle varie partite di campionato di una data domenica) che si possono riempire con i simboli 1,2,X (1=vittoria della squadra che gioca in casa; 2=vittoria della squadra che gioca fuori casa; X= pareggio) le possibili schedine sono $D_{3,13}{}^{rip} = 3^{13}$ e in questo caso k=13 e n=3.

Nota 2
Abbiamo sempre considerato che gli elementi (di cui consideriamo le permutazioni o le disposizioni) siano distinti (cioè diversi tra loro): **ma se alcuni degli n elementi coincidono**?
Come facciamo per esempio se dobbiamo calcolare quanti anagrammi si possono formare con la parola *classe* in cui due lettere sono uguali?
Possiamo considerare all'inizio gli oggetti (le lettere) come se fossero tutti diversi (per esempio pensando di associare alle due s due colori diversi) e quindi avremo 6! permutazioni.
Ma poiché in realtà due lettere coincidono permutandole tra loro ho sempre lo stesso anagramma: per esempio *classe e classe* rappresentano lo stesso anagramma e così per ciascuna altra coppia tipo *lcasse lcasse* in conclusione avrò solo $\frac{6!}{2!}$ permutazioni.

In generale quindi se n_1 elementi coincidono tra loro, n_2 elementi sono uguali tra loro ecc. dovremo dividere $n!$ per $n_1!$, $n_2!$ ecc.

Per esempio gli anagrammi della parola *mamma* saranno $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$.

Combinazioni semplici

Cominciamo con il seguente problema.

"Nel gioco del poker ad ogni giocatore vengono distribuite 5 carte da un mazzo di 32. In quanti modi diversi può essere servito un giocatore?"

Osserviamo subito che due gruppi di cinque carte sono diversi solo se differiscono per almeno una carta mentre non è importante in quale ordine sono arrivate le cinque carte.

I modi possibili in cui ciascun giocatore può essere servito è quindi inferiori al numero delle disposizioni semplici di 32 elementi a gruppi di 5: più precisamente ogni mano corrisponde a 5! disposizioni diverse.

Quindi il numero dei gruppi di cinque carte diverse sarà dato da:

$$\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=201376$$

Generalizzando viene data la seguente definizione:

Si chiama combinazione semplice di ordine k su n elementi distinti $(k\leq n)$ ***un gruppo*** *(non mi interessa l'ordine)* ***di k elementi*** *scelti tra gli n elementi.*

Se indichiamo con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni di ordine k su n elementi per quanto osservato in precedenza si ha

$$C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{P_k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Il numero delle combinazioni $C_{n,k}$ si indica anche con il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge "n su k"

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per (n-k)! si ottiene

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Occorre inoltre osservare che avendo posto 0!=1 segue che $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

Proprietà delle combinazioni

Prima proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Infatti abbiamo

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Questa proprietà può essere facilmente spiegata osservando che ad ogni k-sottoinsieme in un insieme di n elementi corrisponde un (n-k)-sottoinsieme (sottoinsieme complementare).

Seconda proprietà

Per $1 \leq k \leq n-1$ vale

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Possiamo dimostrare questa proprietà algebricamente (utilizzando la formula per calcolare il coefficiente binomiale e sviluppando), oppure facendo un esempio.

Supponiamo di estrarre tre carte da un mazzo di 40 carte: in quanti modi diversi posso farlo?

E' chiaro che ci sono $\binom{40}{3}$ combinazioni.
Ma in quante di queste compare il "settebello"(sette di quadri)? Saranno le combinazioni di ordine 2 su 39 elementi cioè $\binom{39}{2}$ dal momento che mi rimangono solo da scegliere due carte su 39 carte perché poi aggiungo il "settebello".
E in quante combinazioni il "settebello" non c'è? Questa volta saranno le combinazioni di ordine 3 su 39 elementi cioè $\binom{39}{3}$ poiché devo scegliere tre carte solo tra 39 carte (tolgo il settebello).

Ma il numero totale delle combinazioni iniziali sarà dato dalla somma del numero delle combinazioni dove c'è il "settebello" con il numero delle combinazioni dove il "settebello" non c'è e quindi dovrà essere

$$\binom{40}{3} = \binom{39}{2} + \binom{39}{3}$$

Complemento

I numeri $C_{n,k}$ sono anche i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio cioè si ha:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

Per questo il numero $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ viene anche chiamato **coefficiente binomiale**.

I coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^0$ $(a+b)^1$ $(a+b)^2$ … $(a+b)^n$ si possono scrivere in modo da formare un triangolo chiamato **triangolo di Tartaglia** :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

………………………………………………..

Osservando il triangolo di Tartaglia si possono fare alcune considerazioni:

1. I primi e gli ultimi termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia sono uguali a 1 e questo coincide con il fatto che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. In ogni riga i termini equidistanti dagli estremi sono uguali, in accordo con la prima proprietà che abbiamo visto per le combinazioni.

3. Ogni termine intermedio di una riga si ottiene, in accordo con la seconda proprietà che abbiamo visto per le combinazioni, sommando nella riga precedente il termine di ugual posto con quello che lo precede.

4. La somma dei termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia è una potenza di 2 e precisamente $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ e questo significa che il numero totale dei sottoinsiemi di un insieme di *n* elementi (sottoinsiemi con 0,1,2, ….n elementi) è uguale a 2^n.

PROBLEMI
CALCOLO COMBINATORIO

1. Con le cifre 1,2,3,4,5,6,7,8,9 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare?

[504]

2. Dei numeri dell'esercizio precedente quanti sono dispari ? Quanti sono pari ? Quanti terminano con la cifra 9 ? Quanti sono maggiori di 700 ?

[280; 224; 56; 168]

3. Quanti anagrammi si possono formare con la parola "studente"?

[20160]

4. Con le cifre 1,2,3,5,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono fare? Quanti sono pari? Quanti sono divisibili per 5? E se si possono ripetere le cifre?

[a. 60 ; 24 ;12 b. 125; 50 ; 25]

5. Consideriamo sul piano 6 punti tali che a tre a tre non siano allineati. Quanti triangoli si possono disegnare scegliendo come vertici i sei punti?

[20]

6. Quante sono le diagonali di un poligono convesso di n lati?

[$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$]

7.Quanti incontri singolari si possono organizzare con 6 giocatori di tennis ?

[15]

8.Quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto ?

[4005]

9.Quante formazioni diverse si possono formare con 11 giocatori facendo giocare tutti i giocatori in tutti i ruoli ?

[11!]

10.Quanti sono gli anagrammi della parola scuola ?

[6!]

11.Quanti sono gli anagrammi della parola babbo ? E della parola mamma ?

[20; 10]

12.Dati 10 punti distinti del piano a tre a tre non allineati, quante rette si ottengono congiungendoli due a due ?

[45]

13.Giocando a poker in quanti modi diversi si possono avere in mano 4 assi ?

[28]

14.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte da un mazzo di 40 carte ?

[91390]

15.Quante partite si giocano in un campionato composto da 15 squadre ? (considera che c'è andata e ritorno).

[210]

16.Il codice di una cassaforte è composto da 5 lettere scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone. Se le lettere possono essere anche ripetute, quanti codici diversi si possono impostare ?

[11881376]

17.Le targhe automobilistiche sono costituite da due lettere seguite da tre cifre seguite a loro volta da due lettere. Se le lettere sono scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone, quante targhe diverse si possono comporre ?

[456976000]

18.L'ultimo giorno di scuola i 20 studenti della IV B si salutano e ognuno abbraccia tutti gli altri. Quanti abbracci si sono scambiati ?

[190]

19.Per effettuare una gita 9 amici hanno a disposizione una Panda e una Tipo : in quanti modi possono distribuirsi tra le due macchine supponendo che 4 salgano nella Panda e 5 nella Tipo ?

