

# Esponenziali e logaritmi



**1. Funzione esponenziale**

**2. Funzione logaritmica**

**3. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche**

# La funzione esponenziale

Consideriamo la funzione

$$f : x \rightarrow 2^x$$

( posso anche scrivere  $f(x) = 2^x$  oppure  $y = 2^x$  ).

Questa funzione risulta definita per tutti i numeri reali?

Proviamo:

- se  $x = n \in \mathbb{N}$   $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$  (2 moltiplicato per se stesso  $n$  volte)
- se  $x = -n \in \mathbb{Z}$   $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$
- se  $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$   $2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m}$
- se  $x$  è un numero irrazionale, per esempio  $x = \sqrt{2}$  **possiamo definire**  $2^{\sqrt{2}}$  come l'elemento "separatore" delle due classi "contigue" di numeri reali

$$2^{1,4} \quad 2^{1,41} \quad 2^{1,414} \quad \dots$$

$$2^{1,5} \quad 2^{1,42} \quad 2^{1,415} \quad \dots$$

(dove si sono considerate le approssimazioni per eccesso e per difetto di  $\sqrt{2}$  ).

Quindi  $f(x) = 2^x$  risulta definita  $\forall x \in \mathfrak{R}$  cioè il suo dominio è  $\mathfrak{R}$  .

Chiamiamo **funzione esponenziale** una funzione del tipo

$$y = a^x$$

La variabile  $x$  si trova all'esponente e  **$a$  è un numero reale positivo e diverso da 1** e si chiama **base** della funzione esponenziale.

Per quello che abbiamo visto prima la funzione esponenziale ha come dominio (insieme di definizione) l'insieme  $\mathfrak{R}$  dei numeri reali.

## Funzione esponenziale

### Osservazione 1

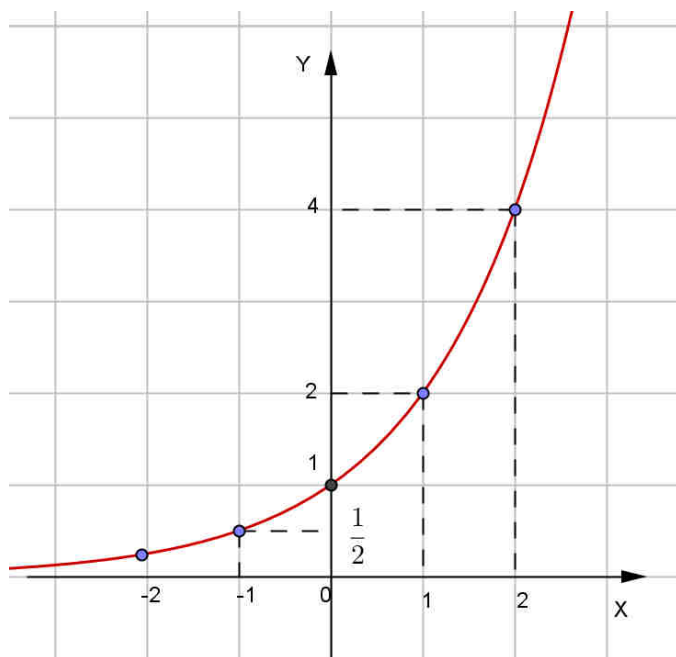
Si considera la base  $a > 0$  perché la base  $a=0$  non avrebbe nessun interesse e con basi negative non avrei sempre risultati reali: per esempio  $a^{\frac{1}{2}}$  con  $a < 0$  non è un numero reale.

### Osservazione 2

Non si considera la base  $a = 1$  perché avremmo la funzione costante  $y=1$ .

Come risulta il grafico di  $y = 2^x$ ?

Consideriamo per esempio  $a = 2$  : possiamo fare una tabella assegnando vari valori alla variabile  $x$  e otteniamo



x	y
-3	$2^{-3} = 1/8$
-2	$2^{-2} = 1/4$
-1	$2^{-1} = 1/2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$

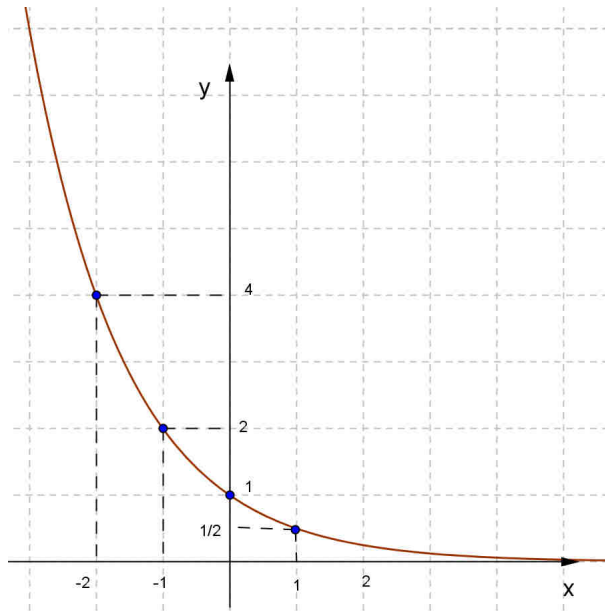
### Osservazioni

La funzione  $y = 2^x$  ha le seguenti caratteristiche:

- è crescente cioè se  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ;
- è iniettiva cioè ad elementi distinti corrispondono immagini distinte (se  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ );
- è sempre positiva e quindi il grafico si trova sempre sopra all'asse x;
- ha come asintoto l'asse x.

## Funzione esponenziale

Consideriamo adesso  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Come risulta il suo grafico?



x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4

Osserviamo che in questo caso la funzione è decrescente, ma per il resto ha le stesse caratteristiche.

In conclusione quindi avremo che

$$y = a^x$$

è una funzione

- crescente quando la base  $a > 1$ ,
- decrescente per  $0 < a < 1$ .

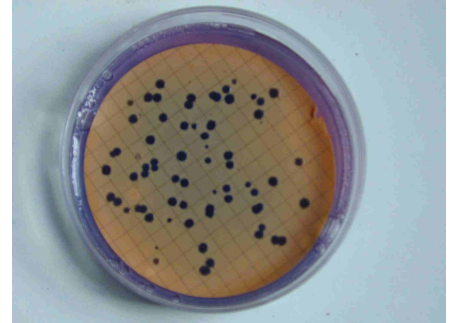
Il codominio (insieme delle immagini) di  $y = a^x$  è in ogni caso l'insieme dei reali positivi  $y > 0$ .

