I radicali

I) Consideriamo l'operazione che associa ad un numero il suo quadrato

$$x \to x^2$$

Per esempio:

$$3 \to 3^2 = 9$$
$$(-3) \to (-3)^2 = 9$$
$$2 \to 2^2 = 4$$
$$(-2) \to (-2)^2 = 4$$

Possiamo definire l'operazione inversa?

È possibile, dato un numero a, individuare un numero di cui a è il quadrato?

$$? \leftarrow 9$$
$$? \leftarrow -5$$

1° osservazione
Ci accorgiamo subito che se $a < 0$ non troviamo nessun numero che elevato al quadrato dia come risultato a.
Quindi dovremo limitare il campo ai numeri positivi $a \geq 0$.

2° osservazione
Se consideriamo per esempio $a = 9$ abbiamo due numeri che hanno come quadrato 9

$$3 \leftarrow 9 \qquad (3^2 = 9)$$
$$(-3) \leftarrow 9 \qquad ((-3)^2 = 9)$$

Ma poiché non possiamo associare ad un'operazione due risultati i matematici hanno stabilito di prendere il numero positivo (nel nostro caso 3)

$$3 \leftarrow 9$$

Il simbolo usato per indicare l'operazione inversa del "fare il quadrato" e chiamata radice quadrata di a è $\sqrt{a}$.
Quindi, per esempio, abbiamo $\sqrt{9} = 3$, mentre non associamo (per ora) nessun significato alla scrittura $\sqrt{-9}$.

Nota: il simbolo $\sqrt{\ }$ è la stilizzazione di r che sta per "radice".

Problema

Ma se estraiamo la radice quadrata di un numero che non è un quadrato, per esempio $a = 2$, il simbolo $\sqrt{2}$ quale numero rappresenta?

$$\sqrt{2} = ?$$

Se usiamo la calcolatrice, digitando $\sqrt{2}$ otteniamo

1,414213562…..

Sappiamo che i numeri razionali corrispondono a numeri decimali finiti o illimitati **periodici** mentre questo numero non sembra avere un periodo….

Il periodo potrebbe essere molto lungo e magari potrei non essermi accorto della ripetizione…

Ma in realtà fin dall'antichità è stato "**dimostrato**"(*) che $\sqrt{2}$ **non è un numero decimale periodico** perché non può essere scritto come frazione.

(*)Il ragionamento è questo: supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2}$ corrisponda ad un numero razionale. Possiamo sempre ridurlo ai minimi termini cioè considerare a e b primi tra loro

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Ma allora:

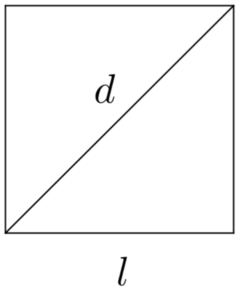
- se a è pari (e quindi b non può esserlo perché sono primi tra loro) allora a^2 è divisibile per 4 mentre $2b^2$ non lo è (b^2 è dispari $\Rightarrow 2b^2$ è divisibile per 2 ma non per 4);
- se a è dispari $\Rightarrow a^2$ è dispari mentre $2b^2$ è pari.

In conclusione non può sussistere l'uguaglianza $a^2 = 2b^2$.

Nota storica

$\sqrt{2}$ corrisponde al rapporto tra la misura della diagonale e il lato di un quadrato.

La scoperta che diagonale e lato di un quadrato non sono "confrontabili" tra loro (cioè il loro rapporto non è un numero razionale) fu fatta dalla scuola pitagorica e tenuta segreta per lungo tempo.



