Algebra di grado superiore al secondo

Equazioni di grado superiore al secondo

Come per le equazioni di 2° grado, esistono formule risolutive anche per le equazioni di 3° e 4° grado ma non le studieremo perché sono troppo complesse,mentre si può dimostrare che non ci sono formule risolutive generali per le equazioni di grado superiore al quarto.

Noi consideriamo solo alcuni tipi particolari di equazioni di grado superiore al secondo che possono essere risolte attraverso la scomposizione in fattori.

Esempi

1) $x^3 - 2x^2 = 0$

Per risolvere questa equazione basta “raccogliere” x^2:

$x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow$ (per la legge di annullamento del prodotto) $x^2 = 0 \quad \cup \quad x - 2 = 0$

Quindi $x_1 = x_2 = 0 \qquad \cup \qquad x_3 = 2$

L’equazione data ha quindi 3 soluzioni reali di cui due coincidenti.

2) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$

Possiamo effettuare un raccoglimento parziale:

$$x^2(x-2) + 2(x-2) = 0$$
$$(x-2)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \cup \quad x^2 + 2 = 0$$

Quindi avrò solo la soluzione reale $x_1 = 2$ poiché $x^2 + 2 = 0$ non ha soluzioni reali.

3) $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

Proviamo a cercare un valore di *x* che annulla $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Vediamo che $P(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ e quindi $x^3 - 2x^2 + 1$ è divisibile per $x - 1$ ed effettuando la divisione abbiamo che

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$$

Allora le soluzioni sono $x_1 = 1 \qquad$ e $\qquad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4) E*quazioni "binomie"*

- Considera l'equazione $x^4 = 16$

Le soluzioni sono $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$
poiché sia $\sqrt[4]{16}$ che $-\sqrt[4]{16}$ elevati alla quarta danno 16

E se avessi avuto $x^4 = -16$? E' chiaro che in questo caso non c'è nessuna soluzione.

Quindi se ho $\boxed{x^n = a \text{ con } \mathbf{n\ pari}}$ avrò : **se** $a \geq 0$ due soluzioni opposte $\pm\sqrt[n]{a}$
se $a < 0$ nessuna soluzione reale

- Considera l'equazione $x^5 = 32$

La soluzione è $x = \sqrt[5]{32}$ cioè $x = 2$ poiché $32 = 2^5$.

E se avessi avuto $x^5 = -32$?
In questo caso la soluzione è $x = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

Quindi se ho $\boxed{x^n = a \text{ con } \mathbf{n\ dispari}}$ avrò: $x = \sqrt[n]{a}$

5) E*quazioni "trinomie"*

- Considera l'equazione $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Se poniamo $x^2 = z$ e sostituiamo abbiamo $z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 \qquad z_2 = 3$

Quindi $\quad x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
$\quad x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$

- Considera l'equazione $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

Se poniamo $x^3 = z$ abbiamo $z^2 - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 3 \qquad z_2 = -1$

Quindi $\quad x^3 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{3}$
$\quad x^3 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1$

In generale se l'equazione si presenta nella forma

$$\boxed{a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0}$$

(n intero positivo, $a \neq 0$)

possiamo porre $\boxed{x^n = z}$ e risolvere l'equazione di 2° grado in z
$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

risolvendo infine $x^n = z_1 \cup x^n = z_2$ (se z_1, z_2 esistono).

ESERCIZI

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

1) $x^4 - 4x^2 = 0$ $[0;\ \pm 2]$

2) $x - x^5 = 0$ $[0;\ \pm 1]$

3) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ $[0;\ 3]$

4) $4x^3 + 4x^2 - x = 1$ $\left[-1;\ \pm\frac{1}{2}\right]$

5) $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$ $\left[0;\ \frac{1}{2};\ -\frac{4}{3}\right]$

6) $4x^3 + 3x^2 - 8x - 6 = 0$ $\left[\pm\sqrt{2};\ -\frac{3}{4}\right]$

7) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ $\left[\pm\sqrt{3};\ \frac{1}{3}\right]$

8) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

9) $x^3 - 7x + 6 = 0$ $[-3;\ 1;\ 2]$

10) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$ $[1;\ 3]$

11) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 1\right]$

12) $2x^3 - 5x - 6 = 0$ $[2]$

13) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$ $\left[-2;\ \frac{1}{3};\ 1\right]$

14) $\frac{1}{4}x^3 - 2 = 0$ $[2]$

15) $3x^3 + 375 = 0$ $[-5]$

16) $x^7 + 1 = 0$ $[-1]$

17) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ $[\pm 1;\ \ \pm 2]$

18) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ $[\pm 1]$

19) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ $[-3;\ \ 2]$

20) $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$ $[\pm 1;\ \ \pm\sqrt{3}]$

21) $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$ $[\pm 4]$

22) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ [impossibile]

23) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{2};\ \ \pm\sqrt{3}\right]$

24) $x^4 - 5x^2 - 24 = 0$ $[\pm 2\sqrt{2}]$

25) $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$ $[\pm 2\sqrt{2};\ \ \pm 2]$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Esempio 1

Consideriamo la disequazione $\quad x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