[126]

20.Considera la situazione del problema precedente: in quanti modi possono distribuirsi se i proprietari delle auto vogliono guidare (giustamente) ognuno la propria auto ?

[35]

21.In una scuola, che comprende un liceo classico e un liceo scientifico, la rappresentanza degli studenti al Consiglio di Istituto è formata da 4 studenti del liceo scientifico e da 2 studenti del classico. Se nelle liste sono presenti 10 studenti per lo scientifico e 4 per il classico, in quanti modi diversi può essere formata la rappresentanza degli studenti ?

[1260]

22.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte di cuori da un mazzo di 40 carte ?

[210]

23.In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte dello stesso seme da un mazzo di 40 ?

[840]

24.Quante sono le schedine del totocalcio diverse con 12 risultati esatti ? (in quanti modi diversi si può fare 12) [26]

25. Con le cifre 1,2,4,6,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare? Quanti di questi sono pari?

[60; 48]

26. Quanti sono gli anagrammi della parola “classe” ?

[360]

27. In quanti modi diversi si possono pescare tre carte da un mazzo di 40 carte?

[9880]

28. 10 amici per fare una gita hanno a disposizione due auto e un motorino. Se su ogni auto salgono quattro persone e due persone sul motorino, in quanti modi diversi possono sistemarsi? E se i proprietari delle auto e del motorino vogliono guidare il proprio mezzo?

[3150; 140]

29. Quante sono le possibili schedine del totocalcio con 11 risultati esatti?

[312]

30. 12 amici, dopo una cena, si salutano ed ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?

[66]

31. In una classe di 22 studenti, di cui 12 femmine e 10 maschi, si deve formare un gruppo per una ricerca costituito da tre maschi e tre femmine. In quanti modi diversi si può formare il gruppo?

[26400]

32. Considera la situazione dell’esercizio precedente: se tra i maschi ci sono due gemelli, quanti sono i gruppi in cui i due gemelli non sono insieme?

[24640]

33. Nell’ippica è chiamata “corsa tris” una corsa in cui gli scommettitori devono indovinare i cavalli che arriveranno al 1°, 2°,3° posto. Se partono 10 cavalli, quali sono i possibili ordini di arrivo?

[720]

34. In una classe di 24 alunni si devono eleggere i due rappresentanti di classe. In quanti modi diversi si può fare questa scelta?

[276]

Calcolo delle probabilità

Ogni giorno ci troviamo a dover affrontare situazioni "incerte" in cui, per prendere delle decisioni, più o meno consapevolmente facciamo delle valutazioni di "probabilità".

Il "calcolo delle probabilità" è nato a partire dal Cinquecento per risolvere problemi legati al **gioco dei dadi**: i primi studi si trovano nel *Liber de ludo aleae* di Girolamo Cardano (scritto nel 1526, ma pubblicato solo nel 1663) e in *Sopra le scoperte dei dadi* di Galileo Galilei (scritto probabilmente nel 1612).

La parola evento aleatorio, cioè casuale, deriva appunto dalla parola latina "alea" che significa dado e per gli antichi il lancio del dado era il tipico esempio di situazione casuale.

Girolamo Cardano

La nascita del concetto moderno di probabilità viene attribuito a Blaise Pascal (1623-1662) e a Pierre de Fermat (1601-1665) e fu poi sviluppato da Huygens, Bernoulli e Laplace nel Settecento e Ottocento.

Nel Novecento infine Finetti e Kolmogorov hanno elaborato teorie più formali della probabilità.

Pierre de Fermat

Abbiamo già trattato la definizione classica della probabilità di un evento nella classe seconda ma per completezza la riportiamo di nuovo aggiungendo altri due modi di valutare la probabilità di un evento.

Eventi certi, impossibili, aleatori

Supponiamo di lanciare un dado e consideriamo i seguenti "eventi":

E_1={ esce un numero compreso tra 1 e 6 (estremi inclusi) }

E_2={ esce il numero 7 }

E_3={ esce il numero 2 }

L'evento E_1 è "**certo**": infatti lanciando un dado possono uscire i numeri da 1 a 6.

L'evento E_2 è "**impossibile**".

L'evento E_3 è possibile ma non è certo e viene detto "**aleatorio**".

È chiaro però che non tutti gli eventi aleatori hanno la stessa "probabilità" di accadere (di verificarsi).

Se per esempio considero E_4={ esce un numero pari }, scommettereste su E_3={ esce il numero 2 } o su E_4 ?

È chiaro che l'evento E_4 ha più probabilità di verificarsi di E_3: infatti se consideriamo che i casi possibili nel caso del lancio di un dado non truccato sono l'uscita dei numeri 1,2,3,4,5,6 vediamo che perché accada E_3 ho solo un caso favorevole {2} mentre perché si verifichi E_4 ho i tre casi favorevoli {2} {4} {6}.

Ma come è definita la probabilità di un evento E?

Probabilità di un evento E

Definizione classica

La probabilità (classica) di un evento E è data dal *rapporto tra il numero dei casi favorevoli ad E e il numero dei casi possibili (tutti ugualmente possibili)*

$$\boxed{p(E) = \frac{n° \quad casi \quad favorevoli}{n° \quad casi \quad possibili}}$$

Nel nostro esempio

$p(E_1) = 1$ (evento certo)

$p(E_2) = 0$ (evento impossibile)

$p(E_3) = \frac{1}{6}$

$p(E_4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

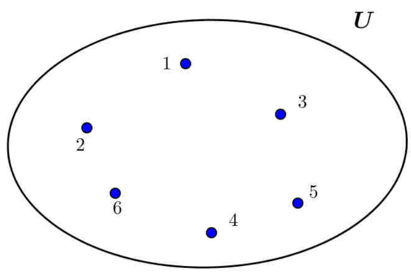
Osserviamo che essendo n° casi favorevoli $\leq$ n° casi possibili si ha che la probabilità di un evento E è un numero compreso tra 0 e 1

$$\boxed{0 \leq p(E) \leq 1}$$

Eventi ed insiemi

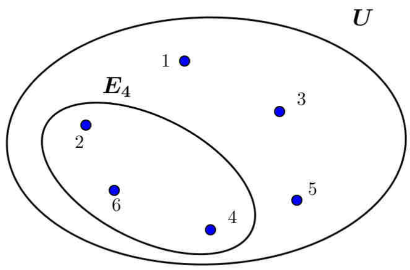
Possiamo rappresentare gli eventi utilizzando gli insiemi.

Considerando sempre il lancio di un dado, l'insieme di tutti gli eventi "elementari" (chiamato insieme universo U) sarà:



L'evento E_4 sarà rappresentato da un sottoinsieme di U

$$E_4 = \{2,4,6\}$$



Poiché $E_1 \equiv U$ si ha che E_1 è l'evento certo;

$E_2 = \Phi$ si ha che E_2 è l'evento impossibile.

Definizione frequentista

La definizione che abbiamo dato della probabilità di un evento viene detta definizione "classica" e presuppone che gli eventi "elementari" siano tutti ugualmente possibili cioè, per esempio nel lancio di un dado, che il dado non sia truccato.

Ma se il dado fosse truccato?
(mettendo una massa attaccata ad una faccia sarà più probabile l'uscita della faccia opposta rispetto alle altre).
In questo caso potrei lanciare il dado moltissime volte e annotare il numero di volte che è uscita ciascuna faccia.

Esempio

	1	2	3	4	5	6
numero volte che è uscito in 100 lanci	52	10	12	9	13	4
frequenza relativa f dell'uscita del numero	$\frac{52}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{4}{100}$

Potrei in questo caso considerare la frequenza relativa $f(E)$ come una valutazione della probabilità dell'evento E.