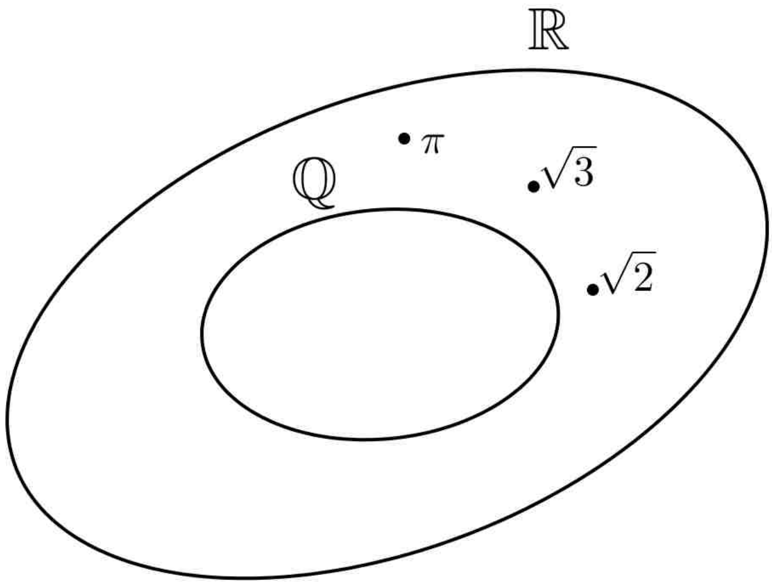
Infatti, dal teorema di Pitagora abbiamo

$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot l$

I matematici hanno chiamato i **numeri decimali illimitati aperiodici** (a = senza – periodo) numeri irrazionali (cioè non razionali) ed hanno chiamato **numeri reali $\Re$ l'unione dei numeri razionali e irrazionali**.

Non ci sono solo $\sqrt{2}$ (o $\sqrt{3}$ ecc..) tra i numeri irrazionali: in seguito sono stati scoperti anche altri numeri che hanno una rappresentazione decimale illimitata aperiodica ma che non sono radici.

Un esempio è π che rappresenta il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro.



Osservazione

Inizialmente avevamo considerato i numeri naturali N, avevamo poi ampliato N perché fosse sempre possibile effettuare la sottrazione tra due numeri ottenendo Z;

per poter sempre eseguire la divisione tra numeri interi appartenenti a Z avevamo introdotto l'insieme dei numeri razionali Q;

per poter eseguire l'operazione inversa della potenza abbiamo infine introdotto i numeri irrazionali che, uniti ai razionali, danno l'insieme dei numeri reali $\Re$.

II) È chiaro che, come abbiamo definito l'operazione di radice quadrata come operazione inversa dell'elevamento al quadrato, possiamo definire *l'operazione di radice cubica come operazione inversa dell'elevamento al cubo*.

Per esempio se consideriamo

$$x \to x^3$$

ci accorgiamo che non ci sono i problemi trovati nel caso dell'elevamento al quadrato perché si ottengono come risultati numeri positivi e negativi e non ci sono numeri diversi che danno lo stesso risultato.

Per esempio:

$$2 \to 2^3 = 8$$
$$-2 \to (-2)^3 = -8$$

Quindi:

$$2 \leftarrow 8$$
$$-2 \leftarrow -8$$

Possiamo indicare l'estrazione di radice cubica di a con il simbolo

$$\sqrt[3]{a}$$

(a può essere sia negativo che positivo e il numero $\sqrt[3]{a}$ può risultare sia positivo che negativo).

Avremo quindi:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Ma se a non è un cubo, cosa rappresenta $\sqrt[3]{a}$?
Per esempio, $\sqrt[3]{2}$ che numero è?

Anche in questo caso, come per $\sqrt{2}$, ci troviamo di fronte ad un numero decimale illimitato aperiodico cioè ad un numero irrazionale.

III) È chiaro che in generale possiamo considerare l'operazione inversa dell'elevamento a potenza $n-$esima .
Avremo però due casi distinti:

- Se n **è pari** il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

avrà significato solo se $a \geq 0$ (elevando ad una potenza pari si ottengono sempre numeri positivi) e indicherà un numero positivo o nullo.

