

Il calcolo letterale

Finora abbiamo studiato gli insiemi numerici \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} ed operato con numeri (espressioni numeriche).

In matematica però è molto importante saper operare con le lettere e sviluppare le regole di quello che viene chiamato calcolo letterale.

Abbiamo già trovato, nello studio della geometria, delle espressioni “letterali”: per esempio se vogliamo esprimere l’area del quadrato di lato l scriviamo $A=l^2$.

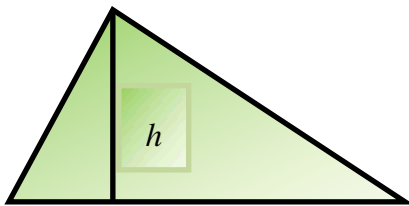


$$A = l^2$$

l

Questa scrittura è generale proprio perché fa uso di una lettera e non di un numero in particolare: se poi vogliamo determinare l’area di uno specifico quadrato, per esempio di lato $l=5$, sostituiamo il valore 5 al posto di l e otterremo l’area $A = 25$.

Anche l’area di un triangolo, di base b e altezza h viene indicata con $A = \frac{b \cdot h}{2}$



b

Anche questa è un’espressione “letterale”.

Cominceremo con lo studio di quelle espressioni letterali che vengono chiamate **monomi** e **polinomi**.

Monomi

Le espressioni letterali più semplici si chiamano “monomi” (dal greco *monos* che significa unico) e sono costituite da lettere che vengono solo moltiplicate tra loro ed eventualmente per un coefficiente numerico.

Esempio

Le espressioni letterali

$$2a^3b ; \frac{1}{3}a b^4c^2 ; -\frac{2}{5}a^2b^3$$

sono esempi di monomi.

Esempio

Le espressioni letterali $a^2 - b$ oppure $a^{-2}b$ non sono monomi.

Osservazione

Lo stesso monomio può essere scritto in forme diverse.

Per esempio è chiaro che

$$2a^3b \text{ può anche essere scritto } 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b .$$

ma la prima scrittura si legge molto meglio !

Forma “normale” di un monomio

Diciamo che un monomio è ridotto a “**forma normale**” quando è scritto come prodotto fra un numero (chiamato **coefficiente** del monomio) e una o più lettere (diverse tra loro) con eventuali esponenti (si chiama **parte letterale** del monomio)

$$\begin{array}{ccc} & 2 & a^3b \\ & \nearrow & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ \text{coefficiente} & & \text{parte letterale} \end{array}$$

Esempio : la forma normale di $3 a b^2 \cdot (-2) \cdot a^2 \cdot b$ risulta $-6a^3b^3$

Grado di un monomio

Si chiama “grado” del monomio la somma di tutti gli esponenti delle lettere: per esempio

$$2 a^3b$$

ha grado $3+1=4$ (è di grado 3 rispetto alla lettera a e di grado 1 rispetto alla lettera b).

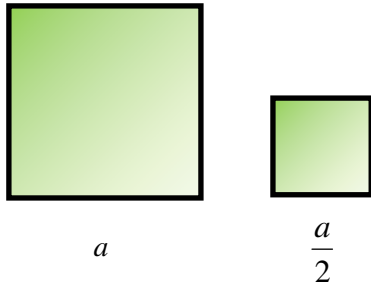
Poiché anche un numero può essere considerato un monomio, diremo che ha grado 0 perché possiamo sempre pensare che gli sia associata una parte letterale di grado 0 (che corrisponde a 1).

Esempio: 2 potrebbe essere considerato come $2 \cdot a^0$.

Operazioni con i monomi

Addizione e sottrazione di monomi

Supponiamo di dover sommare le aree in figura :



$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)a^2 = \frac{5}{4}a^2.$$

Quindi se i monomi hanno la stessa parte letterale (si dicono “simili”) per sommarli si sommano i loro coefficienti e si considera come parte letterale la parte letterale dei due monomi.

E se i monomi non sono simili?