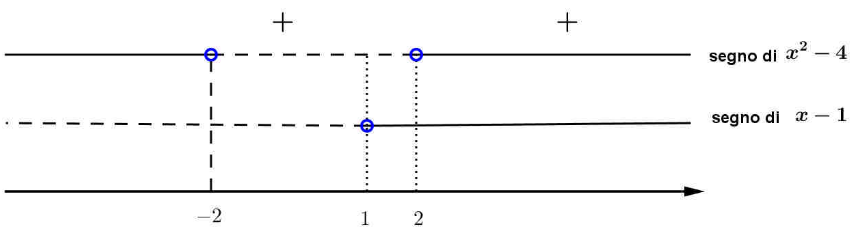
Proviamo a scomporre il polinomio (raccoglimento parziale):

$$x^2(x-1) - 4(x-1) > 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(x^2-4) > 0$$

Possiamo quindi studiare il segno dei singoli fattori

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$
$$x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \cup x > 2$$

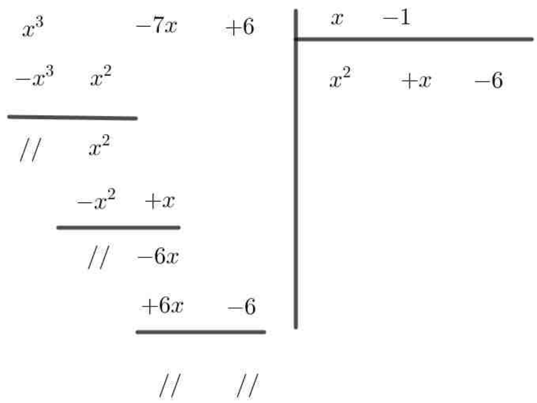
Riportiamo questi risultati nel "grafico dei segni":



Abbiamo quindi $(x-1)(x^2-4) > 0$ per $-2 < x < 1 \cup x > 2$.

Esempio 2
Consideriamo la disequazione
$x^3 - 7x + 6 < 0$

Scomponiamo utilizzando la regola di Ruffini:

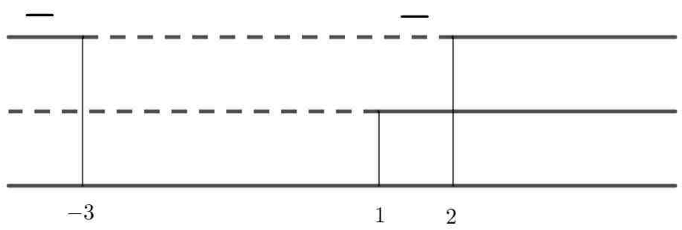


$P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$

Quindi $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 + x - 6)$

Studiamo il segno dei singoli fattori (si imposta sempre il fattore >0)
$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$
$x^2 + x - 6 > 0 \rightarrow \left(x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \right) \qquad x < -3 \cup \qquad x > 2$

Riportiamo questi risultati nel “grafico dei segni”:



Poiché la disequazione è $x^3 - 7x + 6 < 0$, la soluzione è $x < -3 \cup 1 < x < 2$.

Esempio 3
Consideriamo la disequazione $x^3 - 1 > 0$

Sappiamo che possiamo scomporre il polinomio dato come differenza di cubi per cui

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Studiamo il segno dei singoli fattori

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad (a > 0, \Delta < 0) \rightarrow \forall x \in R$$

Quindi $x^3 - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

Osservazione
Quando in un prodotto un fattore è positivo $\forall x \in R$, possiamo anche non considerarlo perché non fa cambiare il segno del prodotto.

Esempio 4
Consideriamo la disequazione $x^3 + 2x^2 \leq 0$

Basta mettere in evidenza:

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2) \leq 0$$

Poiché $x^2 \geq 0 \; \forall x \in R$ possiamo anche non considerarlo e studiare solo il segno di $(x+2)$:

$$x^2(x+2) \leq 0 \rightarrow (x+2) \leq 0 \rightarrow x + 2 \leq 0 \rightarrow x \leq -2$$

ESERCIZI

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

1) $3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 < 0$ $\left[x < -\frac{2}{3}\right]$

2) $x^4 + x^3 < 0$ $[-1 < x < 0]$

3) $x^4 - 1 > 0$ $[x < -1 \cup x > 1]$

4) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 > 0$ $\left[-1 < x < \frac{1}{2} \cup x > 1\right]$

5) $6x^3 + x^2 - 11x - 6 \geq 0$ $\left[-1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \cup x \geq \frac{3}{2}\right]$

6) $x^2 - 2x^3 \leq 0$ $\left[x \geq \frac{1}{2} \quad \cup \quad x = 0\right]$

7) $x^3 + 1 > 0$ $[x > -1]$

8) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 > 0$ $[-3 < x < -2 \quad \cup \quad x > 3]$

9) $x^3 - 4x^2 \leq 0$ $[x \leq 4]$

10) $x^5 - x^2 > 0$ $[x > 1]$

11) $(4 - x^2) \cdot (1 + x) < 0$ $[-2 < x < -1 \quad \cup \quad x > 2]$

12) $(x^2 - 9) \cdot (2 + x) > 0$ $[-3 < x < -2 \quad \cup \quad x > 3]$

13) $(1 - x^2) \cdot (5 - x) < 0$ $[x < -1 \quad \cup \quad 1 < x < 5]$