## Funzioni esponenziali nella realtà

### *Colonie di batteri*

La mitosi è un processo legato alla divisione cellulare: **una cellula si divide in due cellule** figlie che risultano geneticamente e morfologicamente identiche tra loro e alla cellula madre.

La maggior parte dei batteri si riproduce mediante il meccanismo della mitosi: una volta che una cellula ha raggiunto una certa dimensione, si divide in due cellule identiche, di massa pari a circa la metà di quella originaria.



Intanto anche le due cellule figlie crescono fino a dividersi ulteriormente e così via...

Supponiamo di poter osservare l'evoluzione di una popolazione di questi batteri e che all'inizio della nostra osservazione sia costituita da  $N_0 = 100$  batteri: vediamo come risulta il numero dei batteri che popolano la colonia al tempo  $t$  (misurando  $t$  in ore).

numero iniziale di batteri :  $N(0) = 100$

numero di batteri dopo 1 ora :  $N(1) = 100 \cdot 2$

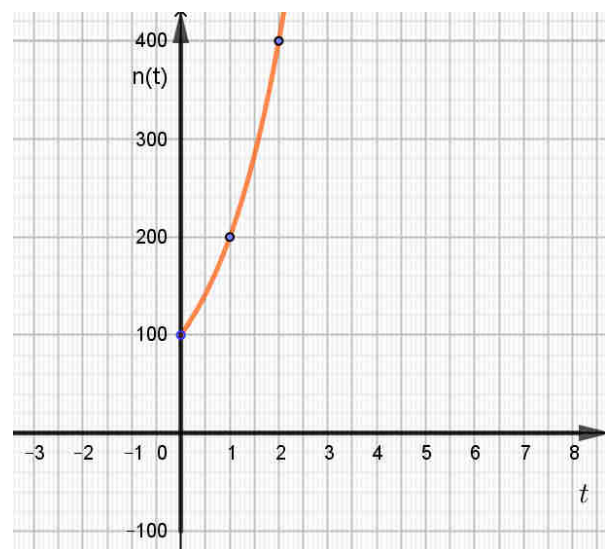
numero di batteri dopo 2 or2 :  $N(2) = 100 \cdot 2 \cdot 2 \rightarrow 100 \cdot 2^2$

ecc.

Quindi  $N(t) = 100 \cdot 2^t$

La crescita del numero dei batteri è quindi rappresentata dal grafico di una funzione esponenziale del tipo  $y = N_0 \cdot 2^x$  in cui  $x$  rappresenta il tempo  $t$  e si ha  $y(0) = N_0$  cioè il valore della funzione per  $x=0$  risulta  $N_0$ : naturalmente dovremo considerare solo alcuni punti corrispondenti a  $t=0, t=1, t=2$  ecc.

Disegniamo il grafico partendo da  $t = 0$  .



### **Decadimento radioattivo**

Alcune sostanze, dette radioattive, si trasformano in altre sostanze (si dice che “decadono”) e il tempo in cui la sostanza si dimezza (metà della sua massa iniziale si è trasformata) viene chiamato “tempo di dimezzamento” ed è diverso da sostanza a sostanza radioattiva.

Supponiamo per semplicità di considerare 100 grammi di una sostanza radioattiva che ha un tempo di dimezzamento di 1 giorno: se misuriamo il tempo in giorni e indichiamo con  $m(t)$  la massa (in grammi) della sostanza al giorno  $t$  possiamo scrivere che:

massa iniziale  $m(0) = 100$

massa dopo 1 giorno:  $m(1) = 100 \cdot \frac{1}{2}$

massa dopo 2 giorni:  $m(2) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ecc.

Quindi avremo che  $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$  cioè la massa sarà rappresentata dall'andamento di una funzione esponenziale di base  $a = \frac{1}{2}$  e valore iniziale  $m(0) = 100$  (naturalmente dovremo considerare solo i punti del grafico corrispondenti a  $t=0, t=1$  ecc. (t misurato in giorni).



### **Interesse bancario composto**

Quando versiamo dei soldi in banca riceviamo un compenso che è l'interesse.

L'interesse è il prezzo che la banca paga per poter disporre del nostro denaro e quasi sempre si tratta di quello che si chiama *interesse composto* cioè l'interesse è calcolato alla fine di ogni anno e si capitalizza, cioè si aggiunge al capitale depositato.

Quindi se abbiamo depositato 100 euro e l'interesse è del 5% composto il primo anno guadagneremo 5 euro ma il secondo anno guadagneremo il 5% di  $100+5=105$  euro quindi 5,25 euro ecc.

Supponiamo di aver depositato in banca 100 euro e che la banca applichi un interesse composto del 10%.

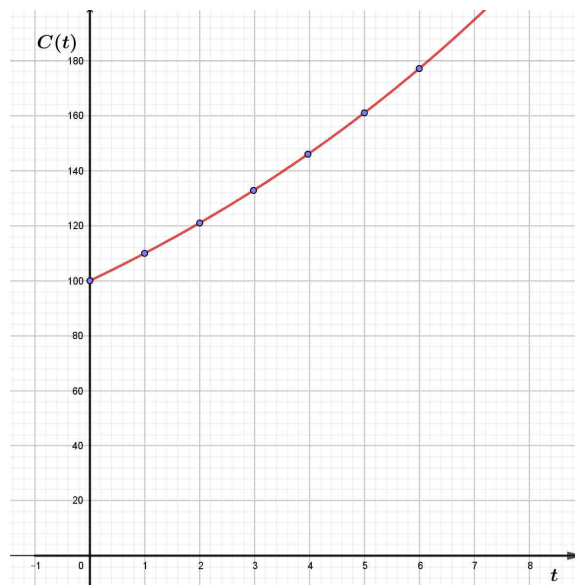
Calcoliamo il capitale  $C(1)$ ,  $C(2)$  ...  $C(t)$  dopo 1, 2 anni .... $t$  anni

$$C(1) = 100 + 100 \cdot \frac{1}{10} \rightarrow 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

$$C(2) = C(1) + C(1) \cdot \frac{1}{10} \rightarrow C(1) \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right) \rightarrow 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 \text{ ecc.}$$

$$\text{Quindi avremo: } C(t) = 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^t$$

Si tratta di una funzione esponenziale che ha valore iniziale  $C(0)=100$  e base  $a = \frac{11}{10}$  ( maggiore di 1).