Come faccio per esempio se devo sommare

$$2a^3b + 3a^2 ?$$

Quando i monomi non sono simili non posso fare niente: la scrittura va lasciata così e sarà chiamata “polinomio” (dal greco polys che significa “molto” nel senso di molti termini).

Esempi

$$1) \frac{1}{2}ab - 3ab + ab = \left(\frac{1}{2} - 3 + 1\right)ab = \left(\frac{1-6+2}{2}\right)ab = -\frac{3}{2}ab .$$

$$2) 2a^2b - \frac{1}{3}a^2b + a^2b = \left(2 - \frac{1}{3} + 1\right)a^2b = \left(\frac{6-1+3}{2}\right)a^2b = +\frac{8}{3}a^2b$$

$$3) 5xy - 5xy = 0$$

$$4) ab^4 - 2a^2b^4 \quad (\text{rimane così})$$

$$5) 3a^2b^3 - a^2b^3 + ab^4 - \frac{1}{4}ab^4 = (3-1)a^2b^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)ab^4 = 2a^2b^3 + \frac{3}{4}ab^4$$

$$6) 2x^3y - \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{5}{4}x^2y^2 = (2-1)x^3y + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right)x^2y^2 = x^3y + \left(\frac{-2+5}{4}\right)x^2y^2 = x^3y + \frac{3}{4}x^2y^2$$

$$7) \frac{3}{2}xy - x^2y - \frac{3}{2}xy + 5x^2y = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)xy + (-1+5)x^2y = 0 + 4x^2y = 4x^2y$$

Moltiplicazione di monomi

Come possiamo moltiplicare due monomi ?

Per esempio

$$(2ab) \cdot (3a^2) = ?$$

E' chiaro che basta moltiplicare i coefficienti e la parte letterale.

Avremo

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ 2 \cdot 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 6 \cdot a^3 b \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ ab \cdot a^2 \end{array}$$

Esempi

$$1) \frac{1}{2} ab \cdot 3a^2 b^2 = \frac{3}{2} a^3 b^3 .$$

$$2) 5x^4 y \cdot (-2xy) = -10x^5 y^2$$

$$3) \frac{1}{3} ab \cdot 3b = ab^2$$

$$4) (-2a^2 b^3) \cdot \left(-\frac{1}{2} ab\right) = a^3 b^4$$

Potenza di un monomio

Come possiamo sviluppare la potenza di un monomio?

Per esempio :

$$(2a^2 b)^2 = ?$$

Dovremo fare la potenza sia del coefficiente che della parte letterale. Nel nostro caso avremo:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ (2a^2 b)^2 = 2^2 \cdot a^4 \cdot b^2 \\ \text{potenza del coeff.} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ \text{potenza della parte letterale} \end{array}$$

Esempi

$$1) \left(-\frac{1}{2} ab^2\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 a^3 b^6 = -\frac{1}{8} a^3 b^6$$

$$2) (-2xy^3)^2 = (-2)^2 x^2 y^6 = 4x^2 y^6$$

Divisione tra monomi

Possiamo dividere due monomi ?

Per esempio :

$$2a^2b : ab = ?$$

$$\frac{2\cancel{a^2}b}{\cancel{ab}}$$

Quindi in questo caso abbiamo ottenuto un monomio.

Ma è sempre così ?

Se, per esempio, abbiamo :

$$2a^2b : a^3b = ?$$

$$\frac{2a^2b}{a^3b} = \frac{2}{a}$$

e quindi in questo caso non abbiamo un monomio.

Diremo che un monomio è divisibile per un altro monomio (divisore) quando nella sua parte letterale ci sono tutte le lettere del divisore con esponenti maggiori o uguali.