- Se n **è dispari** il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

avrà sempre significato e potrà essere sia positivo che negativo.

In generale $\sqrt[n]{a}$ **si chiama più brevemente "radicale"** (o radice $n-$esima di a)

$$\begin{cases} n & \text{viene chiamato } \textbf{INDICE} \text{ del radicale} \\ a & \text{viene chiamato } \textbf{RADICANDO} \end{cases}$$

Per quello che abbiamo precedentemente osservato **i radicali possono essere numeri razionali o irrazionali**.

Esempi

$\sqrt{25} = 5 \in Q$
$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad \in Q$
$\sqrt{5} \notin Q$ (numero irrazionale)
$\sqrt[3]{2} \notin Q$ (numero irrazionale)

Nota

Osserviamo che se n è dispari possiamo sempre ricondurci ad avere un radicando positivo.
Per esempio:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Radicali equivalenti

Consideriamo radicali del tipo

$$\sqrt[n]{a^m}$$

con $a^m \geq 0$ perché anche nel caso di indice dispari ci si può ricondurre a considerare il radicando positivo o nullo.

m **viene detto esponente del radicando**.

Anche se sono scritti in forma diversa, due radicali possono rappresentare lo stesso numero?
Consideriamo per esempio $\sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{4}$: se proviamo con la calcolatrice otteniamo lo stesso numero!

Se scriviamo $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$ notiamo che, rispetto a $\sqrt{2}$, indice ed esponente del radicando sono stati moltiplicati per 2.

Inoltre osserviamo che elevando alla quarta otteniamo lo stesso numero:

$$(\sqrt{2})^4 = [(\sqrt{2})^2]^2 = 2^2$$
$$(\sqrt[4]{2^2})^4 = 2^2$$

Abbiamo quindi individuato questa proprietà

*Moltiplicando per uno stesso numero naturale (≠ 0) INDICE e ESPONENTE del radicando di un radicale si ottiene un radicale **"equivalente"** (a cui è associato cioè lo stesso numero reale).*

Nota

E' un po' come quando, moltiplicando per uno stesso numero naturale (≠ 0) numeratore e denominatore di una frazione si ottiene una frazione equivalente (cioè associata allo stesso numero razionale).

Naturalmente (per simmetria) se dividiamo indice ed esponente del radicando di un radicale per un divisore comune si ottiene un radicale equivalente.

$$\sqrt{2} \ \underset{\leftarrow}{\rightarrow} \sqrt[4]{2^2}$$

In simboli quindi abbiamo

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Riduzione di radicali allo stesso indice

Come possiamo "**confrontare"**(cioè stabilire qual è il maggiore) due radicali come $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$?

Possiamo "ridurli" allo stesso indice utilizzando la proprietà precedente: conviene prendere come indice il **minimo comune multiplo dei due indici**, nel nostro caso

$$m.c.m.(2,3) = 6$$

Quindi

$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$ (moltiplico per 3 indice ed esponente del radicando)

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}$ (moltiplico per 2 indice ed esponente del radicando)

Quindi ora confronto i radicandi ed ottengo

$$\sqrt[6]{2^3} < \sqrt[6]{3^2} \qquad \text{(poiché } 8 < 9\text{)}$$

Radicali simili

Quando due radicali hanno **stesso indice**, **stesso radicando** e differiscono al massimo per un fattore che li moltiplica (detto coefficiente del radicale) si dicono **simili.**

Per esempio $\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$ sono radicali simili

Esempio

$\sqrt[4]{9}$ e $2\sqrt{3}$ sono simili?

$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

Quindi sono simili.

Operazioni con i radicali

• Addizione e sottrazione

Possiamo sommare o sottrarre tra loro due radicali solo se sono simili.

Esempio: $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1+3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Se i radicali non sono simili non possiamo fare niente.
Esempio: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ rimane così!