# Funzione logaritmica

## Definizione di logaritmo

Si definisce logaritmo in base  $a$  di un numero  $x$  e si indica con la scrittura  $\log_a x$ , l'esponente da dare alla base  $a$  per ottenere  $x$ .

Per esempio  $\log_{10} 1000 = 3$  perché  $10^3 = 1000$

La base  $a$  deve essere positiva cioè  $a > 0$  e  $a \neq 1$  così come avevamo visto per la funzione esponenziale.

La funzione  $f : x \rightarrow \log_a x$  cioè  $y = \log_a x$  viene detta funzione logaritmica ed è la “**funzione inversa**” della **funzione esponenziale**: infatti per esempio, considerando la base  $a = 10$

$$3 \xrightarrow{10^x} 10^3$$

$$10^3 \xrightarrow{\log_{10} x} 3$$

## Nota

Prova a fare alcune prove di calcolo di logaritmi in base 10 con la calcolatrice: il tasto **log** indica il logaritmo in base 10 ed è presente in tutte le calcolatrici:

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \log_{10} 100 = 2 \text{ ecc.}$$

## Nota storica

L'idea su cui si basa il concetto di logaritmo è molto antica e se ne trova già traccia nelle opere di Archimede.

Consideriamo per esempio la base 2 (la base veniva chiamata *ragione*) e facciamo una tabella in cui mettiamo in una colonna le potenze del 2 e nella colonna accanto l'esponente corrispondente (che veniva chiamato *indice*): nel sedicesimo secolo il matematico scozzese **John Napier**, noto con il nome italianizzato di Giovanni Nepero, coniò il termine ancora oggi utilizzato di logaritmo, dal greco *logon arithmos*, cioè *numero della ragione* intendendo l'indice, cioè l'esponente, per avere il numero della tabella.

Numero	Logon arithmos
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
.....	...

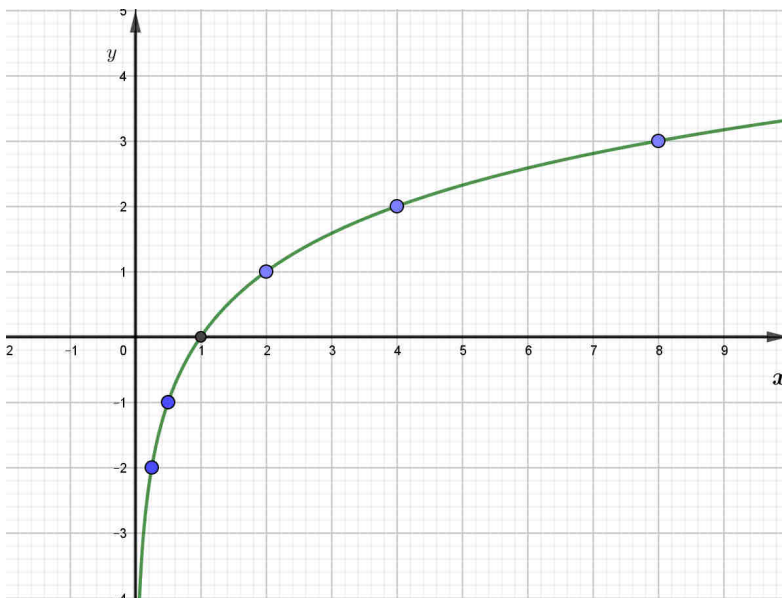




## Grafico della funzione logaritmica

1) Consideriamo per esempio la funzione  $y = \log_2 x$ : per tracciarne il grafico facciamo prima la tabella e poi riportiamo i vari punti.

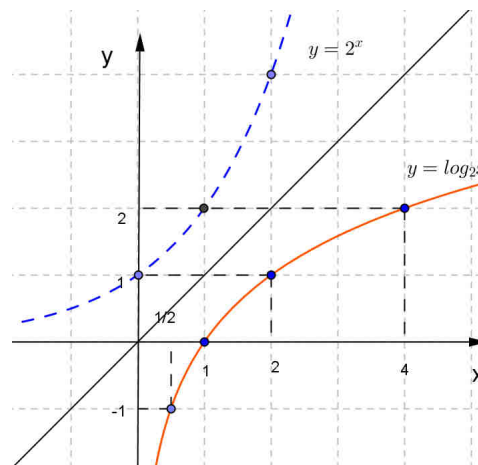
$x$	$y = \log_2 x$
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



- Osserviamo che il dominio della funzione logaritmica è  $x > 0$ , mentre il codominio sono tutti i numeri reali: dominio e codominio sono scambiati rispetto alla funzione esponenziale.
- Il grafico ha come asintoto verticale l'asse  $y$  (l'esponenziale aveva invece l'asse  $x$ )
- Se, come in questo caso, la base  $a > 1$  otteniamo una funzione crescente (come nel caso della funzione esponenziale).
- Il grafico interseca l'asse  $x$  in  $(1;0)$

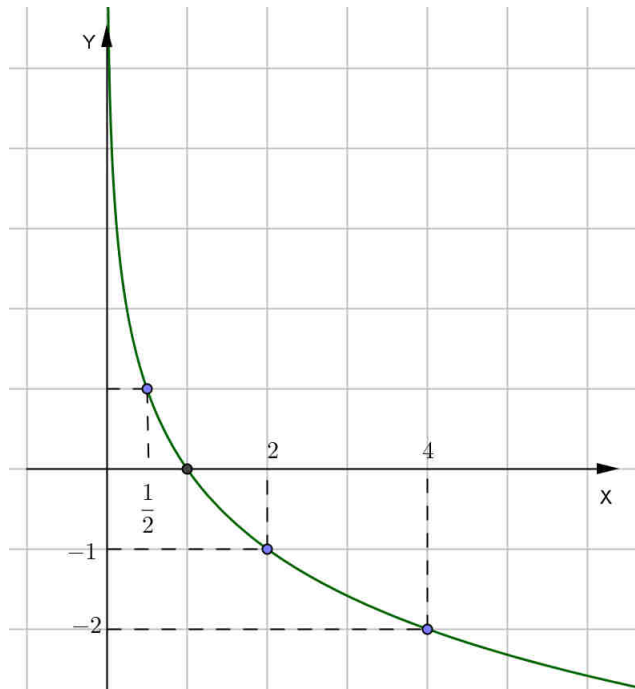
### Osservazione

Poiché la funzione logaritmica è la funzione inversa della funzione esponenziale i grafici di  $y = \log_2 x$  e  $y = 2^x$  sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante perché i loro punti hanno ascissa e ordinata scambiate (vedi figura).