Esempi:

$$1) \quad 2ab^4 : 3ab^2 = \frac{2ab^4}{3ab^2} = \frac{2}{3}b^2$$

$$2) \quad 5x^3y^2 : 10x^3y = \frac{5x^3y^2}{10x^3y} = \frac{1}{2}y$$

$$3) \quad 3a^2b^3 : (-3ab) = -\frac{3a^2b^3}{3ab} = -ab^2$$

$$4) \quad 4a^2b^2 : 4a^2b^2 = \frac{4a^2b^2}{4a^2b^2} = 1$$

$$5) \quad 3a^3b^2 : 9ab = \frac{3a^3b^2}{9ab} = \frac{1}{3}a^2b$$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo fra monomi

Come per i numeri naturali, possiamo definire il M.C.D. tra due o più monomi e il m.c.m. tra due o più monomi.

Massimo comun divisore (M.C.D.)

- come coefficiente del massimo comun divisore si prende il M.C.D. dei coefficienti se sono interi (senza considerare il loro segno) e 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- come parte letterale del massimo comun divisore si prende il prodotto delle lettere comuni prese una sola volta e con il minimo esponente.

Esempi M.C.D. $\left(3a^2bc^3 \quad ; \quad 2ac^2 \right) = ac^2$

$$\text{M.C.D.} \left(\frac{1}{2}abc^4 \quad ; \quad 4b^2c^3 \right) = bc^3$$

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

- come coefficiente del minimo comune multiplo si prende il m.c.m. dei coefficienti se sono interi (senza considerare il loro segno) e 1 se i coefficienti non sono tutti interi;
- come parte letterale del minimo comune multiplo si prende il prodotto di tutte le lettere dei monomi prese una sola volta e con il massimo esponente.

Esempi m.c.m. $\left(3x^2yz \quad ; \quad 2xyz^4 \right) = 6x^2yz^4$

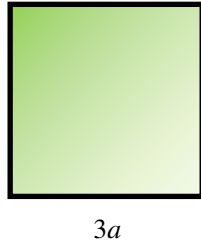
$$\text{m.c.m.} \left(\frac{1}{3}xy^3 \quad ; \quad 4y \right) = xy^3$$

$$\text{m.c.m.} \left(2abc \quad ; \quad 4a^3 \right) = 4a^3bc$$

$$\text{m.c.m.} \left(\frac{1}{2}a^2b^3 \quad ; \quad 5abc^4 \right) = a^2b^3c^4$$

Il calcolo letterale in geometria

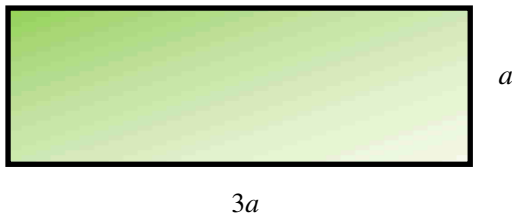
- 1) Consideriamo un quadrato di lato $3a$. Come si esprime la sua area? Come risulta il suo perimetro?



$$A = (3a)^2 = 9a^2$$

$$2p = 3a \cdot 4 = 12a$$

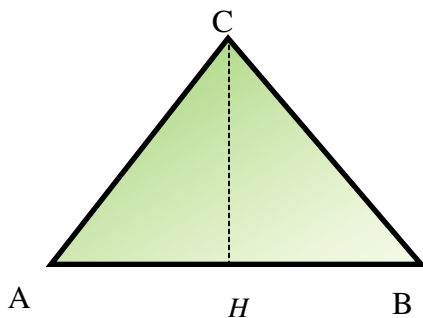
- 2) Consideriamo un rettangolo di base $3a$ e altezza a . Come risulta la sua area? E il suo perimetro?



$$A = 3a \cdot a = 3a^2$$

$$2p = 3a \cdot 2 + a \cdot 2 = 6a + 2a = 8a$$

- 3) Considera un triangolo isoscele ABC di base $AB = 6a$ e altezza $CH = 4a$. Come risulta la sua area? E il suo perimetro?