NOTA: ricorda che

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}\ !!$$

Se infatti elevi al quadrato $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ottieni $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=2+3+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=5+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, mentre se elevi al quadrato $\sqrt{5}$ ottieni 5.

• Moltiplicazione e divisione

a) Radicali con lo stesso indice

Esempio: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=?$

Proviamo a scrivere $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}$: se eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza otteniamo

$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})^2=2\cdot 3$
$(\sqrt{2\cdot 3})^2=2\cdot 3$
e quindi l'uguaglianza è vera. Quindi in generale

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

b) Radicali con indice diverso

Esempio: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=?$

Possiamo provare a ridurli allo stesso indice e poi procedere come nel caso precedente.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}$$

Analogamente per la divisione:

a') Divisione tra radicali con lo stesso indice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

b') Divisione tra radicali con indice diverso

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2}}$$

"Trasportare fuori" dal segno di radice

Possiamo scrivere $\sqrt{32}$ in modo diverso?

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Proprietà della moltiplicazione}}}{=} \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Quindi utilizzando la regola della moltiplicazione tra radicali a volte riusciamo a scrivere un radicale in modo diverso e *diciamo che abbiamo trasportato un fattore fuori dal segno di radice.*

Esempi

1) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

2) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

3) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

Nota
Questo può essere importante se dobbiamo sommare o sottrarre radicali che a prima vista non sembrano simili.

Esempi
1) $\sqrt{50} + \sqrt{8} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

2) $\sqrt{27} + \sqrt{12} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

- **Potenza di un radicale**

Come si calcola la potenza di un radicale?

Per esempio: $(\sqrt{5})^3 = ?$

Poiché abbiamo $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5^3}$ in generale possiamo dire che la potenza di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza n-esima del radicando.
In simboli:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

- **Radice di un radicale**

Come si calcola la radice di un radicale?

Come risulta, per esempio:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = ?$$

Proviamo a vedere se $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$
Elevando alla sesta entrambi i membri abbiamo lo stesso risultato:

$$(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6 = [(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3]^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(\sqrt[6]{2})^6 = 2$$

Quindi in generale la radice m-esima di un radicale con indice n sarà un radicale che ha per indice il prodotto $m \cdot n$ e lo stesso radicando

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

"Razionalizzazione" del denominatore di una frazione

I. Consideriamo la frazione $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Possiamo trasformarla in una frazione equivalente che non abbia radici al denominatore?

Possiamo moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{2}$ e otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e diciamo che abbiamo razionalizzato il denominatore.

E se consideriamo $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$?

In questo caso moltiplicando per $\sqrt[3]{2}$ ottengo al denominatore $\sqrt[3]{2^2}$ e non riesco a "sbarazzarmi" del radicale. Moltiplicando però per $\sqrt[3]{2^2}$ ….

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

In generale quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

II. A volte si trovano frazioni del tipo $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Come possiamo, in questo caso, "razionalizzare" il denominatore?

Ricordando il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ possiamo moltiplicare per $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ numeratore e denominatore

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(-1)} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Analogamente, se avessimo avuto $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ moltiplicando per $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(-1)} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Radicali come potenze con esponente razionale

I radicali possono essere anche scritti come potenze con esponente razionale e le **proprietà usuali delle potenze corrispondono alle proprietà che abbiamo visto per i radicali**.

Possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a > 0)$$

Per esempio:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{4}}$$

Osserviamo che

- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}}$

  Infatti $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

  Infatti $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5}$

- $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = (\frac{5}{2})^{\frac{1}{3}}$

  Infatti $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$

  Infatti $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{2}$

- $(\sqrt{2})^3 = (2^{\frac{1}{2}})^3 = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$

- $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$

  Infatti $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

Radicali letterali

Campo di esistenza di un radicale letterale

Radicali con indice pari

Abbiamo visto che il radicando deve essere positivo o nullo. Se quindi abbiamo

$$\sqrt{a-1}$$

dovrà essere $a-1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

$a \geq 1$ viene chiamato **campo di esistenza** del radicale $\sqrt{a-1}$.

