Sistemi di primo grado

Cominciamo con un problema: *determinare due numeri la cui somma è 10 e la cui differenza è 1.*

Possiamo risolvere questo problema utilizzando due incognite *x, y* per indicare i due numeri cercati.
Avremo quindi che dovrà essere (indicando con *x* il maggiore):

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=1 \end{cases}$$

La parentesi graffa sta ad indicare che le due equazioni devono essere soddisfatte entrambe e diciamo che abbiamo un "sistema" di due equazioni (che in questo caso risulta di primo grado in due incognite).

Ma come possiamo "risolvere" questo sistema di equazioni cioè **determinare i valori di *x* e di *y* che le soddisfano entrambe** ?

Possiamo ricavare l'incognita *x* dalla prima equazione e sostituirla nella seconda equazione, poi continuare a sviluppare la seconda equazione (che contiene a questo punto solo l'incognita *y*) e ricavare alla fine il valore di y.

$$\begin{cases} x=10-y \\ 10-y-y=1 \quad \rightarrow 10-2y=1 \quad \rightarrow 2y=9 \rightarrow y=\frac{9}{2} \end{cases}$$

A questo punto non ci rimane che sostituire il valore che abbiamo trovato di *y* nella prima equazione e determinare anche il valore dell'incognita *x* :

$$\begin{cases} x=10-\frac{9}{2}=\frac{11}{2} \\ y=\frac{9}{2} \end{cases}$$

In conclusione i due numeri sono $\frac{11}{2}$, $\frac{9}{2}$.

Metodi di risoluzione di un sistema di primo grado in due incognite

Primo passo: riduzione del sistema a "forma normale"

Se abbiamo un sistema di primo grado in due incognite per prima cosa dobbiamo svolgere i calcoli per ricondurlo nella forma cosiddetta "normale"

$$\underline{(*)} \qquad \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Esempio: se abbiamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)+2(y-1)=-\frac{1}{2}x-2 \\ 2(x-3)-(y+1)=x-6 \end{cases}$$

per prima cosa svolgiamo i calcoli per ricondurlo nella forma "normale":

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-1+2y-2=-\frac{1}{2}x-2 \rightarrow x+2y-1=0 \\ 2x-6-y-1-x+6=0 \rightarrow x-y-1=0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

A questo punto per risolverlo ci sono diversi metodi: vedremo solo il metodo di "sostituzione" e il metodo del "confronto".

Metodo di sostituzione

- Come abbiamo fatto nel primo esempio considerato, **ricaviamo una incognita** dalla prima o dalla seconda equazione (in genere da quella in cui l'incognita si ricava più facilmente): ricaviamo per esempio la x dalla prima equazione

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

- Sostituiamo l'espressione trovata per la x nella seconda equazione e, svolgendo i calcoli, determiniamo la y

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ -2y + 1 - y - 1 = 0 \Rightarrow -3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

- Torniamo nella prima equazione e sostituiamo a y il valore trovato, determinando così il valore della x e quindi la soluzione del sistema $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Metodo del confronto

Consideriamo sempre il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

- **Ricaviamo la stessa incognita da entrambe le equazioni**, per esempio la x

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

- Uguagliamo le due espressioni trovate e determiniamo la y ; riscriviamo inoltre una delle due equazioni

$$\begin{cases} -2y + 1 = y + 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

- Sostituiamo il valore trovato per la y nell'altra equazione e troviamo anche la x e quindi la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sistemi determinati, indeterminati, impossibili

Quante soluzioni può avere un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite ?

Dal momento che sia utilizzando il metodo di sostituzione che quello del confronto otteniamo ad un certo punto un'equazione di primo grado in una incognita, se questa è "determinata" (ha una soluzione) avremo una sola soluzione del sistema, se è "indeterminata" (verificata per tutti i valori dell'incognita) anche il sistema sarà indeterminato e se infine l'equazione è impossibile (nessuna soluzione) anche il sistema non avrà nessuna soluzione.

Esempi

1) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y+y=0 \rightarrow 1-y=0 \rightarrow y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2(1)=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi la soluzione $(-1;1)$ e si dice **"determinato**".

2) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y+2y=0 \rightarrow 1=0 \quad \textit{equazione} \quad \textit{impossibile} \end{cases}$$

Il sistema non ha nessuna soluzione e si dice "**impossibile**".

3) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 2(1-2y)+4y=2 \rightarrow 2-4y+4y=2 \rightarrow 2=2 \quad \textit{equazione} \quad \textit{ind.} \end{cases}$$

Il sistema ha quindi infinite soluzioni cioè tutte le coppie (x;y) per cui si abbia che $x=1-2y$ e si dice **"indeterminato**".