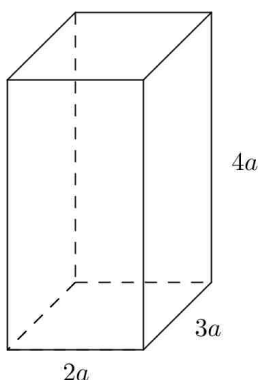
$$A = \frac{6a \cdot 4a}{2} = 12a^2$$

$$\text{Poiché } \overline{AH} = 3a \text{ e}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{16a^2 + 9a^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$$

$$2p = 6a + 5a \cdot 2 = 6a + 10a = 16a$$

- 4) Considera un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $2a$, $3a$, $4a$. Come risulta la sua superficie totale? E il suo volume?



$$S_t = S_l + 2 \cdot S_B = 2p_{base} \cdot 4a + 2 \cdot 2a \cdot 3a = 10a \cdot 4a + 12a^2 = 40a^2 + 12a^2 = 52a^2$$

$$V = 2a \cdot 3a \cdot 4a = 24a^3$$

ESERCIZI
MONOMI

1) Quali tra le seguenti espressioni algebriche sono monomi?

- a) $-2x^3y^6$ b) $x - y - 2$ c) $7/2$ d) a/b e) 0

2) Riduci a forma normale i seguenti monomi:

- a) $(-3x)(5xy)x$ b) $aabbc5b3$ c) $(-a^2b^3)(5b^4a^3)$ d) $-x(-y)(-xy)$ e) $(3bx)(3bx)(3bx)$

3) Completa le seguenti frasi:

a) In un monomio i fattori letterali devono avere come esponenti dei numeri

b) Si dice grado di un monomio la degli della sua

c) Un numero è considerato un monomio di grado.....

d) Due monomi che hanno lo stesso e la stessa si dicono uguali.

4) Scrivi il grado di ciascuno dei seguenti monomi:

- a) $3x^2y$ b) $7a^4m^5p^9$ c) $abcd$ d) $9y$ e) $10/7$

5) Completa la seguente tabella:

Monomio	Coefficiente	Parte letterale	Grado
$2xy$			
	4		3
		x^2y	
$x/2$			
	3		0

6) Completa la seguente tabella:

Monomio	Uguale	Simile	Opposto
$5ab^3$			
	$6xyz$		
		$-abc^2$	
			$+5x^3y^5$
$x/2$			

7) Utilizzando le lettere a e b , scrivi tutti i monomi possibili di coefficiente 2 e grado 3.

8) Per scrivere un monomio di grado 4 sono indispensabili quattro lettere?

9) Quante lettere sono necessarie per scrivere un monomio di grado 3? Perché?

10) Può un monomio di grado 3 essere composto da quattro lettere? Perché?

Calcolo letterale
Monomi

$$11) \left(\frac{1}{2}ab\right) \cdot (ab) + 3a^2b^2 \quad \left[\frac{7}{2}a^2b^2\right]$$

$$12) \left(\frac{1}{5}x^2y\right) \cdot (-5x) + 2x^3y \quad [x^3y]$$

$$13) (5ab) \cdot \left(-\frac{1}{3}a\right) + \frac{1}{3}a^2 \cdot (-2b) \quad \left[-\frac{7}{3}a^2b\right]$$

$$14) (2ab)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}a\right) - (-2a) \cdot (ab)^2 \quad [3a^3b^2]$$

$$15) (2a)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + (5ab) \cdot \left(-\frac{1}{5}a^2b\right) \quad [a^3b^2]$$

$$16) \left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 \cdot (2ab)^2 - (ab)^2 \cdot (3a^6b^3) \quad \left[-\frac{7}{2}a^8b^5\right]$$

$$17) \left(\frac{1}{2}x^2y\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}x^4y^2\right)^2 \quad \left[-\frac{3}{16}x^8y^4\right]$$

$$18) \left(-\frac{1}{3}ab\right)^2 \cdot (-3a)^2 + (a^2b^2) \cdot \left(-\frac{1}{5}a^2\right) \quad \left[\frac{4}{5}a^4b^2\right]$$

$$19) (-2x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}xy\right) - (3xy) \cdot \left(\frac{1}{6}x^6\right) \quad \left[-\frac{5}{2}x^7y\right]$$