Si può verificare che al crescere del numero N delle prove (nel nostro caso lanci del dado) il valore $f(E)$ tende a stabilizzarsi intorno ad un valore ben preciso e definiamo **probabilità statistica** o **frequentista** *la frequenza relativa dell'evento calcolata effettuando un numero N molto grande di prove (nelle stesse condizioni).*

Naturalmente occorre supporre che sia possibile fare molte prove tutte nelle stesse condizioni e questo a volte non è possibile.

Definizione soggettiva

Qual è per esempio la probabilità che oggi piova? Oppure qual è la probabilità che un dato cavallo vinca una data corsa?

In questi casi si preferisce valutare la probabilità di un evento in relazione alle informazioni che abbiamo: possiamo per esempio aver consultato le previsioni metereologiche oppure conoscere le precedenti prestazioni del cavallo ed esprimeremo la probabilità di un evento come "**grado di fiducia**" sul verificarsi di quell'evento. Più precisamente viene data questa definizione:

La probabilità soggettiva di un evento E è data dal *rapporto tra* ***la somma r che sono disposto a "rischiare"*** *su E (che quindi perdo se l'evento non si verifica)* ***per vincere una somma s = r+g*** *(* ***g*** *rappresenta il guadagno) nel caso che E si verifichi.*

$$\boxed{p(E) = \frac{r}{s}} \qquad \text{con} \qquad s = r + g$$

Anche in questo caso la probabilità di un evento è un numero compreso tra 0 e 1.

Se sono certo che E non può verificarsi non rischierò niente (r=0) e quindi la probabilità associata risulta nulla.

D'altra parte è chiaro che mi aspetti di non guadagnare niente (g=0) scommettendo su un evento certo e in questo caso la probabilità associata a questo evento risulterà 1.

Esempio
Quando, nelle corse dei cavalli, gioco un cavallo 5 a 1 vuol dire che il guadagno sarà 5 volte la somma che rischio (se rischio 1 euro guadagnerò 5 euro) e quindi vuol dire che valuto la probabilità di vittoria di quel cavallo:

$$p(vittoria \quad cavallo) = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

Osservazioni

Naturalmente se scommetto su un evento E di cui posso calcolare la probabilità secondo la definizione classica, il gioco sarà "equo" se il valore $\frac{r}{s}$ corrisponde alla valutazione "classica".

Se per esempio scommettiamo su E = $\{$ esce il numero 6 nel lancio di un dado $\}$, se rischiamo r=1 euro dovrà essere s = 6 euro (cioè g = 5 euro) poiché la probabilità dell'evento E risulta, secondo la valutazione classica, $\frac{1}{6}$.

Negli esempi seguenti tratteremo eventi di cui si può valutare la probabilità secondo la definizione classica.

Evento contrario

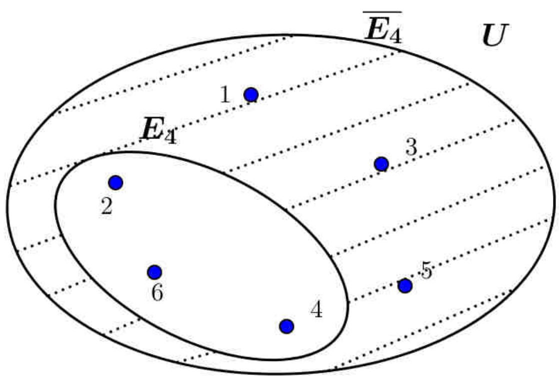
Se E è un evento indicheremo con $\overline{E}$ l'evento contrario.

Per esempio se considero

E_4 ={ nel lancio di un dado esce un numero pari }

avremo $\overline{E}_4$ ={ nel lancio di un dado **non** esce un numero pari }

Da un punto di vista insiemistico l'evento contrario $\overline{E}$ è rappresentato dall'insieme complementare di E (rispetto all'insieme universo U)



È chiaro quindi che $p(\overline{E}) = \frac{n°casi \quad possibili - n°casi \quad favorevoli \quad ad \quad E}{n°casi \quad possibili} = 1 - p(E)$

Nota

A volte per calcolare la probabilità di un evento E conviene calcolare la probabilità dell'evento $\overline{E}$ contrario e poi calcolare $p(E) = 1 - p(\overline{E})$.

Se per esempio, nel lancio di due dadi, voglio calcolare la probabilità dell'evento E=$\{escono \quad numeri \quad diversi\}$, posso calcolare la probabilità di $\overline{E} = \{escono \quad numeri \quad uguali\}$ che risulta $p(\overline{E}) = \frac{6}{36}$ (i casi favorevoli sono $(1,1)$, $(2,2)$..... $(6,6)$ cioè sei mentre i casi possibili sono 36) e poi calcolare $p(E) = 1 - \frac{6}{36} \rightarrow p(E) = \frac{5}{6}$.

Probabilità totale

Riprendiamo l'esempio del lancio di due dadi: qual è la probabilità che escano due numeri uguali? Si può rispondere semplicemente osservando che i casi favorevoli sono costituiti dalle sei coppie (1,1) (2,2) …..(6,6) e che quindi

$$p(numeri \quad uguali) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ma si può anche pensare l'evento "escono due numeri uguali" come **l'unione degli eventi** "esce 1-1" , "esce 2-2", … "esce 6-6" aventi ognuno probabilità $\frac{1}{36}$ e **sommando** le probabilità dei vari eventi otteniamo lo stesso risultato:

$$p(numeri \quad uguali) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

In generale possiamo dire che se due eventi A e B hanno "intersezione nulla" cioè non possono verificarsi contemporaneamente (si dicono **incompatibili**) abbiamo che

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

E se due eventi non sono incompatibili?
Consideriamo per esempio, sempre nel lancio di un dado, l'uscita di un numero pari o divisibile per 3.
Abbiamo quindi A = "uscita di un numero pari" e B= "uscita di un numero divisibile per 3".

Se calcoliamo la probabilità richiesta come rapporto tra numero di casi favorevoli (4) e numero dei casi possibili (6) abbiamo

$$p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ma se sommiamo $p(A) = \frac{1}{2}$ e $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ non otteniamo $\frac{2}{3}$ perché i due eventi non sono incompatibili dal momento che se uscisse il "6" sarebbe sia un numero pari che divisibile per 3.

In questo caso dopo aver sommato le probabilità di A e di B dobbiamo *togliere la probabilità dell'intersezione dei due eventi* (l'uscita del 6) che ha probabilità $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ed infatti:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Quindi in generale

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Probabilità composta

Eventi indipendenti

Supponiamo di lanciare due volte una moneta: qual è la probabilità di avere due teste?

I casi possibili sono le 4 coppie ordinate (T,C), (T,T), (C,C), (C,T) e c'è una sola coppia favorevole. Quindi la probabilità risulta:

$$p(T,T)=\frac{1}{4}$$

Osservazione

I due eventi (l'esito del primo lancio e l'esito del secondo lancio) si dicono "**eventi indipendenti**" poiché l'uscita di "testa" nel primo lancio non modifica la probabilità che esca "testa" nel secondo lancio (si dice che la moneta "non ha memoria").