Per esempio:
se fisso $y=0 \rightarrow x=1-2\cdot 0=1$ e quindi la coppia $(1;0)$ è soluzione del sistema;
se fisso $y=1 \rightarrow x=1-2(1)=-1$ e quindi la coppia $(-1;1)$ è un'altra soluzione del sistema e così via…..

ESERCIZI
SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO IN DUE INCOGNITE

1) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ $[(6,3)]$

2) $\begin{cases} 5x+y=20 \\ 5x+7y=20 \end{cases}$ $[(4,0)]$

3) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x-2y=-8 \end{cases}$ [(0;4)]

4) $\begin{cases} x+8y=2 \\ 3x-y=31 \end{cases}$ [$(10;-1)$]

5) $\begin{cases} 4x+y=0 \\ 5x-y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$ [$\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$]

6) $\begin{cases} 2x+8y=16 \\ x-2y=11 \end{cases}$ [$\left(10;-\dfrac{1}{2}\right)$]

7) $\begin{cases} 4x+y=-3 \\ 3x-3y=-1 \end{cases}$ [$\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$]

8) $\begin{cases} 5x-2y=5 \\ x-15y=0 \end{cases}$ [$\left(-\dfrac{1}{5};-3\right)$]

9) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ [$\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$]

10) $\begin{cases} 6x+2y=1 \\ x+\dfrac{2}{3}y=1 \end{cases}$ [$\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{2}\right)$]

11) $\begin{cases} 7x-y=-5 \\ 21x+2y=0 \end{cases}$ [$\left(-\dfrac{2}{7};3\right)$]

12) $\begin{cases} 2x+3y=-9 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ [$(0;-3)$]

13) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{7},\frac{1}{7}\right)\right]$

14) $\begin{cases} x-6y+5=3-7y+10+2x+2 \\ x+y=6-8 \end{cases}$ $[(-6,4)]$

15) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$ $\left[\left(1,\frac{1}{2}\right)\right]$

16) $\begin{cases} 2x-\frac{1}{3}y=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{13},\frac{6}{13}\right)\right]$

17) $\begin{cases} 4x-y+1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\right]$

18) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)\right]$

19) $\begin{cases} 5(5x-2)=20x-2(y-3) \\ 2(x-5)-12y=21(1-y) \end{cases}$ $[(2,3)]$

20) $\begin{cases} 2x-\frac{1}{5}y=0 \\ x-\frac{1}{10}y=1 \end{cases}$ [impossibile]

21) $\begin{cases} x-2=\frac{y}{3}-1+\frac{x}{2} \\ \frac{5x+3y}{6}-3=\frac{2x-y}{4}+\frac{7}{12} \end{cases}$ $[(4,3)]$

22) $\begin{cases} x-\frac{y}{2}=\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{8}y=1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{3},-4\right)\right]$

23) $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ 18x-6y=-1 \end{cases}$ [impossibile]

24) $\begin{cases} y-3x=1 \\ x-\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

25) $\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1)+y-3=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x+1) \end{cases}$ $[(-1,3)]$

26) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ [indeterminato]

27) $\begin{cases} 1-4y-\frac{1}{3}x=0 \\ \frac{2}{3}x+8y=\frac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

28) $\begin{cases} \frac{2}{3}y+\frac{1}{5}x=5 \\ 2x-\frac{5}{6}y+3=8 \end{cases}$ $[(5,6)]$

29) $\begin{cases} \frac{x+2y}{3}+1=\frac{1}{3} \\ 3x+5y=-4 \end{cases}$ $[(2,-2)]$

30) $\begin{cases} \frac{3}{4}x+y=-2 \\ \frac{4}{5}y+x=2-\frac{x}{2} \end{cases}$ $[(4,-5)]$

31) $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+2y=\frac{1}{2} \end{cases}$ [indeterminato]

32) $\begin{cases} \frac{4}{3}x+\frac{1}{2}y=-\frac{15}{4} \\ \frac{y-x}{2}-1=\frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-3,\frac{1}{2}\right)\right]$

33) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)-3y=0 \\ x-\frac{1}{3}(x-y)=1 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{15}{11},\frac{3}{11}\right)\right]$

34) $\begin{cases} \frac{x-y}{2}-1=\frac{x+y}{3} \\ x-y+4=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{13}{2},-\frac{5}{2}\right)\right]$

35) $\begin{cases} 2-\frac{(x-y)}{4}=0 \\ x-\frac{1}{3}y+1=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{11}{2},-\frac{27}{2}\right)\right]$

36) $\begin{cases} (x+2)^2-3x+2y=9+x^2 \\ -5x+3(x-3)+x-y=-6 \end{cases}$ $[(-11,8)]$

37) $\begin{cases} 3x+2(y-4)^2=36+2y^2-15y+2x \\ 3(y-1)+2\left[x-(x-1)^2\right]=-2-2x(x-2) \end{cases}$ $[(3,-1)]$

