Le equazioni di secondo grado

Cos'è un'equazione di secondo grado

Un'equazione è di secondo grado se l'incognita compare (al massimo) elevata alla seconda.
Sono esempi di equazioni di secondo grado:

$x^2 - 1 = 0, \quad 3x^2 + x - 4 = 0, \quad 2 = 3x - x^2, \quad 2 - x^2 = 2x^2$

Applicando la regola del trasporto possiamo sempre scriverla nella forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \ \in \Re, con \quad a \neq 0}$$

Esempi

$2 = 3x - x^2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
$2 - x^2 = 2x^2 \rightarrow -3x^2 + 2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2 = 0$

Osservazione: nel secondo esempio in cui il coefficiente del termine di secondo grado è negativo abbiamo moltiplicato tutti i termini per -1 (si ottiene un'equazione equivalente) in modo da avere $a > 0$.

L'equazione scritta così si dice **scritta in forma "normale"** e c è detto **termine noto.**

Nota: a volte occorre svolgere diversi calcoli per riportarla in forma "normale".

Esempio:

$$x(x-1) + 3x = (2x-1)(2x+1) \rightarrow x^2 - x + 3x = 4x^2 - 1 \rightarrow x^2 - x + 3x - 4x^2 + 1 = 0$$
$$-3x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Come per tutte le equazioni, una **soluzione** (chiamata anche "radice") dell'equazione è un valore che sostituito all'incognita rende vera l'uguaglianza fra i due membri.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Vediamo degli esempi.

1) Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 - 1 = 0$$

Possiamo ricavare

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \quad \text{cioè} \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

Abbiamo perciò due soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Infatti se sostituiamo:

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

2) Consideriamo l'equazione $4x^2 + 1 = 0$

In questo caso abbiamo:

$x^2 = -\frac{1}{4}$ e non ci sono soluzioni reali poiché nessun quadrato risulta negativo.

3) Consideriamo l'equazione $3x^2 - x = 0$

Come possiamo risolverla ?

Nota

Quando in un polinomio c'è un *termine comune* a tutti monomi possiamo "raccoglierlo" perché è come se tornassimo indietro rispetto alla moltiplicazione per quel fattore.
Nel nostro caso se raccogliamo x (perché è presente sia nel fattore $3x^2$ che nel fattore $-x$) possiamo scrivere

$$x(3x - 1) = 0$$

(infatti se svolgiamo la moltiplicazione ritroviamo $3x^2 - x$)
Ma a questo punto, per la legge di annullamento del prodotto, possiamo dire che le soluzioni dell'equazione sono:

$$\boxed{x = 0} \quad \text{oppure} \quad 3x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione data sono $x_1 = 0 \quad \cup \quad x_2 = \frac{1}{3}$.

4) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4x - 5 = 0$

Come possiamo risolverla?

Se riuscissimo a scriverla nella forma $(...........)^2 = numero$ poi potremmo procedere come nei primi due esempi.

- Cominciamo a spostare il termine noto: nel nostro caso abbiamo
$$x^2 + 4x = 5$$
- Aggiungiamo ad entrambi i membri dell'equazione un numero in modo che $x^2 + 4x + ..$ risulti il quadrato di un binomio (questo metodo si chiama "**completamento del quadrato"**).

E' chiaro che $4x$ dovrà essere il doppio prodotto e quindi dividendo il coefficiente 4 per 2 otteniamo il 2° termine del binomio $\frac{4}{2} = 2$: aggiungiamo quindi 2^2 ad entrambi i membri (per ottenere un'equazione equivalente) ed abbiamo:

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

In questo modo l'equazione può essere scritta nella forma

$$\boxed{(x+2)^2 = 9}$$

- A questo punto, essendo 9 un numero positivo, possiamo andare avanti

$$x + 2 = \pm\sqrt{9} \to x + 2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2 = 3 \to x = 3 - 2 = 1 \\ x + 2 = -3 \to x = -3 - 2 = -5 \end{array}$$

Abbiamo quindi che le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = -5$$

Formula risolutiva di un'equazione di secondo grado

Proviamo a generalizzare, utilizzando le lettere, il procedimento che abbiamo seguito nell'ultimo esempio.