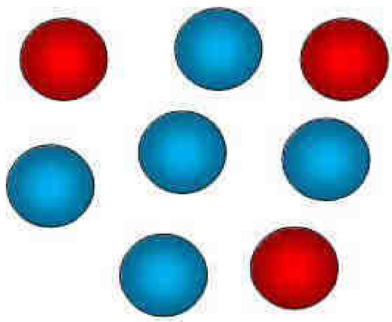
Osserviamo che la probabilità richiesta si ottiene anche moltiplicando la probabilità che esca testa nel primo lancio e la probabilità che esca testa nel secondo lancio:

$$p(T,T)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Eventi dipendenti

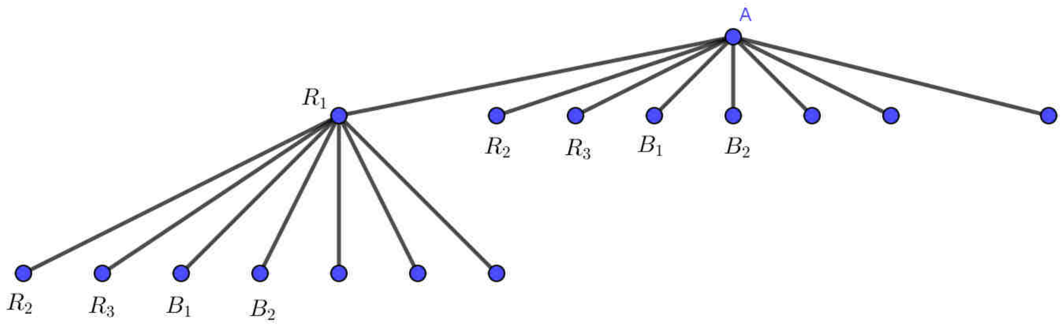
Supponiamo di avere un sacchetto contenente 8 palline di cui 3 rosse e 5 blu: estraiamo una pallina e poi, *senza rimettere la prima pallina estratta*, estraiamo una seconda pallina dal sacchetto.

Qual è la probabilità di estrarre due palline rosse?



Possiamo calcolare la probabilità richiesta come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili: dal momento che facciamo due estrazioni i casi sono rappresentati da coppie ordinate in cui il primo elemento rappresenta il risultato della prima estrazione e il secondo elemento rappresenta il risultato della seconda estrazione.

Se per esempio indichiamo con R_1, R_2, R_3 le tre palline rosse e con B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 le cinque palline blu tutte le possibili estrazioni saranno rappresentate dalle $8\cdot 7=56$ coppie ordinate (poiché non rimettiamo la prima pallina estratta nella seconda estrazione ho a disposizione solo 7 palline)



Le coppie in cui sono uscite 2 palline rosse sono $3 \cdot 2 = 6$ (numero casi favorevoli) e quindi la probabilità richiesta risulta

$$\frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

Ma se consideriamo gli eventi:

A = "esce una pallina rossa alla prima estrazione"

B = "esce una pallina rossa alla seconda estrazione"

osserviamo che si tratta di eventi "**dipendenti"** in quanto, non rimettendo la pallina estratta nel sacchetto, le palline che possiamo pescare scendono a 7 e il numero delle palline rosse dipende dall'esito della prima estrazione.
La probabilità di estrarre una pallina rossa nella prima estrazione è

$$p(A) = \frac{3}{8}$$

La probabilità di estrarre nella seconda estrazione una pallina rossa, *supponendo che nella prima estrazione sia uscita una pallina rossa* viene indicata con la scrittura $p(B/A)$ e risulta

$$p(B/A) = \frac{2}{7}$$

Osserviamo che anche in questo caso la probabilità richiesta si sarebbe potuta ottenere moltiplicando $p(A)$ per $p(B/A)$ cioè:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

In conclusione la probabilità cosiddetta "composta" di A e B risulta

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ se gli eventi sono "indipendenti"

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$ se gli eventi sono "dipendenti"

Nota: $p(B/A)$ si legge "probabilità di B condizionata ad A".

Problemi svolti

1) Lanciando due dadi e considerando la somma S dei punti ottenuti, qual è la somma S più probabile?

Svolgimento guidato

Lanciando due dadi possiamo avere:

$$
\begin{array}{llll}
(1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\
. & & & . \\
. & & & \\
. & & & \\
(6,1) & (6,2) & \dots & (6,6)
\end{array}
$$

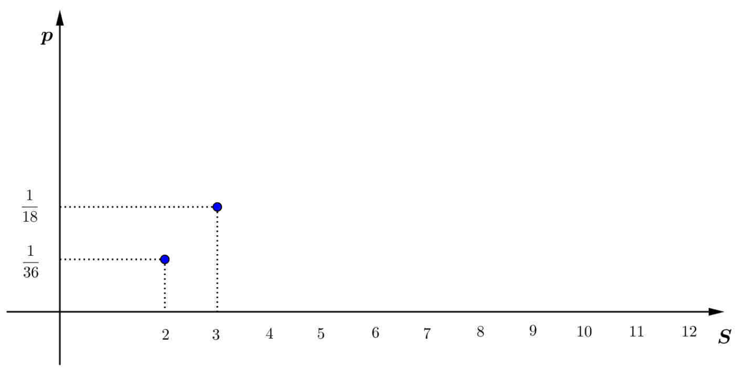
Attenzione: l'evento (1,2) è diverso dall'evento (2,1): per non confondere i due dadi possiamo pensare che siano di colori diversi, quindi l'uscita della coppia 1-2 può avvenire in due modi diversi. Ci sono quindi 36 eventi elementari.

Calcoliamo la probabilità di avere S=2, S=3 ecc.

- Per avere somma 2 devo avere (1,1) e questo è l'unico caso favorevole e quindi
$$p(S=2)=\frac{1}{36}$$
- Posso ottenere somma 3 in due casi: (1,2), (2,1) e quindi
$$p(S=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

  ecc…

In conclusione vedo che la somma più probabile risulta …….
Prova anche fare un "grafico" in cui sull'asse delle ascisse metti i valori di S che si possono ottenere e sull'asse delle ordinate le corrispondenti probabilità.



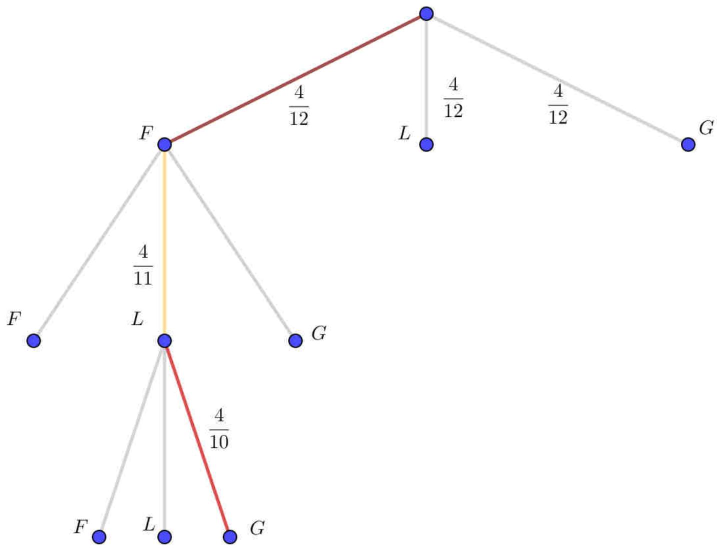
Questo grafico rappresenta quella che viene chiamata la "*distribuzione di probabilità*" della somma S.

2) Una scatola di cioccolatini ne contiene 4 al cioccolato fondente, 4 al cioccolato al latte e 4 al gianduia. Estraendo tre cioccolatini a caso, qual è la probabilità che siano di tre gusti differenti?

Svolgimento

Supponiamo di indicare con F i cioccolatini al cioccolato fondente, con L quelli al cioccolato al latte e con G quelli al gianduia.

Possiamo supporre di fare le 3 estrazioni in successione e possiamo rappresentare la situazione con un grafo ad albero:



Si osserva che la probabilità di pescare F,L,G risulta $\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{10}$ e quindi, dal momento che per pescare cioccolatini diversi potrei anche pescare F,G,L ecc. ho 3!=6 situazioni analoghe con la stessa probabilità e quindi la probabilità richiesta risulta:

$$6\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{16}{55}$$

3) Anna ha acquistato tre regali per tre sue amiche, e ha curato lei stessa la preparazione delle confezioni.
Essendo di natura un po' distratta, una volta chiusi i regali non riesce più a distinguere a chi spettava ciascuno di essi.
Per un momento Anna si chiede: "Se i regali fossero consegnati a caso, qual è la probabilità che ciascuno vada all'amica giusta?"

Svolgimento

Indichiamo con A,B,C i regali corrispondenti alle amiche a,b,c.