## Funzione logaritmica

2) Consideriamo una funzione logaritmica con base minore di 1: tracciamo per esempio il grafico di  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ :



x	$\log_{1/2} x$
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2

- Osserviamo che anche in questo caso il dominio della funzione logaritmica è  $x > 0$ , mentre il codominio sono tutti i numeri reali: dominio e codominio sono scambiati rispetto alla funzione esponenziale.
- Il grafico ha come asintoto verticale l'asse  $y$  (l'esponenziale aveva invece l'asse  $x$ )
- Se, come in questo caso, la base  $0 < a < 1$  otteniamo la funzione è **decrescente** (come accadeva anche per la funzione esponenziale con base minore di 1).
- Il grafico interseca l'asse  $x$  in  $(1;0)$

Vediamo alcune proprietà dei logaritmi.

## Proprietà dei logaritmi

$$1) \quad \boxed{\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n}$$

### Dimostrazione

Poniamo  $\log_a m = x$  cioè  $a^x = m$  e  $\log_a n = y$  cioè  $a^y = n$   
 allora  $m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  e quindi

$$x + y = \log_a (m \cdot n)$$

*Esempio:*  $\log_{10} 10 \cdot 100 = \log_{10} 10 + \log_{10} 100$

Infatti  $\log_{10} 10 \cdot 100 = \log_{10} 1000 = 3$  e  $\log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$

$$2) \quad \boxed{\log_a \left( \frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n}$$

### Dimostrazione

Ponendo  $\log_a m = x$  e  $\log_a n = y$  abbiamo che  $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$  e quindi

$$x - y = \log_a \left( \frac{m}{n} \right)$$

*Esempio:*  $\log_{10} \frac{1000}{10} = \log_{10} 1000 - \log_{10} 10$

Infatti  $\log_{10} \frac{1000}{10} = \log_{10} 100 = 2$  e  $\log_{10} 1000 - \log_{10} 10 = 3 - 1 = 2$

$$3) \quad \boxed{\log_a (m^n) = n \cdot \log_a m}$$

### Dimostrazione

Poniamo  $\log_a m = x$  cioè  $a^x = m$  avremo che  $m^n = (a^x)^n = a^{x \cdot n}$  e quindi

$$n \cdot x = \log_a (m^n)$$

*Esempio:*  $\log_{10} (10^3) = 3 \cdot \log_{10} 10$

Infatti  $\log_{10} (10^3) = 3$  e  $3 \cdot \log_{10} 10 = 3 \cdot 1 = 3$

4) **Cambiamento di base**

$$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

**Dimostrazione**

Poniamo  $a^x = m$  : se  $a^x$  è uguale a  $m$  allora saranno uguali anche i loro logaritmi in base  $b$ :

$$\log_b a^x = \log_b m \Rightarrow x \cdot \log_b a = \log_b m \Rightarrow x = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

(abbiamo applicato la proprietà 3 dei logaritmi e poi ricavato  $x$ ).

**Calcolo di un logaritmo**

Alcuni logaritmi possono essere calcolati a mente utilizzando la conoscenza delle potenze.

Per esempio  $\log_2 8 = 3$  perché  $2^3 = 8$ .

Ma quanto vale, per esempio,  $\log_2 3$ ?

Essendo il numero 3 compreso tra 2 e 4 il suo logaritmo sarà compreso tra  $\log_2 2 = 1$  e  $\log_2 4 = 2$ : per trovare il valore approssimato di  $\log_2 3$  possiamo utilizzare la calcolatrice.

In alcune calcolatrici è presente anche il tasto che permette di calcolare il logaritmo in una base qualunque ma se non fosse presente possiamo cambiare base e riportarci alla base 10.

Abbiamo quindi:

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cong \frac{0,477}{0,301} \cong 1,58$$

**Nota:** in genere nelle calcolatrici è presente anche il tasto **ln** che permette di calcolare il logaritmo in base  $e$  ( $e$  è un numero irrazionale molto importante in matematica per la descrizione di numerosi fenomeni ed il cui valore approssimato è 2,7).

## Funzioni logaritmiche nella realtà

### *Logaritmi e chimica*

In chimica la concentrazione molare di ioni  $H^+$  presenti in una soluzione viene indicata con il simbolo  $[H^+]$  e si ha:

$[H^+] = 1$  per una soluzione di massima acidità;

$[H^+] = 10^{-7}$  per una soluzione neutra;

$[H^+] = 10^{-14}$  per una soluzione di minima acidità (basica).

Il pH di una soluzione si definisce come

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

e quindi abbiamo che:

se  $[H^+] = 1 \Rightarrow pH = 0$  soluzione di massima acidità;

se  $[H^+] = 10^{-7} \Rightarrow pH = 7$  soluzione neutra;

se  $[H^+] = 10^{-14} \Rightarrow pH = 14$  soluzione di minima acidità (basica)

### **Esempio**

Se la concentrazione di ioni di una soluzione è per esempio  $[H^+] = 10^{-8}$  avrà  $pH=8$ .

### *Logaritmi e livello sonoro*

Ricordiamo che l'intensità  $I$  di un'onda sonora è definita come la quantità di energia che attraversa in 1 secondo una superficie di  $1 \text{ m}^2$  disposta perpendicolarmente alla superficie di propagazione dell'onda e si misura quindi in  $W/m^2$ .

L'intensità minima percepita da un orecchio "normale" (alla frequenza di riferimento di 1000 Hz) è  $I_0 = 10^{-12} W/m^2$  (soglia di udibilità).

Si definisce livello sonoro, che indichiamo con  $l_s$ , misurato in decibel (dB):

$$l_s = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (\text{dB})$$

Quindi se  $I = I_0 \Rightarrow l_s = 0 \text{ dB}$

se  $I = 10 \cdot I_0 \Rightarrow l_s = 10 \text{ dB}$

se  $I = 100 \cdot I_0 \Rightarrow l_s = 20 \text{ dB}$

ecc.