Consideriamo $ax^2+bx+c=0, \quad a \neq 0$

- Spostiamo il termine noto:

$$ax^2+bx=-c$$

- Prima di completare il quadrato dividiamo tutto per a (i calcoli risulteranno più semplici):

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

- Completiamo il quadrato: ricordiamo che, dovendo essere $\frac{b}{a}x$ il doppio prodotto, dobbiamo aggiungere il quadrato di: $\frac{\frac{b}{a}}{2}=\frac{b}{2a}$

Quindi:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Facendo qualche calcolo:

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

a) Se $\boxed{b^2-4ac \geq 0}$ possiamo estrarre la radice quadrata ed abbiamo:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

b) Se $\boxed{b^2-4ac<0}$ **non abbiamo soluzioni reali**

Nota: b^2-4ac viene chiamato "***discriminante***" dell'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ed indicato con la lettera Δ cioè $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

Osservazione 1

Se $\boxed{\Delta > 0}$ **le soluzioni dell'equazione sono "distinte"** cioè sono due valori diversi (vedi esempio 4: $x^2 + 4x - 5 = 0$).
Se $\boxed{\Delta = 0}$ **le soluzioni sono "coincidenti"** cioè abbiamo un unico valore.

Esempio: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Infatti $x^2 + 4x + 4$ è il quadrato di $x + 2$ e quindi abbiamo:

$$(x+2)^2 = 0$$

Il quadrato è nullo se $\quad x + 2 = 0 \to x = -2 \quad (x_1 = x_2 = -2)$

Se $\boxed{\Delta < 0}$ **non ci sono soluzioni reali.**

Osservazione 2

Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si ha $b = 0$ oppure $c = 0$ (si dice che l'equazione non è completa) *non conviene usare la formula risolutiva* generale che abbiamo trovato ma procedere come abbiamo fatto nei primi esempi.

Generalizziamo quegli esempi usando le lettere.

- Se $\boxed{b = 0}$ abbiamo $ax^2 + c = 0$.

Spostiamo il termine noto:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

a) Se $-\frac{c}{a} \geq 0$ allora $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (la scrittura $x_{1,2}$ indica che ci sono due soluzioni x_1, x_2).

Vedi l'esempio 1: $4x^2 - 1 = 0$.

b) Se $-\frac{c}{a} < 0$ allora l'equazione non ha soluzioni reali (vedi esempio 2: $4x^2 + 1 = 0$).

- Se $\boxed{c = 0}$ abbiamo $ax^2 + bx = 0$

Mettiamo in evidenza la *x*: $\quad x(ax + b) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo quindi:

$$x_1 = 0 \text{ oppure } ax + b = 0 \to x_2 = -\frac{b}{a}$$

(vedi l'esempio 3 : $3x^2 - x = 0$).

Osservazioni

Somma delle soluzioni

Proviamo a sommare le soluzioni x_1, x_2 ottenute con la formula risolutiva:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$
$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

In conclusione si ha: $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

Prodotto delle soluzioni

Vediamo cosa si ottiene moltiplicando le soluzioni:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) =$$
$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

In conclusione si ha: $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

Scomposizione di $ax^2 + bx + c$

Se $\Delta \geq 0$ abbiamo due soluzioni (distinte o coincidenti) dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e possiamo scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1 \cdot x_2\right] =$$
$$= a\left[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2\right] = a\left[x\left(x - x_1\right) - x_2\left(x - x_1\right)\right] =$$
$$= a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

In conclusione $\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\cdot\left(x - x_2\right)}$

Esempi

1) Consideriamo $2x^2 - x - 1$: poniamo $2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

Si ha quindi: $2x^2 - x - 1 = 2\left(x - 1\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)$

2) Consideriamo $4x^2 - 12x + 9$: poniamo $4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{4} = \frac{3}{2}$