Supponiamo di pescare in successione i tre regali per assegnarli alle amiche: pescando a caso il primo regali la probabilità di assegnarlo bene è $\frac{1}{3}$, nella seconda assegnazione (supponendo di aver dato bene il primo regalo) la probabilità di assegnare il regalo corretto è di $\frac{1}{2}$ poiché le amiche sono due e solo uno dei due regali è quello giusto; infine se le prime due assegnazioni sono state corrette la terza lo sarà necessariamente.

Quindi

$$P(1° giusto \cap 2° giusto) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

PROBLEMI
PROBABILITA' TOTALE E COMPOSTA

1. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o un asso?

[2/5]

2. Lanciando un dado non truccato, qual è la probabilità che esca un numero pari o un numero maggiore di 4?

[2/3]

3. Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte una figura o una carta di cuori?

[19/40]

4. Sullo scaffale di una libreria ci sono 10 libri di matematica, 9 di fisica e 6 di arte. Qual è la probabilità che prendendo un libro a caso questo sia di fisica o di arte?

[3/5]

5. Un'urna contiene 12 palline rosse, 8 palline gialle e 10 palline nere. Estraendo una pallina, qual è la probabilità che esca
   a) una pallina non nera;
   b) una pallina gialla o rossa;
   c) una pallina verde.

[2/3;3/5;0]

6. Da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola se ne estrae uno. Qual è la probabilità che questo sia:
   a) Un multiplo di 5
   b) Un numero maggiore di 63;
   c) Multiplo di 5 o maggiore di 63;
   d) Pari o dispari;
   e) Divisibile per 11 o per 19.

[1/5; 3/10; 13/30; 1; 2/15]

7. Da un mazzo di 40 carte si estrae prima una carta e poi una seconda. Qual è la probabilità di aver pescato una coppia di assi se:
   a) Si rimette la prima carta nel mazzo;
   b) Non si rimette la prima carta nel mazzo

[1/100; 1/130]

8. Calcolare la probabilità che lanciando una moneta tre volte escano tre teste.

[1/8]

9. In un'urna ci sono 5 palline nere e 7 palline bianche. Calcolare la probabilità che esca prima una pallina nera e poi una pallina bianca senza rimettere la prima nell'urna.

[35/132]

10. La probabilità che Marco colpisca il centro di un bersaglio è 0,25, la probabilità che lo colpisca Paolo è 0,10. Sapendo che i lanci sono indipendenti, qual è la probabilità che:
    a) Tutti e due colpiscano il centro del bersaglio;
    b) Solo Paolo colpisca il bersaglio
    c) Nessuno dei due colpisca il bersaglio

[0,025; 0,075; 0,675]

11. Si lancia un dado non truccato per due volte. Qual è la probabilità che esca almeno un 6?

[11/36]

12. Un ladro vuole rubare il portafoglio chiuso dentro una valigia sigillata da un lucchetto con una combinazione di 3 cifre.
    a) Qual è la probabilità che al primo tentativo il ladro apra la valigia?
    b) Quanto vale la probabilità se il ladro sa che la cifra finale della combinazione è 9?

[1/1000; 1/100]

13. In una classe di 25 alunni, ci sono 15 ragazze. Il professore di matematica interroga sempre a coppie. Qual è la probabilità che:
    a) Siano interrogate due ragazze;
    b) Siano interrogati un ragazzo ed una ragazza;
    c) Nessuna ragazza

[7/20; 1/2; 3/20]

14. Un'urna contiene 12 biglie bianche e 8 biglie nere. Qual è la probabilità che, estraendo tre palline rimettendo ogni pallina estratta nell'urna, siano tutte bianche. Quanto vale se invece ogni pallina estratta non viene rimessa nell'urna?

[27/125; 11/57]

15. In un supermercato la probabilità che sia aperta la cassa 1 è 0,57, mentre che sia aperta la cassa 2 è 0,45.
    a) I due eventi sono compatibili?
    b) Se l'apertura della cassa 1 è indipendente dall'apertura della cassa 2, qual è la probabilità che siano entrambe aperte?
    c) E che siano entrambe chiuse?
    d) E che sia aperta solo la cassa 2?

[no, perché?; 0,2565; 0,2365; 0,1935]

16. *[Prova Invalsi 2014] Prato fiorito* è un gioco per computer che si gioca su una scacchiera, cliccando sui riquadri della scacchiera, a volte si può scoprire un fiore nascosto. Per esempio in una scacchiera 9x9 ci sono nascosti 10 fiori.
    a) Qual è la probabilità di scoprire al primo tentativo un fiore nella scacchiera appena descritta?
       A. 1/9 B. 1/81 C. 10/80 D. 10/81
    b) È possibile personalizzare il gioco impostando le dimensioni della scacchiera (cioè il numero di righe e di colonne) ed il numero di fiori nascosti. Se si gioca con una scacchiera 12x20, quale deve essere il numero di fiori nascosti affinché la probabilità di scoprire un fiore al primo tentativo sia 1/8?

[D; 30]

17. *[Prova Invalsi 2015]* Da un mazzo di 52 carte (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori e picche) sono stati tolti i 4 assi.

a) Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori?

b) Da un mazzo di 52 carte uguale al precedente sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione, la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è 6/45. Quante carte di fiori sono state tolte?

[1/4;]

18. *[Prova Invalsi 2015]* Nel foglietto contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce "Effetti collaterali" si legge che:

- il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini
- il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco.
  I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti uno dall'altro.

a) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco **non** abbia bruciori di stomaco? Esprimi il risultato in percentuale.

b) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti **entrambi** gli effetti collaterali?

A. 9% B. 0,14% C. 14% D. 0,9%

[93%; B]

19. *[Prova Invalsi 2015]* Un'urna contiene 40 palline identiche tranne che per il colore: 23 sono rosse e 17 blu. Si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna. Entrambe sono blu. Senza reintrodurre le due palline stratte, si estrae dall'urna una terza pallina. Qual è la probabilità che anche la terza pallina sia blu?

[15/38]

20. *[Prova Invalsi 2015]* Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci sia spetta di ottenere un numero maggiore di 4?

A. circa 100 B. circa 50 C. circa 30 D. circa 150

[A]

21. *[Prova Invalsi 2016]* Quale tra i seguenti numeri **non** può rappresentare la probabilità di un evento?

A. 2/3 B. 11/15 C. 8/7 D. 20/27

[C; perché?]

22. *[Prova Invalsi 2016]* Nella scatola A vi sono 6 palline verdi e 4 rosse. Nella scatola B vi sono invece 12 palline verdi e 5 rosse. Quante palline verdi si devono spostare dalla scatola B alla scatola A affinché la probabilità di estrarre una pallina verde da A sia uguale a quella di estrarre una pallina verde da B?

A. 5 B. 7 C. 2 D. 4

[C]

Successi in prove indipendenti (distribuzione binomiale)

In molti casi è molto importante calcolare *la probabilità di ottenere un dato numero di successi in un dato numero di prove.*
Facciamo un esempio.

Qual è la probabilità di ***rispondere correttamente a 6 domande*** *di un test di 10 domande ognuna con 3 alternative (A,B,C) di cui una sola corretta,* ***rispondendo a caso*** *?*

In questo caso il successo è "risposta corretta" e le prove sono le 10 domande del test.

Proviamo a calcolare questa probabilità in termini di probabilità composta di eventi indipendenti: infatti la probabilità di rispondere bene a 6 domande corrisponde alla probabilità di rispondere bene a 6 domande e rispondere male a 4 domande.