Radicali con indice dispari

Se l'indice è dispari il radicando può essere negativo, positivo o nullo. Se per esempio abbiamo

$$\sqrt[3]{a-1}$$

non c'è nessuna limitazione per a e quindi il campo di esistenza è l'insieme dei numeri reali:

$$\text{C.E. } \forall a \in \Re$$

Naturalmente se consideriamo un'espressione letterale contenente delle *frazioni*, i denominatori dovranno essere diversi da zero.

Per esempio il campo di esistenza di $\sqrt[3]{\frac{1}{a-1}}$ sarà $a \neq 1$ (tutti i valori di a escluso $a = 1$).

Operazioni con radicali letterali

Dobbiamo premettere la seguente definizione:

Valore assoluto di un numero reale: il valore assoluto di un numero reale x è indicato con la notazione $|x|$ ed è definito:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Quindi $|x|$ è sempre positivo o nullo.

Esempi

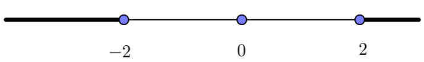
$|5| = 5$

$|-3| = -(-3) = +3$

$|x| = 2 \Rightarrow x = -2 \cup x = 2$

Se abbiamo $|x| < 2$ vuol dire che $-2 < x < 2$

Se abbiamo $|x| > 2$ vuol dire che $x < -2 \cup x > 2$



Osservazione

- $\sqrt{x^2}$ è uguale a x?

Osserviamo che, per esempio che $\sqrt{3^2} = 3$ e che $\sqrt{(-3)^2} = 3$
Quindi, solo se $x \geq 0$ vale $\sqrt{x^2} = x$, mentre se $x < 0 \rightarrow \sqrt{x^2} = -x$.

Quindi, ricordando la definizione di valore assoluto di un numero, abbiamo che:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Lo stesso vale per $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ ecc…, cioè

$$\textbf{se } n \textbf{ è pari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

- $\sqrt[3]{x^3}$ è uguale a x?

Osserviamo che, per esempio, $\sqrt[3]{3^3} = 3$ e $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

Quindi in questo caso $\sqrt[3]{x^3} = x$ e in generale

$$\textbf{se } n \textbf{ è dispari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = x$$

Trasporto fuori dalla radice

Quando trasportiamo fuori dalla radice occorre ricordare quanto sopra osservato.

Per esempio:

- $\sqrt{a^3 + a^2} = \sqrt{a^2(a+1)} = |a|\sqrt{a+1}$ (C.E. $a \geq -1$)
- $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt{a}$ (non importa mettere $|a^2|$ perché $a^2 \geq 0$; C.E. $a \geq 0$)

Se l'indice è dispari non ci sono particolari problemi

- $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a} = a \cdot \sqrt[3]{a}$
- $\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

ESERCIZI
RADICALI

1) Trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili

a) $\sqrt{24}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[5]{64}$

b) $\sqrt{18}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

2) Svolgi le operazioni tra radicali

a) $\sqrt{18}+\sqrt{2}$ [$4\sqrt{2}$]

b) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}$ [$\sqrt[3]{2}$]

c) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{36}$ [$3+\sqrt{6}$]

d) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$ [$2\sqrt[3]{3}$]

e) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{15}$ [$2\sqrt{30}$]

f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$ [$\sqrt[6]{2^3\cdot 5^2}$]

g) $\sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{2}$ [$5\sqrt[6]{2^5}$]

h) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$ [$\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$]

i) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{3}}$ [$2\sqrt[6]{\frac{4}{27}}$]

l) $(\sqrt{3})^3$ [$3\sqrt{3}$]

m) $(\sqrt[4]{8})^2$ [$2\sqrt{2}$]

n) $\sqrt{\sqrt{3}}$ [$\sqrt[4]{3}$]

o) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ [$\sqrt[6]{2}$]