Si ha quindi: $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

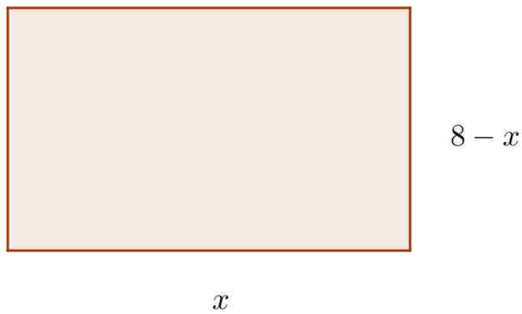
Problemi di secondo grado

Spesso risolvendo un problema (di geometria analitica, euclidea ecc.), dopo aver posto come incognita x la misura di un segmento o qualche altra quantità, ci si trova a dover risolvere un'equazione di secondo grado.
Vediamo qualche esempio.

Esempio 1

Determina le lunghezze dei lati di un rettangolo di area $15\ cm^2$ *e perimetro* $16\ cm$.

Se $2p = 16\ cm \rightarrow p = 8\ cm$ (semiperimetro). Quindi, se indichiamo con x un lato del rettangolo, l'altro risulterà $8 - x$.



Ma dal momento che l'area è $15\ cm^2$ avremo:

$$x(8-x) = 15 \rightarrow 8x - x^2 = 15 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

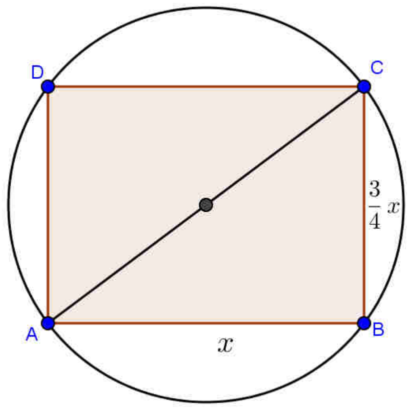
Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado che risolta dà:

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array} \right.$$

Osserviamo che se $x = 5$ allora l'altra dimensione è $8 - 5 = 3$ e che se $x = 3$ allora l'altra dimensione è $8 - 3 = 5$, cioè le dimensioni del rettangolo sono in ogni caso 3 e 5.

Esempio 2

I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 30 cm stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$. *Determina l'area del rettangolo.*



Se indichiamo con x la misura di un lato, l'altro lato sarà $\frac{3}{4}x$ ed **applicando il teorema di Pitagora** (ricordiamo che il diametro coincide con la diagonale del rettangolo) avremo:

$$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=30^2$$

Sviluppando:

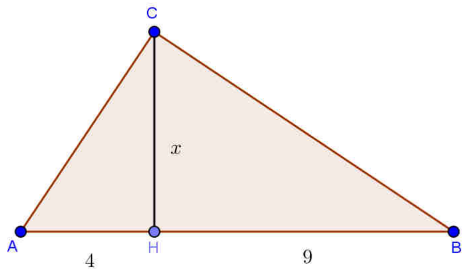
$$x^2+\frac{9}{16}x^2=900\rightarrow\frac{25}{16}x^2=900\rightarrow x^2=576\rightarrow x=24$$

($x^2=576\rightarrow x=\pm 24$ ma è accettabile solo la soluzione positiva).

Quindi l'altro lato risulta $\frac{3}{4}\cdot 24=18$ e possiamo calcolare l'area del rettangolo è : $A=24\cdot 18=432\ \ cm^2$

Esempio 3

Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo sapendo che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 4 cm e 9 cm.



Abbiamo che $\overline{AH}=4\ \ cm$, $\overline{HB}=9\,cm$.

Se indichiamo con x la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, applicando il **secondo teorema di Euclide** abbiamo che

$$x^2=4\cdot 9\rightarrow x^2=36\rightarrow x=6$$

($x^2=36\rightarrow x=\pm 6$ ma la soluzione negativa non è accettabile poiché x rappresenta una misura).