Poiché la probabilità di rispondere bene ad una domanda è $p = \frac{1}{3}$ e la probabilità di rispondere male ad una domanda è $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ la probabilità di rispondere bene per esempio alle prime 6 domande e male alle ultime quattro è $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Ma le sei risposte corrette non sono necessariamente le prime sei e quindi dobbiamo considerare che le 6 risposte corrette potrebbero essere le prime sei, ma anche la seconda,la terza ecc. fino alla settima…

Le sei risposte corrette possono essere scelte in $C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = 210$ modi , e quindi per calcolare la probabilità totale dovremo sommare per 210 volte $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$ e in conclusione, indicando con X il numero di risposte esatte, abbiamo

$$P(X = 6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cong 0{,}057$$

Generalizzando: **la probabilità di ottenere *k* successi** (le risposte giuste) **in *n* prove indipendenti** (nel nostro caso le 10 domande a cui rispondiamo a caso) in cui in ogni prova abbiamo probabilità di successo *p* risulta:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$$

Questa "distribuzione" di probabilità**,** proprio per la presenza del coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = C_{n,k}$, viene chiamata **"distribuzione binomiale"**.

Teorema di Bayes

Thomas Bayes (1702-1761) ha ricavato una formula matematica che permette di **rivalutare la probabilità di un evento quando si sa che un dato evento si è verificato**.Illustreremo il teorema senza enunciarlo limitandoci a trattare un caso semplice attraverso un esempio.

Supponiamo che l'incidenza di una data infezione sia dello 0,2% cioè scegliendo a caso un individuo della popolazione e indicando con M l'evento "l'individuo è affetto da quella malattia" si ha $P(M) = 0{,}002$ e indicando con $\overline{M}$ "l'individuo non è affetto da quella malattia" si ha $P(\overline{M}) = 0{,}998$.

Si mette a punto un test rapido e si osserva che, se un soggetto è affetto da quella malattia, allora la probabilità che il test sia positivo è pari al 100% e quindi, indicando con T^+ l'evento "il test è positivo", possiamo scrivere che $P(T^+ / M) = 1$.Tuttavia il test fornisce un risultato positivo anche sulle persone non affette da quella malattia nello 0,3 % dei casi (in medicina si parla di "falsi positivi") cioè $P(T^+ / \overline{M}) = 0{,}003$.*Se una persona risulta positiva al test qual è la probabilità che sia effettivamente malata?*

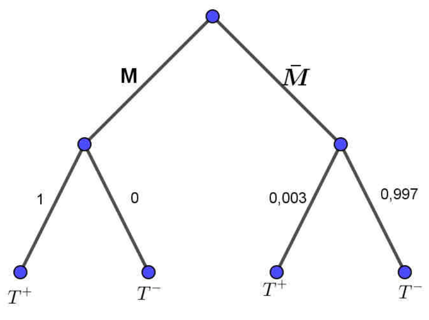
Vogliamo cioè calcolare $p\left(M/T^+\right)$.

Poiché $$p\left(M \cap T^+\right) = p(M) \cdot p\left(T^+/M\right) \quad \text{e} \quad p\left(M \cap T^+\right) = p\left(T^+\right) \cdot p\left(M/T^+\right)$$

$$p(M) \cdot p\left(T^+/M\right) = p\left(T^+\right) \cdot p\left(M/T^+\right)$$

e quindi $$p\left(M/T^+\right) = \frac{p(M) \cdot p\left(T^+/M\right)}{p\left(T^+\right)}$$

Rappresentiamo la situazione con un diagramma ad albero:



Calcoliamo $p\left(T^+\right)$:

$$p\left(T^+\right) = p(M) \cdot p\left(T^+/M\right) + p\left(\overline{M}\right) \cdot p\left(T^+/\overline{M}\right) = 0{,}002 \cdot 1 + 0{,}998 \cdot 0{,}003 = 0{,}002 + 0{,}00299 \cong 0{,}005$$

In conclusione $$p\left(M/T^+\right) = \frac{1 \cdot 0{,}002}{0{,}005} = 0{,}4$$

PROBLEMI
DISTRIBUZIONE BINOMIALE E TEOREMA DI BAYES

1. Un test è costituito da 10 domande, ognuna con 4 possibili risposte di cui solamente una è corretta. Se uno studente risponde a caso, qual è la probabilità che:
   a) non risponda correttamente a nessuna domanda
   b) risponda correttamente ad almeno 6 domande

   [0,056 ; 0,02]

2. Comprando un gratta - e - vinci c'è una probabilità dell'1% di vincere qualcosa. Calcola la probabilità che, comprando 10 biglietti, si vinca almeno 1 premio.

   [0,1]

3. Se si lancia una moneta per 20 volte, qual è la probabilità che esca Testa almeno 10 volte?

   [0,588]

4. Se si lancia un dado, non truccato, per 10 volte, qual è la probabilità che non esca mai il 6?

   [circa 0,16]

5. Il 22% degli individui appartenenti a una data popolazione adulta risulta fumatore (F). E' noto inoltre che l'85% dei fumatori ed il 20% dei non fumatori sono affetti da malattie respiratorie (M).
   Determina la probabilità che una persona affetta da malattie respiratorie sia un fumatore.

   [P (fumatore/malato) $= P(F/M) = 0{,}55$]

6. Una compagnia di assicurazioni ritiene che gli assicurati possano essere suddivisi in due classi: a rischio di incidente e non a rischio di incidente. Le loro statistiche mostrano che una persona a rischio avrà un incidente di qualche tipo all'interno del periodo di un anno con probabilità 0,4, mentre tale probabilità è pari a 0,2 per le persone non a rischio.
   a) Supponiamo che il 30 % delle persone sia a rischio, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente nel primo anno di polizza?
   b) Supponiamo che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dalla prima stipulazione della polizza. Qual è la probabilità che sia a rischio?

   [0,26 ; 0,46]

7. Un'azienda produce penne: la probabilità che una penna sia difettosa è del 5%. Il controllo di qualità accetta tutte le penne senza difetti e scarta il 90% delle penne difettose (quindi il 10% delle penne difettose passa il controllo). Qual è la probabilità che una penna che ha superato il controllo di qualità sia difettosa?

   [0,05% circa]

8. Supponiamo che un'indagine statistica abbia rilevato che in Italia il 20% delle persone soffra di ipertensione e che tra gli ipertesi il 60% sia fumatore. Sappiamo inoltre che tra le persone non ipertese il 50% sono comunque fumatori. Supponendo che una persona sia un fumatore, quale risulta la probabilità che sia iperteso?

   [23% circa]

PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE
CALCOLO DELLE PROBABILITA'

1. Una cassaforte ha un codice di 4 cifre scelte tra 0,1,2…9 (che si possono ripetere). Qual è la probabilità di indovinare il codice al primo tentativo?

[$\frac{1}{10^4}$]

2. In una classe di 20 studenti ci sono 12 maschi e 8 femmine. Se l'insegnante interroga due studenti, qual è la probabilità che siano interrogate due femmine?

[$\frac{14}{95}$]

3.Due giocatori A e B scommettono sull'uscita della somma uguale a 12 nel lancio di due dadi: A scommette sull'uscita della somma uguale a 12 e B sull'evento contrario.
Se A vince € 35, quanto deve vincere B perché il gioco sia equo?

[€ 1]

4.Se il gioco del totocalcio fosse equo, rischiando € 1 quanto dovremmo vincere facendo 13?

[€1594322]

5.Se il gioco del lotto fosse un gioco equo, rischiando € 1 quanto dovremmo vincere nel caso in cui indovinassimo tutti e cinque i numeri di una ruota?

[€ 43949267]

6. In 4 lanci di una moneta (non truccata) qual è la probabilità che esca sempre testa? E che esca almeno una volta testa? E due volte testa e due volte croce?

[$\frac{1}{2^4}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{3}{8}$]

7. Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono tre: qual è la probabilità di aver pescato 3 sette?