3) Razionalizza il denominatore delle seguenti frazioni

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\dfrac{3}{\sqrt{7}+1}$; $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$ [$\sqrt{2}+1$; $\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$; $\sqrt{6}+1$]

c) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$; $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}$ [$\sqrt{5}-1$; $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; $5(\sqrt{3}+1)$]

4) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$ [0]

5) $2\sqrt{3}-\sqrt{48}-\sqrt{27}$ [$-5\sqrt{3}$]

6) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{72}$ [$6\sqrt{2}$]

7) $2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{32}+3\sqrt{27}-\sqrt{18}+3\sqrt{\frac{2}{9}}$ [$\frac{23}{2}\sqrt{3}-10\sqrt{2}$]

8) $\sqrt{\frac{3}{9}}+\frac{1}{10}\sqrt{125}-\frac{1}{4}\sqrt{20}+\sqrt{45}-\frac{1}{3}\sqrt{12}$ [$3\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{3}$]

9) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{12}-\sqrt{6})\sqrt{12}$ [$6(\sqrt{6}-\sqrt{2}+4)$]

10) $(2\sqrt{7}-3)(2\sqrt{7}+3)-(\sqrt{7}+1)^2-(\sqrt{7}-2)^2$ [$2\sqrt{7}$]

11) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{3})$ [17]

12) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ [1]

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}-\sqrt{8}$ [$\frac{3}{2}\sqrt{2}$]

14) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\sqrt{45}$ [$\frac{10\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$]

15) $(\sqrt[3]{2})^4+\sqrt[3]{54}$ [$5\sqrt[3]{2}$]

16) $\sqrt{18}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\sqrt{32}}$ [$2\sqrt[6]{32}$]

17) $\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt{2}}+\sqrt{10}$ [$\frac{3}{2}\sqrt{10}$]

18) $\sqrt{\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ [$\frac{5}{2}\sqrt[4]{2}$]

19) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\sqrt{8}$ [$\sqrt{2}-1$]

20) $2\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{125}-3\sqrt{20}+8\sqrt{5}$ [$\frac{3}{2}\sqrt{5}$]

21) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ $[\frac{21}{2}\sqrt[3]{3}]$

22) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ $[-4-\sqrt{6}]$

23) $(1-2\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2-3$ $[12]$

24) $\dfrac{2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}+(1-\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$ $[\frac{30-17\sqrt{2}}{7}]$

25) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{2})^2$ $[2\sqrt{2}-2]$

26) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(3\sqrt{2}+1)$ $[\sqrt{2}-4]$

27) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right):\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$ $[0]$

28) $[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^2-(2-\sqrt[4]{4})^2-4\sqrt{2}$ $[-5]$

29) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$ $[\frac{3\sqrt{3}-6}{5}]$

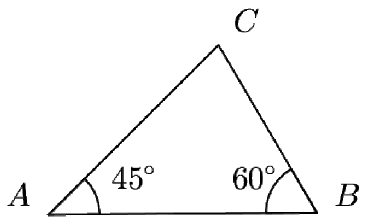
30) $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$ $[10]$

PROBLEMI
RADICALI

1) In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{BC} = 12cm$ e $\hat{A} = 120°$. Determinare perimetro e area del triangolo.

$[\, 2p = 8\sqrt{3} + 12cm\, ;\, A = 12\sqrt{3}cm^2\,]$

2) Considera il triangolo ABC in figura. Sapendo che $\overline{BC} = 6a$, determina perimetro e area del triangolo.

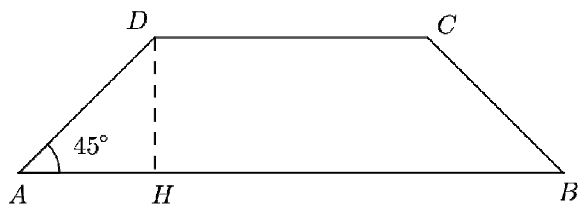


$[\, 2p = 3a(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})\, ;\, A = \dfrac{9a^2(3+\sqrt{3})}{2}\,]$

3) L'area di un esagono regolare è $216\sqrt{3}cm^2$. Determinare il perimetro.