Quindi $\overline{AC}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\ \ cm$, $\overline{BC}=\sqrt{36+81}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}\ \ cm$

In conclusione abbiamo $2p=13+5\sqrt{13}\ \ cm$, $A=\frac{13\cdot 6}{2}=39\ \ cm^2$

ESERCIZI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado:

1) $2-x^2=0$; $\frac{1}{3}x^2-2x=0$; $9x^2=0$ [$\pm\sqrt{2}$; 0, 6; $x=0(doppia)$]

2) $7x-5x^2=0$; $4+3x^2=0$; $25=9x^2$ [0, $\frac{7}{5}$; *impossibile*; $\pm\frac{5}{3}$]

3) $\frac{1}{2}x^2=0$; $1-x^2=0$; $9x^2-12x=0$ [$x=0(doppia)$; ± 1; 0, $\frac{4}{3}$]

4) $-3x^2=-12$; $\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{5}x$; $\frac{1}{2}x^2-18=0$ [± 2; 0, $\frac{4}{5}$; ± 6]

5) $-4x^2=36$; $2x^2-\frac{8}{3}x=0$; $4-x^2=0$ [impossibile; 0, $\frac{4}{3}$; ± 2]

6) $3\sqrt{5}x^2=0$; $16x^2=1$; $-3x^2+6x=0$ [$x=0(doppia)$; $\pm\frac{1}{4}$; 0, 2]

7) $\frac{5}{3}(2x-3)(x+1)=10x-5$ [$x_1=0$, $x_2=\frac{7}{2}$]

8) $3x^2+\frac{3}{2}-\frac{(x+2)}{2}=\frac{3-x}{2}-\left(1+x^2\right)$ [$x_1=x_2=0$]

9) $\sqrt{5}\left(x^2-1\right)+1=x^2$ [$x_{1,2}=\pm 1$]

10) $11x+(x-2)^2+(2x+1)(x-3)=(x+1)^2-14$ [impossibile]

11) $2x^2-5x-3=0$ [$-\frac{1}{2}$, 3]

12) $4x^2-4x+1=0$ [$x_1=x_2=\frac{1}{2}$]

13) $x^2 - x + 2 = 0$ [impossibile]

14) $x^2 + 5x + 6 = 0$ [$x_1 = -3, \quad x_2 = -2$]

15) $x^2 - 5\sqrt{2}x + 12 = 0$ [$x_1 = 2\sqrt{2}, \quad x_2 = 3\sqrt{2}$]

16) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$ [$x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$]

17) $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} = 0$ [$x_1 = x_2 = -\frac{4}{5}$]

18) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 6 = 0$ [$x_1 = -2\sqrt{3}, \quad x_2 = -\sqrt{3}$]

19) $(2x+1)^2 - x^2 - (x-1)^2 = (2x+3)(2x-3) + 1$ [$x_1 = -1, \quad x_2 = 4$]

20) $(2-3x)(x-2) + 3(x-1)^2 = (x-1)(x+3)$ [$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$]

21) $(1-x)^2 = 2x + \frac{x^2 - 3x + 7}{2}$ [$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$]

22) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x(x+2) - 5x + \frac{1}{6} = \frac{x}{3}(x-5)$ [$x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$]

23) $\frac{6-3x}{5} + \frac{x^2+2}{15} - x = \frac{4-x^2}{3}$ [$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$]

24) $(x-1)^3 = x^2(x-1) - (x+3)(x-2) - 19$ [$x_1 = -2, \quad x_2 = 6$]

25) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right) + 2$ [$x_1 = -5, \quad x_2 = 0$]

26) $\frac{2x}{15} + \frac{x^2+x}{6} = \frac{(x+2)(x+1)}{10}$ [$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$]

27) $\frac{2}{3}\left(\frac{6+x}{2} - \frac{x-3}{4}\right) = \frac{(x-2)^2}{12} - \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$ [$x_1 = -2, \quad x_2 = 12$]