[$\frac{1}{2470}$]

8. Pescando tre carte da un mazzo di 40 carte , qual è la probabilità di pescare il sette di quadri?

[$\frac{3}{40}$]

9. Giocando a poker, qual è la probabilità di avere in mano 4 re ?

[$\frac{1}{7192}$]

10. Supponendo che tutti gli studenti debbano ancora essere interrogati, qual è la probabilità che ha uno studente di essere interrogato se l'insegnante chiama a caso tre persone e nella classe ci sono 20 studenti?

[$\frac{3}{20}$]

11. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità che siano 4 assi?

[$\frac{1}{91390}$]

12. Si pescano 4 carte da un mazzo di 40 carte: qual è la probabilità di avere esattamente 3 assi?

[$\frac{72}{45695}$]

13. Si lancia una moneta 5 volte di seguito. Qual è la probabilità che escano almeno tre teste?

[$\frac{1}{2}$]

14. Qual è la probabilità, ricevendo 5 carte da un mazzo di 32, di avere esattamente tre assi?

[$\frac{27}{3596}$]

15. Giocando a poker (prendo cinque carte da un mazzo di 32) qual è la probabilità di avere 5 carte di cuori?

[$\frac{1}{3596}$]

16. Estraendo 5 carte da un mazzo di 32, qual è la probabilità di estrarre cinque carte dello stesso seme?

[$\frac{1}{899}$]

17. Lanciando due dadi, qual è la probabilità di ottenere somma 7?

[$\frac{1}{6}$]

18. Qual è la probabilità di fare 10 al totocalcio? (indovinare 10 risultati su tredici partite)

[$\frac{2288}{3^{13}}$]

19. Qual è la probabilità che esca il 90 sulla ruota di Firenze? (probabilità di un estratto semplice cioè si gioca solo il 90 e si vince se viene estratto tra i cinque numeri della ruota di Firenze)

[$\frac{1}{18}$]

20. Da un mazzo di 40 carte si estraggono tre carte. Qual è la probabilità che siano tutte di cuori? E qual è la probabilità che siano tutte dello stesso seme?

[$\frac{3}{247}$; $\frac{12}{247}$]

21. Lanciando due monete qual è la probabilità di:

    a) avere due teste;
    b) avere almeno una testa;
    c) avere la stessa faccia (o due teste o due croci).

$[\frac{1}{4} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{1}{2}]$

22. Lanciando tre monete qual è la probabilità di :

    a) avere tre teste;
    b) avere almeno una testa;
    c) avere esattamente una testa.

$[\frac{1}{8} \; ; \; \frac{7}{8} \; ; \; \frac{3}{8}]$

23. In una classe di 23 studenti ci sono 10 maschi e 13 femmine. Vengono eletti i due rappresentanti di classe. Qual è la probabilità che:
    a) siano entrambe femmine;
    b) siano entrambi maschi;
    c) siano un maschio e una femmina.

$[\frac{78}{253} \; ; \; \frac{45}{253} \; ; \; \frac{130}{253}]$

24. Si mescolano 10 carte e se ne danno 5 al giocatore A e 5 al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

[252]

25. Si mescolano 10 carte e si distribuiscono 3 al giocatore A e tre al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione?

[4200]

26. Qual è la probabilità di fare 9 al totocalcio? (9 risultati corretti)

[circa 0,007]

27. Vuoi acquistare un nuovo televisore e nel negozio ci sono tre modelli con prezzi 540 euro, 608 euro, 654 euro. Inoltre vuoi acquistare un decoder per il vecchio televisore e ci sono due modelli al costo rispettivamente di 32 euro e 48 euro. Scegliendo a caso sia il televisore che il decoder qual è la probabilità di spendere meno di 700 euro? E più di 650 euro?

$[\frac{5}{6}; \; \frac{1}{2}]$

28. Tre persone prendono l'ascensore a piano terra di un edificio a 6 piani. Supponendo che ciascuna persona scenda a caso a uno dei piani dell'edificio calcola:
a) la probabilità che scendano tutte al primo piano;
b) la probabilità che scendano tutte allo stesso piano.

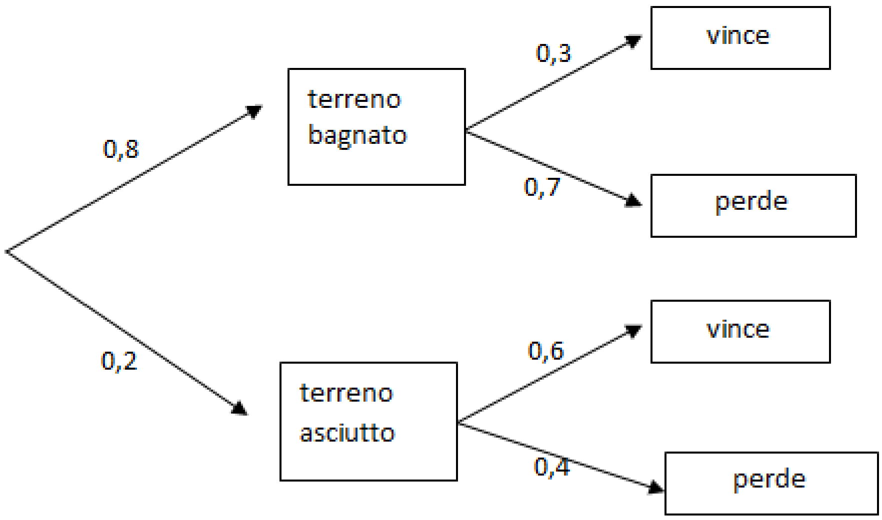
$[\frac{1}{216}; \; \frac{1}{36}]$

29. In una città ci sono 6 hotel e un dato giorno tre persone prenotano ciascuna una camera in uno degli hotel (in modo casuale). Qual è la probabilità che le tre persone si trovino in tre hotel diversi?

[$\frac{5}{9}$]

30. *Invalsi 2017/18*

In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara:
- 0,3 se il terreno è bagnato;
- 0,6 se il terreno è asciutto.
La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara?

[0,36]

31. In un ufficio bancario ci sono due sportelli A,B di cui almeno uno sempre aperto: la probabilità che A sia aperto è 0,7 e la probabilità che B sia aperto è 0,6. Qual è la probabilità che siano aperti entrambi gli sportelli?

[0,3]

32. Due cacciatori, che colpiscono il bersaglio con probabilità rispettive 85% e 75%, sparano (una sola volta) contemporaneamente ad una lepre. Qual è la probabilità che la lepre non venga colpita?

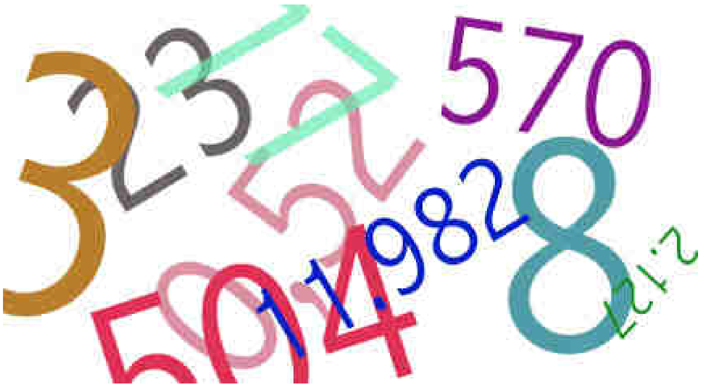
[3,75%]

33. Si hanno a disposizione due monete, una regolare e una truccata in modo che la probabilità che esca testa sia $\frac{1}{3}$. Si sceglie a caso una delle due monete e si lancia: qual è la probabilità che esca testa?

[$\frac{5}{12}$]

SCHEDE DI LAVORO

SCHEDA 1
Qual è la probabilità di indovinare un codice segreto?



"Qual è la probabilità, al primo tentativo, di scoprire una password costituita da una successione ***di cinque cifre*** *scelte tra le dieci cifre 0,1,2....9?"*

Osservazione iniziale
Bisognerà distinguere il caso in cui le cifre si possono ripetere oppure no.