### **Esempio**

L'intensità del suono (per la frequenza di riferimento di 1000 Hz) che provoca una sensazione di dolore al timpano è  $I = 1W/m^2$  e il livello sonoro corrispondente risulta  $10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{10^{-12}} \right) = 120$

## Equazioni esponenziali

### Equazioni esponenziali elementari

L'equazione esponenziale elementare è

$$a^x = k$$

con  $k > 0$  altrimenti non ci sono soluzioni e per la definizione di logaritmo la soluzione dell'equazione è:

$$x = \log_a k$$

Esempio:  $2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3$

### Equazioni esponenziali riconducibili a quelle elementari

#### Esempi

$$1. \quad 2^{x-1} = 3 \rightarrow x-1 = \log_2 3 \rightarrow x = 1 + \log_2 3$$

$$2. \quad 2^{x-1} = 2^{3x} \rightarrow x-1 = 3x \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$3. \quad 2^{x-1} = 3^x$$

Se due numeri sono uguali allora sono uguali anche i loro logaritmi in una base qualsiasi: se scegliamo la base 10 abbiamo

$$\log_{10} 2^{x-1} = \log_{10} 3^x$$

Applichiamo la proprietà dei logaritmi relativa alla potenza ed abbiamo:

$$(x-1) \cdot \log_{10} 2 = x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2 = x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = \log_{10} 2$$

Infine ricaviamo la  $x$

$$x = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 2 - \log_{10} 3}$$

Nota: applicando la proprietà del quoziente possiamo scrivere la soluzione anche così:  $x = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2}{3}}$

$$4. \quad 3^{2x} - 12 \cdot 3^x - 13 = 0$$

Poniamo  $3^x = y \rightarrow y^2 - 12y - 13 = 0 \rightarrow y_1 = -1 \cup y_2 = 13$

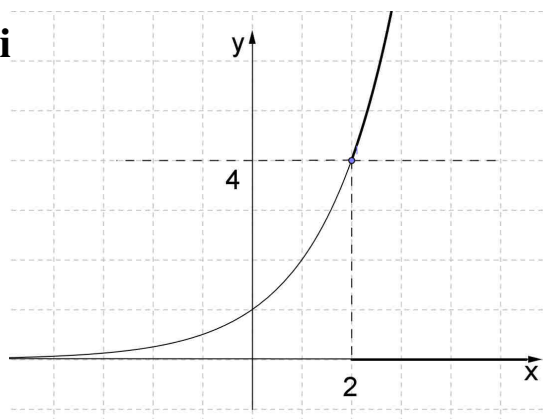
Quindi:  $3^x = -1$  non ha nessuna soluzione ;  $3^x = 13 \rightarrow x = \log_3 13$

## Disequazioni esponenziali

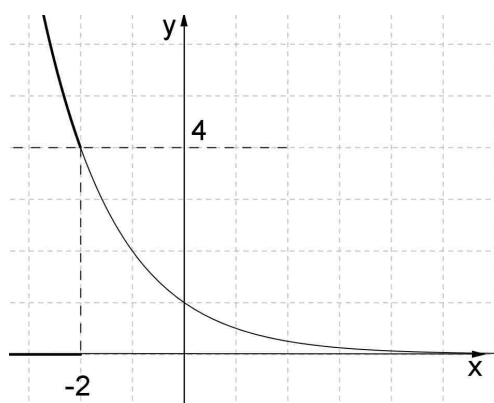
### Disequazioni esponenziali elementari

#### Esempi

- $2^x > 4 \rightarrow x > \log_2 4$  cioè  $x > 2$



- $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \rightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 4$  cioè  $x < -2$



In generale se  $k > 0$  abbiamo

- se  $a > 1$  poiché  $a^x$  è una funzione crescente si mantiene il verso della disequaglianza

$$a^x > k \rightarrow x > \log_a k$$

- se  $0 < a < 1$  poiché  $a^x$  è in questo caso una funzione decrescente si inverte il verso della disequaglianza

$$a^x > k \rightarrow x < \log_a k$$

#### Nota 1

Se  $k < 0$  e dobbiamo risolvere  $a^x > k$  la disequazione è verificata  $\forall x \in \mathfrak{R}$  dal momento che  $a^x$  è sempre positivo e quindi è maggiore di un numero negativo.

Esempio:  $2^x > -3 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$

#### Nota 2

Considerazioni analoghe valgono per la risoluzione della disequazione di  $a^x < k$  con  $k > 0$ .  
Se  $k < 0$  non ci sarà nessuna soluzione di  $a^x < k$  poiché  $a^x$  è sempre positivo.

## Disequazioni esponenziali riconducibili a quelle elementari

### Esempi

$$1. \quad 2^{x-1} > 3 \rightarrow x-1 > \log_2 3 \rightarrow x > 1 + \log_2 3$$

$$2. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 3 \rightarrow x-1 < \log_{\frac{1}{2}} 3 \rightarrow x < 1 + \log_{\frac{1}{2}} 3$$

$$3. \quad 2^{x-1} > 2^{3x} \rightarrow x-1 > 3x \rightarrow 2x < -1 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$4. \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \rightarrow x-1 < 3x \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$5. \quad 2^{x-1} > 3^x \rightarrow \log_{10} 2^{x-1} > \log_{10} 3^x \rightarrow (x-1) \cdot \log_{10} 2 > x \cdot \log_{10} 3 \rightarrow x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2 > x \cdot \log_{10} 3$$

$$x \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) < -\log_{10} 2 \rightarrow x < -\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{3}{2}}$$

Poiché  $\log_{10} \frac{3}{2} = -\log_{10} \frac{2}{3}$  possiamo scrivere la soluzione anche così:  $x < \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2}{3}}$

$$6. \quad 3^{2x} - 12 \cdot 3^x - 13 > 0$$

Possiamo risolvere questa disequazione ponendo  $3^x = y$  e sostituendo otteniamo :

$$y^2 - 12y - 13 > 0 \Rightarrow y < -1 \cup y > 13$$

Quindi abbiamo  $3^x < -1$  che non ha nessuna soluzione e  $3^x > 13 \rightarrow x > \log_3 13$

$$7. \quad 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0 \rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$$

Poniamo  $2^x = y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 < 0 \Rightarrow 1 < y < 2$  e quindi

$$1 < 2^x < 2 \Rightarrow 2^0 < 2^x < 2^1 \rightarrow 0 < x < 1$$



## Equazioni logaritmiche

### Equazioni logaritmiche elementari

Si dice equazione logaritmica ogni equazione in cui l'incognita  $x$  compare come argomento di un logaritmo. L'equazione logaritmica elementare è quindi:

$$\log_a x = k \quad (x > 0) \rightarrow x = a^k$$

**Esempio:**  $\log_2 x = 3 \rightarrow x = 2^3$

### Equazioni logaritmiche riconducibili a quelle elementari

#### Esempi

1.  $\log_3(x-2) = 2 \rightarrow x-2 = 3^2 \rightarrow x = 2+9 = 11$

2.  $\log_2(2x-1) = \log_2(3x-5)$

In questo caso è importante determinare la condizione di accettabilità delle soluzioni ricordando che l'argomento di un logaritmo deve essere strettamente positivo. Quindi nel nostro caso avremo:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

Risolvendo l'equazione logaritmica abbiamo:

$$2x-1 = 3x-5 \rightarrow x = 4 \text{ accettabile}$$

Quindi la soluzione dell'equazione è  $x = 4$ .