28) $x^2 + 8x - 9 = 0$ [$x_1 = -9, \quad x_2 = 1$]

29) $10x^2 + 8x + 5 = 0$ [impossibile]

30) $9 + 16x^2 + 24x = 0$ [$x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}$]

31) $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$ [$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$]

32) $x^2 = \frac{1}{3}(2x+1)$ [$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 1$]

33) $\frac{7}{4} - 3x - x^2 = 0$ [$x_1 = -\frac{7}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$]

34) $3x^2 + 4x - 4 = 0$ [$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -2$]

35) $4x^2 - 2 = 0$ [$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$]

36) $2x^2 + 1 = 0$ [impossibile]

37) $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ [$x_1 = 0; \quad x_2 = -6$]

38) $(x-3)\cdot(x+3) = 3x\cdot(x-1) + 3x - 9$ [$x_1 = x_2 = 0$]

39) $x\cdot(x+3) + 1 = (1+x)^2 - 2x\cdot\left(1 + \frac{1}{2}x\right)$ [$x_1 = 0; \quad x_2 = -3$]

40) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ [$x_1 = 2\sqrt{2}; \quad x_2 = \sqrt{2}$]

Scomponi i seguenti trinomi di secondo grado:

41) $6x^2 + 13x + 7$ [$6(x+1)\left(x + \frac{7}{6}\right)$]

42) $4x^2 - 8x + 3$ [$4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$]

43) $x^2 + 6x + 5$ [$(x+1)\cdot(x+5)$]

44) $2x^2 - 4x + 5$ [irriducibile]

45) $5x^2 + 4x + \frac{4}{5}$ [$5\cdot\left(x + \frac{2}{5}\right)^2$]

46) $4a^2 - 4a - 3$ [$(2a-3)\cdot(2a+1)$]

PROBLEMI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1) In un triangolo rettangolo un cateto misura 1 cm in più dell'altro e l'ipotenusa è 5 cm. Determina i cateti del triangolo.

[3 cm ; 4 cm]

2) Se in un quadrato un lato viene aumentato del 20% e un altro viene diminuito del 20%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato diminuita di 1 cm^2. Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

[5 cm]

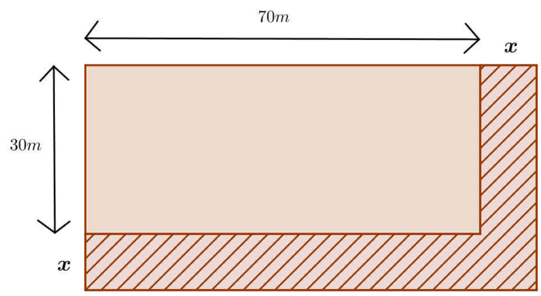
3) L'area di un rombo è $24 \ cm^2$ e una diagonale supera l'altra di 2 cm. Determina il perimetro del rombo.

[$2p = 20 \ cm$]

4) In un triangolo isoscele la base supera di 3 cm il lato obliquo e l'altezza è 12 cm. Determina il perimetro.

[$2p = 48 \ cm$]

5) Il proprietario di un terreno deve cederne una parte di area $416 \ m^2$ per la costruzione di una strada (vedi figura).Calcola *x*.



[$x = 4 \ m$]

6) Un rettangolo è inscritto in una circonferenza di raggio 13 cm e il suo perimetro è 68 cm. Determina i lati del rettangolo.

[$10 \ cm; \quad 24 \ cm$]

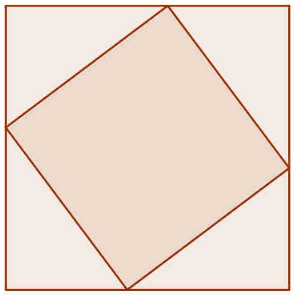
7) In un triangolo isoscele base e altezza stanno tra loro come 3 sta a 2 e il perimetro è 16 cm. Determina l'area.