1) Caso in cui le cifre si possono ripetere
Il numero di tutte le pw di 5 cifre (anche ripetute) che si possono formare è

……………………..

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

p(indovinare la pw) = ……

2) Caso in cui le cifre sono distinte
Il numero di tutte le pw di 5 cifre distinte che si possono formare è

………………..

Quindi la probabilità di individuare la pw al primo tentativo è

p(indovinare la pw) = ……

SCHEDA 2
Qual è la probabilità di essere interrogato?

"L'insegnante di matematica deve interrogare ancora tutti gli studenti della IVB e decide di chiamarne 5. Se gli studenti della IVB sono 27 qual è la probabilità che un dato studente sia interrogato?"

Osservazioni

Chiamiamo Tommaso lo studente.
Indichiamo con E l'evento "l'insegnante chiama 5 studenti e tra loro c'è Tommaso": calcoliamo il numero dei casi possibili e dei casi favorevoli.

In quanti modi diversi l'insegnante può scegliere i 5 studenti da interrogare? (spiega il tuo ragionamento)

....

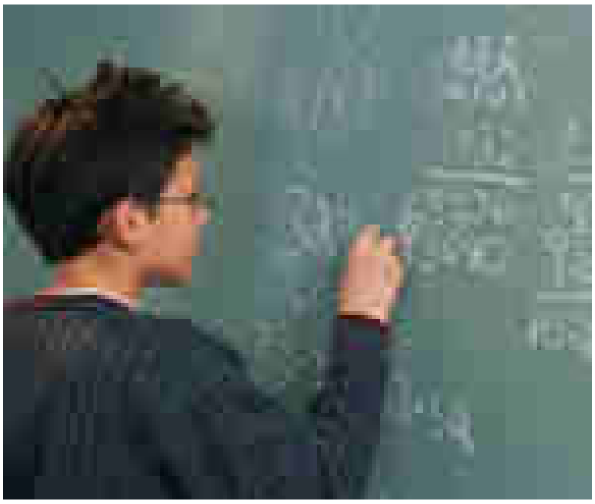
....

Ma quanti sono i possibili gruppi di cinque studenti che contengono Tommaso? (spiega il tuo ragionamento)

....

....

Quindi la probabilità che Tommaso sia interrogato risulta………………



SCHEDA 3
Qual è la somma più probabile nel lancio di tre dadi?


*Se **lanciamo tre dadi** e consideriamo la **somma dei punti** che si presentano, su quale somma conviene scommettere?*

Ai tempi di Galileo Galilei alcuni giocatori incalliti si erano accorti che la somma 10 compariva più frequentemente della somma 9 , ma questo sembrava strano perché

la **somma 9** si può avere in sei casi 6-2-1; 5-3-1; 5-2-2; 4-4-1; 4-3-2; 3-3-3

e anche la **somma 10** si può avere in sei casi 6-3-1; 6-2-2; 5-4-1; 5-3-2; 4-4-2; 4-3-3

Chiesero quindi spiegazione di questo a Galileo…

Suggerimento
Considera l'uscita dei tre numeri sui tre dadi come **terne ordinate**: i casi possibili sono quindi

……..

Per determinare il numero dei casi favorevoli considera le terne che danno una data somma.
Per esempio per avere somma 9 posso avere
6-2-1 in **sei modi** $(6,2,1)$, $(2,6,1)$ ecc.;
5-3-1 in …………
Ecc.

In conclusione
$p(S=9)=....$
$p(S=10)=.....$
$p(S=11)=.....$
$p(S=12)=.....$

Quindi su quale somma conviene scommettere ?

SCHEDA 4
Qual è la probabilità di vincere al lotto?

*Se gioco un numero al **LOTTO** (su una determinata ruota) qual è la probabilità di vincere? (si parla di probabilità di vincere un "estratto semplice")*

Ricordiamo che nel gioco del LOTTO vengono estratti (su ciascuna Ruota) 5 numeri tra 90 numeri (da 1 a 90).

Quante sono le cinquine possibili?……………………………………………………………..

Quanti sono le cinquine in cui compare il numero che ho giocato?…………………………………

Quindi la probabilità che esca il numero che ho giocato è………………………………………….

Se gioco due numeri, qual è la probabilità di vincere (cioè la probabilità che tra i cinque estratti ci siano i due numeri che ho giocato) ?
(si chiama ambo secco)

…………………………………………………………………………………………………….

E qual è la probabilità di vincere giocando tre numeri (probabilità di fare un terno-secco) , quattro numeri (quaterna secca), cinque numeri (cinquina)?

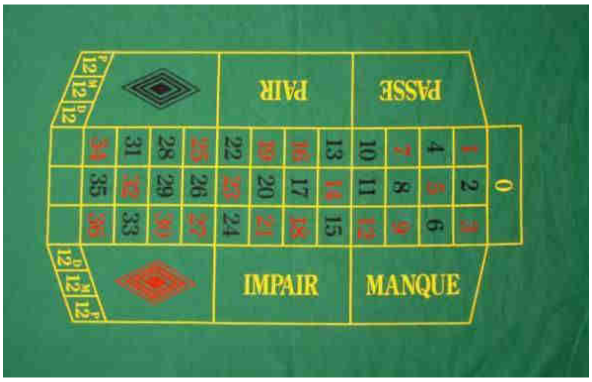
…………………………………………………………………………………………………….

Nel gioco del lotto l'estratto-semplice viene pagato 11,232 volte la posta, l'ambo 250 volte la posta, il terno 4250 volte la posta , la quaterna 80000 volte la posta, la cinquina 1000000 di volte la posta : **secondo te il gioco del LOTTO è un gioco equo ?**

Fai una breve ricerca per scoprire come è nato il gioco del LOTTO.

SCHEDA 5
Rien ne va plus!

Nel gioco della roulette francese ci sono 36 numeri rossi e neri alternati da 1 a 36 e lo zero (verde).



Si può puntare su:

- sull'uscita di un dato numero;
- su un "cavallo" cioè si mette la fiche a "cavallo" su due numeri e si vince se esce uno dei due;
- sull'uscita di un numero compreso in una data dozzina (1-12; 13-24; 25-36);
- sull'uscita di un numero tra 18 numeri (1-18; 19-36);
- sull'uscita di un numero pari;
- sull'uscita di un numero dispari;
- sull'uscita di un rosso o di un nero.

Il gioco della roulette francese è un gioco equo?

Vediamo le varie "puntate":

- L'uscita di un dato numero viene data 35 a 1 cioè se il rischio è r abbiamo un guadagno $g = 35 \cdot r$.
  Calcoliamo la probabilità che esca un dato numero……
  Ti sembra che questa scommessa sia equa?
- L'uscita di un numero pari (dispari) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero pari…………
- L'uscita di un numero rosso (nero) viene data 1 a 1 : calcoliamo la probabilità che esca un numero rosso………
- L'uscita di un numero compreso tra 18 numeri (1-18;19-36) viene data 1 a 1 ………
- L'uscita di un numero compreso in una dozzina viene data 2 a 1 ....
- L'uscita di un numero a cavallo tra due viene data 17 a 1 ……………………………

SCHEDA 6
Qual è la probabilità di vincere al totocalcio?

La schedina del totocalcio è costituita da 13 caselle che devono essere riempite con 1,2,X (possibili risultati di tredici partite di campionato di una data domenica) : 1= vince la squadra che gioca in casa, 2= vince la squadra che gioca in trasferta, X= pareggio.

Riempiendo a caso la schedina, qual è la probabilità di fare 13 al totocalcio?

Riempiendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 12 al totocalcio?

Riempiendo a caso la schedina qual è la probabilità di fare 11 al totocalcio?

……………

$p(13) =$ …..

$p(12) =$ ……

$p(11) =$ ……..