3.  $\log_2(x-1) = \log_2(2x+1)$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$x-1 = 2x+1 \Rightarrow x = -2$  che non è accettabile e quindi l'equazione non ha soluzioni.

4.  $\log_2 x + 3 \cdot \log_4 x = 10$

In questo caso occorre operare un cambiamento di base per avere i logaritmi nella stessa base. Per esempio possiamo portare tutto in base 2 e poiché

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

abbiamo :  $\log_2 x + \frac{3}{2} \cdot \log_2 x = 10 \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \log_2 x = 10 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 2^4$

5.  $\log(4x - 5) + \log x = 2 \cdot \log(x + 4)$

Se la base non viene indicata si intende che ci si riferisce sempre ad una stessa base e che non è importante conoscerla per risolvere l'equazione.

Impostiamo innanzitutto il sistema per avere le condizioni di accettabilità delle soluzioni:

$$\begin{cases} 4x - 5 > 0 \\ x > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{4} \\ x > 0 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{5}{4}$$

Possiamo in questo caso applicare le proprietà dei logaritmi:

$$\log[(4x - 5) \cdot x] = \log(x + 4)^2$$

$$(4x - 5) \cdot x = (x + 4)^2$$

.....

$$x_1 = \frac{16}{3} \text{ accettabile}$$

$$x_2 = -1 \text{ non accettabile}$$

Quindi l'unica soluzione è  $x = \frac{16}{3}$ .

## Disequazioni logaritmiche

### Disequazioni logaritmiche elementari

La disequazione logaritmica elementare del tipo

$$\log_a x > k$$

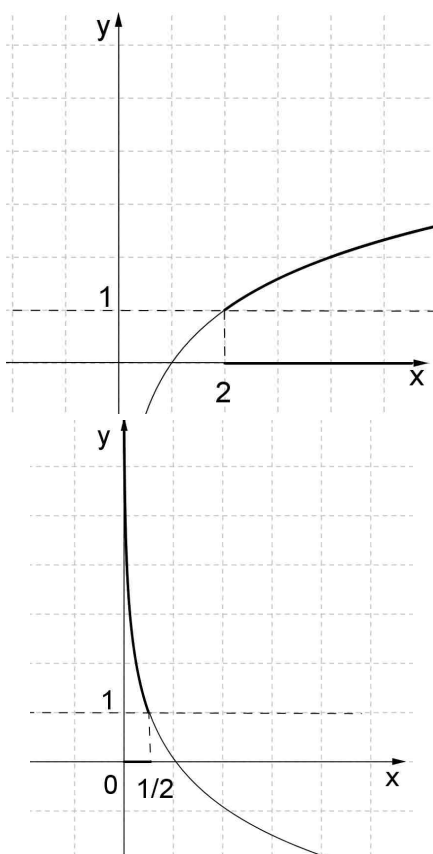
si risolve così:

- se  $a > 1 \Rightarrow x > a^k$  poiché essendo  $\log_a x$  crescente si mantiene il verso della disequaglianza
- se  $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < x < a^k$  poiché essendo  $\log_a x$  decrescente si inverte il verso della disequaglianza e inoltre dobbiamo prendere solo valori positivi della  $x$

#### Esempi

1)  $\log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$

2)  $\log_{\frac{1}{2}} x > 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$



**Nota:** se devo risolvere  $\log_a x < k$  avrò:

- se  $a > 1 \Rightarrow 0 < x < a^k$
- se  $0 < a < 1 \Rightarrow x > a^k$

#### Esempi

1)  $\log_2 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

2)  $\log_{\frac{1}{2}} x < 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

## Disequazioni logaritmiche riconducibili a quelle elementari

### Esempi

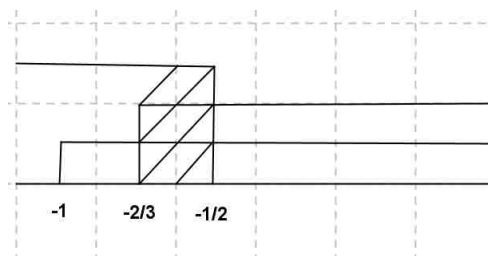
1.  $\log_5(x-1) > 1 \rightarrow x-1 > 5 \rightarrow x > 6$

2.  $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) < 1 \rightarrow 2x-3 > \frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{7}{4}$

3.  $\log_2(x+1) > \log_2(3x+2)$

In questo caso possiamo risolvere un unico sistema in cui mettiamo il dominio dei logaritmi e la risoluzione della disequazione (la base è maggiore di 1 e quindi si mantiene il verso della disequaglianza) cioè:

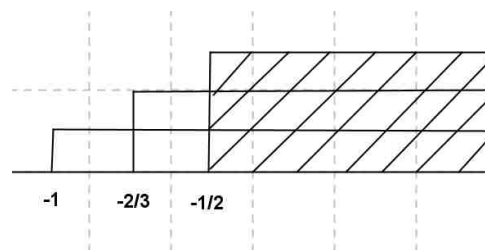
$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x+2 > 0 \\ x+1 > 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -\frac{2}{3} \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



La soluzione è:  $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$

4.  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x+2 > 0 \\ x+1 < 3x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -\frac{2}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Nota: in questo caso la base è minore di 1 e quindi nella terza disequazione del sistema abbiamo invertito il verso della disequaglianza.