[12 cm^2]

8) Un rettangolo ha area 40 cm^2 e i suoi lati misurano uno 3 cm in più dell'altro. Se si allungano entrambi i lati della stessa misura, si ottiene un rettangolo la cui area è 30 cm^2 in più dell'area iniziale. Determina il perimetro del nuovo rettangolo.

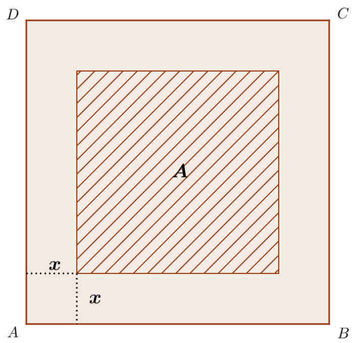
[34 cm]

9) In un quadrato di area 49 cm^2 è inscritto un quadrato di area 25 cm^2. Determina il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dal quadrato inscritto nel quadrato più grande.



[12 cm]

10) Osserva la figura: sapendo che l'area del quadrato ABCD è 256 cm^2 e che $A = 100$ cm^2 quanto vale x ?



[3 cm]

11) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro misura $80a$.

[300 a^2]

12) Due triangoli rettangoli congruenti hanno un cateto in comune, l'altro posto su rette parallele. Il perimetro di ciascun triangolo è $108a$, mentre quello del poligono individuato da essi è $144a$. Determina la lunghezza del cateto comune e dell'ipotenusa.

[$36a$; $45a$]

13) In un trapezio rettangolo una base è doppia dell'altra, l'altezza supera di 1 cm la base minore e l'area è $3\ cm^2$. Determina l'altezza del trapezio.

[2 cm]

14) In un rombo di perimetro $100k$, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è $60k$. Determina l'area del rombo.

[$600\ k^2$]

15) Il diametro di una semicirconferenza misura 15 cm. Calcola la lunghezza dei tre lati di un triangolo inscritto nella semicirconferenza sapendo che i due lati distinti dal diametro sono uno i $\frac{3}{4}$ dell'altro.

[15 cm; 12 cm; 9 cm]

16) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 25 cm e supera di 9 cm una delle proiezioni dei cateti. Determina l'area del triangolo.

[$150\ cm^2$]

17) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 50 cm e un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.

[120 cm]

18) Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa ed è anche il doppio dell'altra proiezione aumentato di $2a$. Determina l'area del triangolo.

[$150\ a^2$]

19) In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ volte il cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto misura $\frac{4}{5}\sqrt{5}\ cm$. Determina il perimetro del triangolo.

[$2p = \left(12 + 4\sqrt{5}\right)\ cm$]

20) L'area di un triangolo rettangolo è $80\ cm^2$. Determina l'ipotenusa sapendo che un cateto diminuito di 4 cm è pari al doppio dell'altro cateto.

[$4\sqrt{29}\ cm$]

21) Un quadrato ha il perimetro di 24 cm. Un rettangolo ha lo stesso perimetro mentre l'area è $\frac{3}{4}$ di quella del quadrato. Determina le dimensioni del rettangolo.

[3 cm; 9 cm]

22) Un rettangolo di area $20 \; cm^2$ ha l'altezza minore della base di 1 cm. Calcola il perimetro del rettangolo.

[$2p = 18 \; cm$]

23) Un rettangolo ha le dimensioni di 5 cm e 2 cm. Vogliamo incrementare la base e l'altezza di una stessa quantità in modo da ottenere un secondo rettangolo che abbia l'area di $70 \; cm^2$. Determina tale quantità.

[5 cm]

24) Un rettangolo ha il perimetro $2p = 14cm$ e l'area $A = 10cm^2$. Determina le sue dimensioni.

[2; 5]

25) In una semicirconferenza di raggio $r = \frac{13}{2}cm$ è inscritto un triangolo avente perimetro $2p = 30cm$. Determina la misura dei cateti.

[5, 12]

26) In un trapezio rettangolo di area $12cm^2$, l'altezza supera di 1 cm la base minore e la base maggiore è il triplo della minore. Determina il perimetro del trapezio.