$[\, 2p = 72cm\,]$

4) Considera il trapezio isoscele in figura. Determina perimetro e area.



$\overline{DH} = 16cm$

$\overline{DC} = 20cm$

$[\, 2p = 72 + 32\sqrt{2}cm\, ;\, A = 576cm^2\,]$

5) Considera un trapezio isoscele $ABCD$ avente base minore $\overline{CD} = 10a$, lato obliquo $\overline{AD} = \overline{BC} = 12a$ e gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano $30°$. Determina perimetro e area del trapezio.

$[\, 2p = 44a + 12a\sqrt{3}\, ;\, A = 12a^2(5+3\sqrt{3})\,]$

6) Considera un triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$. Sapendo che $B\hat{A}C = 30°$, determina perimetro e area del triangolo.

$[\, 2p = (3+\sqrt{3})r\, ;\, A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2\,]$

7) Considera i punti $A(2;2)$, $B(8;5)$, $C(-1;8)$.

a) Determina perimetro e area del triangolo *ABC*.

b) Detto M il punto medio di BC, determina $\overline{AM}$ e verifica che $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

$[\,2p = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{10}\,;\, A = \frac{45}{2}\,;\, \overline{AM} = \frac{3}{2}\sqrt{10}\,]$

8) Considera le rette $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 2x - 6$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Determina i loro punti di intersezione *A, B, C, D*.

Come risulta il quadrilatero *ABCD*? Calcola perimetro a area.

$[\,2p = 8\sqrt{5}\,;\, A = 12\,]$

9) Considera i punti $A(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$, $B(\frac{9}{2};\frac{3}{2})$, $C(2;4)$. Determina perimetro e area del triangolo *ABC*. Come risulta il triangolo *ABC*? Detto M il punto medio di AB, calcola $\overline{CM}$. La retta per *C* e *M* è perpendicolare alla retta per *A* e *B*?

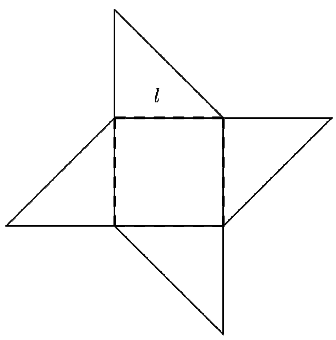
$[\,2p = 5\sqrt{2} + \sqrt{10}\,;\, A = 5\,]$

10) Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(3;0)$, $C(3;6)$ e determina il baricentro *G*.

Detto M il punto medio di AC, verifica che $\overline{BG} = 2\overline{GM}$.

$[\,BG = \frac{4\sqrt{5}}{3}\,;\, GM = \frac{2\sqrt{5}}{3}\,]$

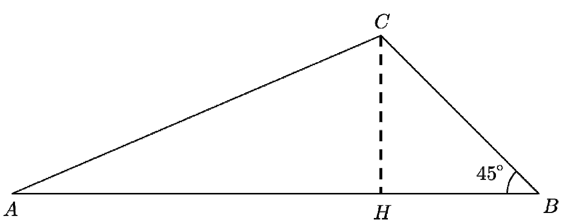
11) Considera il disegno in figura e calcola perimetro e area.



(lato del quadrato = l)

$[\,2p = 4(\sqrt{2}+1)l\,;\, A = 3l^2\,]$

12) Considera il triangolo *ABC* in figura. Determina perimetro e area del triangolo.