La soluzione è:  $x > -\frac{1}{2}$

**ESERCIZI**  
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

**I) Equazioni esponenziali**

1)  $4^x = 8$   $[x = \frac{3}{2}]$

2)  $9^x = 6 + 3^x$   $[x = 1]$

3)  $15 + 4^x = 2^{x+3}$   $[x_1 = \log_2 3 \cup x_2 = \log_2 5]$

4)  $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$   $[x_1 = 3 \cup x_2 = -1]$

5)  $4^x = \frac{1}{2}$   $[x = -\frac{1}{2}]$

6)  $3^x - 9^x = 0$   $[x = 0]$

7)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$   $[x_1 = 1 \cup x_2 = \log_2 3]$

8)  $3^{x-1} = 5^{x-2}$   $[x = \frac{\log_{10} \frac{25}{3}}{\log_{10} \frac{5}{3}}]$

9)  $\frac{5}{2^x + 1} + \frac{9}{2^x - 1} = \frac{15}{2^x + 1} + 1$   $[x = 2]$

10)  $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$   $[x = \log_3 4]$

11)  $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$   $[x_1 = 1 \cup x_2 = 3]$

12)  $3^{2-8x} = 9^{3x+1}$   $[x = 0]$

## II) Disequazioni esponenziali

$$16) 5^x > 25 \quad [x > 2]$$

$$17) \left(\frac{1}{7}\right)^x \geq 7^3 \quad [x \leq -3]$$

$$18) \left(\frac{1}{10}\right)^x \leq 100 \quad [x \geq -2]$$

$$19) (x-2) \cdot 3^x < 0 \quad [x < 2]$$

$$20) 1 \geq 7^{1+x} \quad [x \leq -1]$$

$$21) (2^x - 4) \cdot (3^{2x} - 3^x) \geq 0 \quad [x \leq 0 \cup x \geq 2]$$

$$22) 2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 1 \quad [x < -1 \cup 0 \leq x \leq 1]$$

$$23) 2^{x+1} \geq 5^{1-x} \quad [x \geq \log_{10} \frac{5}{2}]$$

$$24) 25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0 \quad [x \leq \log_5 3 \cup x \geq \log_5 10]$$

$$25) 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0 \quad [x < 1 \cup x > 2]$$

$$26) 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0 \quad [x \geq 1]$$

$$27) 2 \cdot 3^x - 9^x > 1 \quad [\text{nessuna soluzione}]$$

$$28) 4^x + 1 > 2^{x+1} \quad [x \neq 0]$$

$$29) 4^x - 2^x > 0 \quad [x > 0]$$

**III) Equazioni logaritmiche**

30)  $\log_4 x = 2$  [  $x = 4^2$  ]

31)  $\log_3(2x+4) = 2$  [  $x = \frac{5}{2}$  ]

32)  $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -1$  [  $x = 3$  ]

33)  $\log_2(x-2) + \log_2 x = \log_2(9-2x)$  [  $x = 3$  ]

34)  $\log(x+8) = 2 \cdot \log 3 - \log x$  [  $x = 1$  ]

35)  $4 \cdot \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 5 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$  [  $x_1 = \frac{1}{2} \cup x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$  ]

36)  $3 \cdot \log_2(x+2) - 3 \cdot \log_2(2x-1) + \log_2 4 - \log_3 9 = 0$  [  $x = 3$  ]

37)  $\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(1-x) = 1$  [  $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$  ]

38)  $\log_a(3x-5) + \log_a(x-2) = \log_a 2$  [  $x = \frac{8}{3}$  ]

39)  $2 \cdot \log(x-1) + \log(x-2) = \log(x^2 - 3x + 2)$  [nessuna soluzione]

40)  $2 \cdot \log x + \log(x^2 + 1) = \log(3 - x^2)$  [  $x = 1$  ]

41)  $\log x + \log(x+1) = \log(1-x)$  [  $x = \sqrt{2} - 1$  ]

42)  $3 \cdot \log_2^2 x + 5 \cdot \log_2 x - 2 = 0$  [  $x_1 = \sqrt[3]{2} \cup x_2 = \frac{1}{4}$  ]

43)  $\log_2(x-1) = \log_2(3x+5)$  [nessuna soluzione]

44)  $\log_2^2(x-1) - 5 \cdot \log_2(x-1) + 6 = 0$  [  $x_1 = 5 \cup x_2 = 9$  ]

#### IV) Disequazioni logaritmiche

- 45)  $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 1$   $[x > \frac{7}{3}]$
- 46)  $\log_2(2x+5) > 0$   $[x > -2]$
- 47)  $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > 1$   $[\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}]$
- 48)  $\log_3 x < 0$   $[0 < x < 1]$
- 49)  $\log_3^2 x - \log_3 x < 0$   $[1 < x < 3]$
- 50)  $\log_3 x + \log_3(x-8) \geq 2$   $[x \geq 9]$
- 51)  $\log_3^2 x + 2 \cdot \log_3 x - 3 < 0$   $[\frac{1}{27} < x < 3]$
- 52)  $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) > \log_{\frac{1}{2}}(20-3x)$   $[3 < x < \frac{23}{4}]$
- 53)  $\log_{\frac{1}{3}}(6x-x^2) + 2 < 0$  [nessuna soluzione]
- 54)  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4) + \log_3(x-3) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$   $[x > 3]$
- 55)  $\log_{\frac{3}{4}}(1-x^2) \leq 0$   $[x = 0]$
- 56)  $\log_2(1-x^2) - 1 < 0$   $[-1 < x < 1]$
- 57)  $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 > 0$   $[0 < x < \frac{1}{25} \cup x > 5]$
- 58)  $\log_2 x + \log_2(1+x) < \log_2(1-x)$   $[0 < x < \sqrt{2}-1]$
- 59)  $\log_2^2(1-x) - \log_2(1-x) > 0$   $[x < -1 \cup 0 < x < 1]$
- 60)  $\frac{\log_2^2 x - \log_2 x}{\log_3 x} < 0$   $[0 < x < 2 \text{ con } x \neq 1]$



**PROBLEMI****EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE**

1) Supponiamo che nella sterilizzazione del latte alla temperatura costante di  $120^{\circ}\text{C}$  il numero  $n(t)$  delle spore del microrganismo *Bacillus Stearothermophilus* sia regolato dalla legge

$$n(t) = 100 \cdot 0,98^t$$

dove  $t$  è la durata in secondi del processo di sterilizzazione.

Rappresenta l'andamento di  $n(t)$  e determina il tempo di dimezzamento del numero delle spore cioè dopo quanti secondi il loro numero è dimezzato rispetto a quello iniziale.