[$2p = 16cm$]

27) In un rombo di perimetro 80a, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è 48a. Determina l'area del rombo.

[$A = 384a^2$]

28) In un triangolo rettangolo l'area misura $120cm^2$ e il cateto maggiore supera di 4 cm il doppio del cateto minore. Determina il perimetro del triangolo.

[$2p = 60cm$]

29) In un triangolo isoscele la base supera di 1 cm l'altezza e il perimetro è 8 cm. Determina l'area del triangolo.

[$A = 3cm^2$]

30) Se in un quadrato un lato viene aumentato del 25% e un altro viene diminuito del 50%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato iniziale diminuita di $6cm^2$. Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

[4 cm]

SCHEDA DI VERIFICA

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

I) **Risolvi le seguenti equazioni**

1) a. $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$ $\qquad [x_1 = 0; \quad x_2 = 6]$

b. $x^2 + 5x + 7 = 0$ $\qquad$ [impossibile]

c. $2x^2 - 5x - 3 = 0$ $\qquad [x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 3]$

d. $9x^2 - 6x + 1 = 0$ $\qquad [x = \frac{1}{3}]$

2) $2(x-1) - \frac{5}{4}x = \frac{3-5x}{4} - 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$ $\qquad [x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}]$

3) $x \cdot \left(2x - 3\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(x+1)(x-1) = (x-1)\cdot(x-4) - \frac{1}{2}x(x-10) - \frac{1}{2}$ $\qquad [-\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2\sqrt{2}]$

II) **Risolvi i seguenti problemi**

1) In un trapezio rettangolo ABCD , l'altezza è il doppio della base minore e la base maggiore supera di 6 cm la minore. Sapendo che l'area misura $56\,cm^2$, determina il perimetro del trapezio.
$[2p = 32cm]$

2) In un triangolo isoscele ABC il perimetro misura 36 cm e l'altezza relativa alla base AB misura 6 cm. Determina l'area del triangolo. $[A = 48cm^2]$

3) In un triangolo rettangolo ABC le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misura 2 cm e 8 cm. Determina perimetro e area del triangolo.
$[2p = (6\sqrt{5} + 10)cm; \quad A = 20cm^2]$

4) In un rettangolo ABCD se si uniscono i punti medi dei lati si ottiene un rombo di area $60a^2$. Sapendo che il perimetro del rettangolo è $46a$, determina le dimensioni del rettangolo.

$[8a; \quad 15a]$

SCHEDA PER IL RECUPERO
EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

I) Risolvi le seguenti equazioni:

a. $4x-\frac{1}{2}x^2=0$ [$x_1=0;\quad x_2=8$]

b. $2x^2-x-6=0$ [$x_1=-\frac{3}{2};\quad x_2=2$]

c. $x^2+4x+5=0$ [impossibile]

d. $\frac{1}{4}x^2+x+1=0$ [$x_1=x_2=-2$]

2) $2(x-3)-\frac{5}{6}x=\frac{3-5x}{6}-(x-1)^2$ [$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$]

3) $x^2-\frac{1}{2}(x-1)(x+1)=\sqrt{2}x+1$ [$x_{1,2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$]

II) **Risolvi i seguenti problemi**

1) Calcola il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo sapendo che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 1 cm e 4 cm.

[$2p=(5+3\sqrt{5})cm;\quad A=5\,cm^2$]

2) In un trapezio rettangolo ABCD , l'altezza è il doppio della base minore e la base maggiore supera di 6 cm la minore. Sapendo che l'area misura 56 cm^2 , determina il perimetro del trapezio.

[$2p=32cm$]

3) I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di raggio 13 cm stanno tra loro nel rapporto $\frac{5}{12}$. Determina l'area del rettangolo.

[$A=240cm^2$]

4) In un triangolo isoscele l'altezza è uguale alla base. Sapendo che l'area misura $8cm^2$, determina il perimetro del triangolo.

[$2p=4+4\sqrt{5}$]