$\overline{CH} = 2$

$\overline{AC} = 6$

$[\,2p = 6\sqrt{2} + 8\,;\, A = 4\sqrt{2} + 2\,]$

SCHEDA DI VERIFICA
RADICALI

I) Sviluppa il calcolo nelle seguenti espressioni contenenti radicali:

1) $\sqrt{50}-\frac{1}{2}\sqrt{18}+\sqrt{32}+\frac{2}{3}\sqrt{75}-\sqrt{27}$ $\quad [\frac{15}{2}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}]$

2) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}+(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)+\frac{1}{4}\sqrt{125}$ $\quad [\frac{6\sqrt{5}+5}{4}]$

3) $\frac{1}{2}\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt[4]{32}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad [2\sqrt{2}+3\sqrt[4]{2}]$

4) $\sqrt{\frac{a+1}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{a^3}{a+1}}$ $\quad$ [C.E. $a \geq 0$; $\sqrt{a}$]

5) $\sqrt{4a^2-8a+4}$ $\quad [2|a-1|]$

II) Problemi

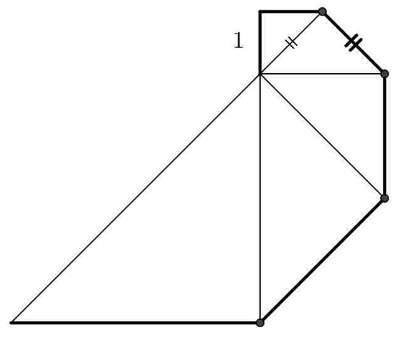
1) Considera un trapezio ABCD avente gli angoli adiacenti alla base maggiore AB avente $D\hat{A}B = 60°$; $A\hat{B}C = 30°$; $\overline{AD} = \overline{DC} = \sqrt{3}$. Determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = 5\sqrt{3}+3$]

2) Fissato un sistema di riferimento cartesiano, considera i punti $A(0;1)$; $B(2;3)$; $C(3;0)$. Determina il perimetro e, dopo aver calcolato la misura dell'altezza CH relativa ad AB, l'area del triangolo ABC.

[$2p = 2\sqrt{2}+2\sqrt{10}$; $A = 4$]

3) Disegna un triangolo rettangolo isoscele di cateti uguali ad 1 e sull'ipotenusa disegna un altro triangolo rettangolo isoscele come in figura e così via fino ad ottenere il disegno a fianco: determina la lunghezza del contorno della figura ottenuta e la sua area.



[$2p = 8+7\sqrt{2}$; $A = \frac{27}{2}$]

SCHEDA PER IL RECUPERO
RADICALI

I) Sviluppa il calcolo nelle seguenti espressioni contenenti radicali:

1) $\sqrt{12}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{72}+\sqrt{27}+\sqrt{50}$ [$5\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$]

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right):\frac{1}{\sqrt{8}}$ [8]

3) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{8}}-\sqrt{\sqrt{16}}+\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ [$\frac{13}{2}$]

4) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt[6]{2}\right)^4+\frac{1}{\sqrt{27}}$ [$\frac{7}{9}\sqrt{3}$]

1) $\sqrt{20}+3\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)^2$ [$6+3\sqrt{5}$]

II) Problemi

1) Considera un trapezio rettangolo *ABCD* avente base maggiore *AB* che forma un angolo di 45° con il lato obliquo. Sapendo che la base minore è uguale all'altezza e misura *l*, determina perimetro e area del trapezio.

[$2p=(4+\sqrt{2})l\,;\,A=\frac{3}{2}l^2$]

2) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza.
Sapendo che il lato obliquo misura *l* e che la base maggiore forma un angolo di 60° con il lato obliquo, determina perimetro, area del trapezio e il raggio della semicirconferenza.

[$2p=5l\,;\,A=\frac{3}{4}\sqrt{3}l^2\,;\,r=\frac{l}{2}\sqrt{3}$]

3) Disegna il triangolo di vertici $A(-1;2)$; $B(3;4)$; $C(5;0)$. Verifica che è isoscele. Determina perimetro e area.

[$2p=4\sqrt{5}$; $A=10$]