38) $\begin{cases} (x-2y)^2-(x-y)^2-y(3y-2x)=x+y-2 \\ \frac{2x-y}{3}-\frac{x+2y}{6}-\frac{x-y}{2}=0 \end{cases}$ $[(2,0)]$

39) $\begin{cases} (x+2)^2-1=x^2-5y \\ 4x-1=-y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2},-1\right)\right]$

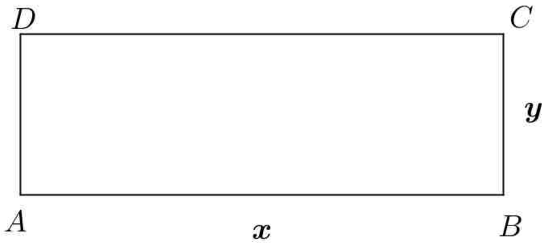
40) $\begin{cases} 3y+24+(y-2)^2+4y=4x+y^2+4 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ $[(3,-4)]$

PROBLEMI
SISTEMI DI PRIMO GRADO

1) Problema svolto

Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

Indichiamo con x la base e con y l'altezza.



Avremo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y=48 \\ 2y=\frac{2}{3}x \end{cases} \begin{cases} x+y=24 \rightarrow x+\frac{1}{3}x=24 \rightarrow \frac{4}{3}x=24 \rightarrow x=18 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} x=18 \\ y=6 \end{cases}$

2) In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo.

$[25cm, 15cm]$

3) Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo sapendo che la somma di $\frac{1}{2}$ della maggiore e di $\frac{1}{4}$ della minore è 7 cm e che, diminuendo la maggiore di 1cm e aumentando di 1 cm la minore le due diagonali diventano congruenti.

$[10cm, 8cm]$

4) Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo sapendo che il perimetro è 14 cm e che l'altezza supera la base di 1 cm.

$[5cm]$

5) Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio sapendo che l'area è 32 cm^2, l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm.

$[10cm, 6cm]$

6) In un rombo la somma delle diagonali è 34 cm, i $\frac{3}{4}$ della maggiore superano di 8 cm la minore. Determina il perimetro del rombo.

$[52cm]$

7) Calcola l'area di un triangolo sapendo che i $\frac{3}{5}$ dell'altezza sono 27 cm e che il doppio della base supera di 23 cm l'altezza.

$[765cm^2]$

8) Il perimetro di un rettangolo è 94 cm e la base supera di 11 cm il doppio dell'altezza. Calcola l'area.

$[420cm^2]$

9) Calcola l'area di un trapezio rettangolo sapendo che il lato obliquo è 10 cm, che la base maggiore è il triplo della minore e che la somma delle basi è 16 cm.

$[48cm^2]$

10) Determina il perimetro di un trapezio isoscele sapendo che la sua area è 52 cm^2, che la base maggiore supera di 6 cm la base minore e che l'altezza è 4 cm.

$[36cm]$

11) L'area di un trapezio rettangolo è 72 cm^2. La somma delle basi è 24 cm e la loro differenza è 8 cm. Determina il perimetro.

$[40cm]$

12) In un trapezio isoscele gli angoli alla base sono di 60° e il perimetro è 35 cm. Sapendo che la base maggiore è $\frac{3}{2}$ della minore, calcola le misure dei lati del trapezio.

$[10cm, 15cm, 5cm, 5cm]$

13) Sappiamo che la somma delle diagonali di un rombo è 66 cm e che la loro differenza è 18 cm. Calcola l'area del rombo.

$[504cm^2]$

14) Il perimetro di un trapezio isoscele è 72 cm. Calcola l'area del trapezio sapendo che il lato obliquo è uguale alla metà della base minore e che la somma dei $\frac{3}{8}$ della base maggiore con il lato obliquo è 22 cm.

$\left[208cm^2\right]$

15) Calcola l'area di un trapezio isoscele sapendo che le basi differiscono di 6 cm, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 cm e che il lato obliquo è 5 cm.

[$48cm^2$]

16) Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l'area del rettangolo diminuisce di 2 cm^2.

[8 cm; 4 cm]

17) Calcola il perimetro di un rombo sapendo che le sue diagonali differiscono di $2a$ e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di $5a$.

[$20a$]

18) Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato.

[24 cm^2; 20 cm]

19) In un rombo la diagonale maggiore supera la minore di 6 cm e la somma tra i $\frac{3}{7}$ della maggiore e $\frac{1}{3}$ della minore è 30 cm. Determina le diagonali.

[36 cm; 42 cm]

20) In un trapezio rettangolo la somma delle basi misura $10a$ e la semidifferenza delle lunghezze delle basi è $\frac{2}{3}$ della base minore. Sapendo inoltre che l'altezza è uguale alla base minore determina il perimetro del trapezio.