*Svolgimento*

Per rappresentare l'andamento di  $n(t)$  possiamo utilizzare Geogebra: basterà digitare nella barra di inserimento  $y = 100 \cdot (0,98)^x$  e poi indicare sull'asse  $x$  il tempo  $t$  e sull'asse  $y$   $n(t)$ .



Si tratta di una funzione esponenziale con base minore di 1 e quindi decrescente e che al tempo  $t = 0$  vale 100 cioè all'istante iniziale ci sono 100 spore.

Per determinare il tempo di dimezzamento dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale:

$$100 \cdot (0,98)^t = 50 \rightarrow (0,98)^t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \log_{0,98} \frac{1}{2}$$

Utilizzando infine la formula del cambiamento di base e calcolando i logaritmi con la

calcolatrice avremo:  $\log_{0,98} \frac{1}{2} = \frac{\log_{10} \frac{1}{2}}{\log_{10} 0,98} \cong 34,2$  e quindi in conclusione il tempo di dimezzamento è circa 34,2 s.

- 2) Un biologo ha scoperto che il numero  $N(t)$  di un dato tipo di batteri presenti al tempo  $t$  (misurato in ore) in una coltura raddoppia ogni ora. Sapendo che all'inizio ( $t=0$ ) il numero dei batteri era 50 scrivi l'espressione di  $N(t)$ . Dopo quanto tempo il numero di batteri è maggiore di 1 milione?

$$[ N(t) = 50 \cdot 2^t ; 14,3 \text{ h} ]$$

- 3) Se sappiamo che il nostro capitale iniziale raddoppierà in 10 anni, qual è il tasso di interesse composto applicato dalla nostra banca?

$$[ 7\% ]$$

- 4) Dopo la fecondazione, per scissione della cellula madre nel processo chiamato mitosi, si hanno due cellule figlie ogni 30 ore.

a) Quante cellule si hanno dopo 5 giorni dalla fecondazione?

b) quanti giorni devono passare dalla fecondazione per avere circa  $2^{20}$  (circa un milione) cellule?

$$[ 16 ; 25 \text{ giorni} ]$$

- 5) a) Una banca applica un tasso di interesse composto del 4% con capitalizzazione ad 1 anno (ogni anno l'interesse viene aggiunto al capitale). Scrivi quanto risulta il capitale, partendo da un capitale iniziale  $C_0 = 100$  (euro), dopo 5 anni.

b) Un'altra banca applica lo stesso tasso composto del 4% ma con capitalizzazione a 6 mesi cioè ogni 6 mesi l'interesse si somma al capitale. In questo caso, sempre partendo da 100 euro, quanto risulta il capitale dopo 5 anni?

$$[ \text{circa } \text{€} 122; \text{circa } \text{€} 148 ]$$

- 7) Abbiamo bisogno di un prestito e confrontiamo le proposte di due banche: la prima ci propone un tasso composto del 4% con durata di 15 anni (cioè dovremo restituire quanto abbiamo avuto in prestito con l'interesse maturato in 15 anni), la seconda un tasso del 3% con durata 20 anni. Qual è la proposta migliore? Quanto dobbiamo restituire alla prima banca? E alla seconda?

(Indica con  $C_0$  il valore iniziale del prestito)

$$[ \text{la prima}; 1,801 \cdot C_0 ; 1,806 \cdot C_0 ]$$

- 8) Il numero di batteri in una certa coltura raddoppia in 20' (20 minuti). Sapendo che il numero iniziale è  $N_0 = 500$  scrivi come risulta il numero  $N(t)$  di batteri presenti dopo  $t$  minuti. Dopo quanto tempo i batteri sono 1 milione?

$$[ N(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{20}} ; \text{circa } 219' \text{ cioè } 3\text{h } 39' ]$$

**SCHEDA DI VERIFICA**  
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1)  $9^{x+1} - 3^{3x-1} = 0$  [  $x = 3$  ]

2)  $2^{x-1} = 3^{1+x}$  [  $x = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} \frac{2}{3}}$  ]

3)  $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$  [  $x = \log_5 2 \cup x = \log_5 3$  ]

4)  $(2^x - 4) \cdot \left( \left( \frac{1}{9} \right)^x - 1 \right) > 0$  [  $0 < x < 2$  ]

5)  $2 \cdot 5^x - 25^x + 8 > 0$  [  $x < \log_5 4$  ]

6)  $\log_5(x+2) - \log_5(x-1) = \log_5 x$  [  $x = 1 + \sqrt{3}$  ]

7)  $\log_2^2(5x-4) - \log_2(5x-4) = 0$  [  $x_1 = 1 \cup x_2 = \frac{6}{5}$  ]

8)  $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) + \log_2(2x-1) = 2$  [nessuna soluzione]

9)  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}} 3x > 0$  [  $x > \frac{1}{2}$  ]

10)  $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) - \log_{\frac{1}{3}}^2(x-4) < 0$  [  $4 < x < \frac{13}{3} \cup x > 5$  ]

**SCHEDA DI VERIFICA**  
**ESPONENZIALI E LOGARITMI**

1)  $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$  [  $x = 0, x = 2$  ]

2)  $3^{x-2} = 5^{x-1}$  [  $x = \frac{\log_{10} \frac{5}{9}}{\log_{10} \frac{5}{3}}$  ]

3)  $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 > 0$  [  $x > 1$  ]

4)  $\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$  [  $x = 1$  ]

5)  $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) > 1$  [  $x > 2$  ]

6)  $\log_3^2(x+2) - \log_3(x+2) = 0$  [  $x_1 = -1, x_2 = 1$  ]

7) Una sostanza radioattiva si dimezza ogni ora. Supponendo che inizialmente si abbiano 100 g della sostanza, determina l'espressione della massa quantità  $m(t)$  in grammi di sostanza radioattiva al tempo  $t$  misurando  $t$  in ore. Dopo quanto tempo la quantità di sostanza radioattiva si riduce a meno di 1 grammo?

$$[ m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t ; \text{circa } 6,6 \text{ h} ]$$

8) In quanti anni raddoppia un capitale iniziale  $C_0$  se la banca applica un interesse composto del 2%?

[ 35 anni ]

9) Se una soluzione ha la concentrazione molare di ioni  $H^+$   $[H^+] = 10^{-9}$ , qual è il suo pH?

[  $pH = 9$  ]

10) Qual è l'intensità sonora di un suono di livello sonoro 100 dB?

[  $I = 10^{-2} W / m^2$  ]