[$18a$]

SCHEDA DI VERIFICA
SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

I)
Risolvi i seguenti sistemi di equazioni di primo grado in due incognite:

1) $\begin{cases} 5x-2y=5 \\ y-15x=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{5}:-3\right)\right]$

2) $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ $[(0;-3)]$

3) $\begin{cases} \frac{y-2x}{3}+x=1 \\ x+5y+1=12 \end{cases}$ $[(1;2)]$

4) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}+\frac{y+6}{2}=3 \\ \frac{x+y}{2}+x=5 \end{cases}$ $[(4;-2)]$

5) $\begin{cases} \frac{2x-y}{2}+\frac{5}{6}=\frac{x+y}{3} \\ \frac{1}{2}\cdot(x+y)+2y=0 \end{cases}$ $\left[\left(-1;\frac{1}{5}\right)\right]$

6) $\begin{cases} 4x+y=6 \\ 2x+\frac{1}{2}y=3 \end{cases}$ [indeterminato]

II) Problemi

1)In un trapezio rettangolo la somma delle basi è 14 cm e la loro differenza è 8 cm. Sapendo che l'area misura $42cm^2$, determina il perimetro del trapezio.

$[30cm]$

2)In un rombo la differenza tra le diagonali è 7 cm e la maggiore supera di 2 cm il doppio della minore. Determina perimetro e area del rombo.

$[2p=26cm; A=30cm^2]$

3) In un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo e diagonale e lato obliquo stanno nel rapporto di $\frac{4}{3}$. Sapendo che la differenza tra il doppio dell'altezza e il lato obliquo è $9a$, trova il perimetro del trapezio.

$[68a]$

4)Laura acquista 4 penne (uguali) e 2 quaderni (uguali) e spende 15 euro. La settimana successiva il cartolaio applica uno sconto del 10% su tutti gli articoli. Maria acquista, a prezzo scontato rispetto alla settimana precedente,3 penne e 4 quaderni dello stesso tipo di Laura e spende 18 euro. Quanto ha pagato Laura per una penna? E quanto per un quaderno?

[2 euro; 3,5 euro]

SCHEDA PER IL RECUPERO
SISTEMI DI PRIMO GRADO

I) Risolvi i seguenti sistemi di primo grado in due incognite:

1) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ $[(2;1)]$

2) $\begin{cases} 4x+7y=10 \\ x-y=-3 \end{cases}$ $[(-1;2)]$

3) $\begin{cases} 2x+3y=-9 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ $[(0;-3)]$

4) $\begin{cases} 5x+2y=-4 \\ 2x+7y=17 \end{cases}$ $[(-2;3)]$

5) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ [impossibile]

6) $\begin{cases} \frac{4}{5}x-\frac{7}{5}y=1 \\ 2x-\frac{7}{2}y=\frac{5}{2} \end{cases}$ [indeterminato]

II)Problemi

1)In un rettangolo una dimensione supera l'altra di 2 cm ed il perimetro è 28 cm. Determina la lunghezza della diagonale del rettangolo.

[10 cm]

2) In un triangolo isoscele il lato obliquo è $\frac{13}{10}$ della base. Sapendo che il perimetro misura $36a$ determina l'area.

[$60a^2$]

3) In un trapezio isoscele la base maggiore supera di 2 cm il quadruplo della base minore. Sapendo che i lati obliqui misurano 5 cm e che il perimetro è 22 cm, determina l'area del trapezio.

$[18cm^2]$

4) Un gruppo di 10 adulti e 4 bambini spende in tutto 100 euro per i biglietti di un cinema; un gruppo di 3 adulti e 2 bambini spende 34 euro. Si può stabilire quanto costa il biglietto per adulti e quello ridotto per bambini in quella sala?

[8 euro; 5 euro]

TEST IN INGLESE
SIMULTANEUS EQUATIONS

1) Thilo and Toby buy some boats and trains from the toy shop.
The cost of one boat is b cents and the cost of one train is t cents.

(a) Toby buys 3 boats and 4 trains for \$5.70. Complete this equation

$3b+4t=$ …………..

(b) Thilo buys 1 boat and 2 trains for \$2.40.Write this information as an equation.

………………………….=……………

(c) Solve your to equations to find the cost of a boat and the cost of a train.You must show all your working.

Cost of a boat = …………..cents
Cost of a train = …………..cents

2) Pens cost p cents and pencils cost q cents.

(a) Aisha buys 3 pens and 5 pencils for \$2.20.Write down an equation representing this cost in cents.

……………………………..=…………

(b) Bishen buys 4 pens and 10 pencils for \$3.50. Write down an equation representing this cost in cents.

……………………………..=…………

(c) Solve your equations to find the value of p and the value of w.

$p =$ …………..cents
$q =$ …………..cents

3) Solve the simultaneous equations.

$3x + 2y = 18$
$2x - y = 19$

$x =$ …………..
$y =$ …………..