$$20) (-a)^3 + \frac{1}{2}a(-a)^2 + (ab)^2 - a^2 \cdot (-3b^2) \quad \left[4a^2b^2 - \frac{1}{2}a^3\right]$$

$$21) 2x\left(-\frac{1}{2}y\right) - (xy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + xy + 2x^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right) \quad [0]$$

$$22) \left(-\frac{1}{2}a\right)^3 \cdot (-b)^2 + 3a \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 \quad \left[\frac{5}{8}a^3b^2\right]$$

$$23) (2x+x)^2 - 5x \cdot \left(-\frac{1}{3}x\right) \quad \left[\frac{32}{3}x^2\right]$$

Calcolo letterale
Monomi

$$24) \quad (-2ab)^4 + a \cdot \left(-\frac{1}{2}b\right) + (a^2b^2)^2 + 2a \cdot \left(-\frac{3}{4}b\right) \quad [17a^4b^4 - 2ab]$$

$$25) \quad \left(-\frac{1}{3}x\right)^2 \cdot (-2y) + (-xy)^3 + xy \cdot \left(-\frac{1}{9}x\right) + x^3y \cdot (-y)^2 \quad \left[-\frac{1}{3}x^2y\right]$$

$$26) \quad \left(xy - \frac{2}{3}xy\right)y^3 - x(-y^2)^3 : \left(-\frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{2}{3}xy^4 \quad [10xy^4]$$

$$27) \quad \left(\frac{5}{2}ab - ab\right)^2 \cdot (-a^2b) - (3a^3b^3)^2 : (9ab^2)^2 + \left(-\frac{3}{2}a^2\right)^2 \cdot b^3 \quad \left[-\frac{1}{9}a^4b^2\right]$$

$$28) \quad [a^2b - (-2a^2b)] \cdot (-3ab^2) + (-2a^2b^2)^2 : \frac{1}{2}ab \quad [-a^3b^3]$$

$$29) \quad 3ab(-2a)^2 + (4ab^2c : \frac{1}{4}bc)a^2 - 6a^3b \quad [22a^3b]$$

$$30) \quad \left[-3xy\left(\frac{1}{9}x^2y\right) - y^2(-x)^3\right] : (-x)^2 + 2x^2y^2 : (-x) \quad \left[-\frac{4}{3}xy^2\right]$$

$$31) \quad \left(2a - \frac{1}{2}a\right)^2 \cdot (-2ab - 2ab)^3 \quad [-144a^5b^3]$$

$$32) \quad \left[(-2a)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right)^3 - a^5b^3\right] : (a^2b) \quad \left[-\frac{1}{2}a^3b^2\right]$$

$$33) \quad \left(-\frac{4}{3}ab\right) \cdot \left(-\frac{9}{4}a^2b\right) : (-2ab)^2 \quad \left[\frac{3}{4}a\right]$$

$$34) \quad (-3a)^3 \cdot \left[\frac{4}{3}a^2b^4 : (-4a^2b)\right]^2 \quad [-3a^3b^6]$$

$$35) \quad [(-2xy)^2]^3 \cdot (-2xy^2)^3 - 2(-x)^3 \quad [-6x^3]$$

$$36) \quad (-ax)^3 : (-2x)^2 + x \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)^3 + x \cdot (-a^2)^3 : a^3 \quad \left[-\frac{11}{8}a^3x\right]$$

$$37) \quad 2ab \cdot \left(\frac{1}{2}a - a\right) + (-4a)^2 \cdot b + 2\left(\frac{1}{2}b - b\right) \cdot a^2 + a^2b \quad [15a^2b]$$

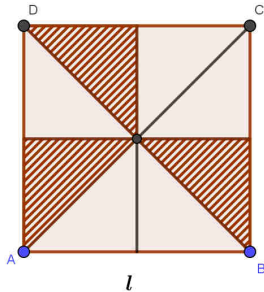
Calcolo letterale
Monomi

- 38) $[-a(-a)^2 + a^5 : (-a^2)] + (-a)^3 + 2a^2 \cdot (-a)$ [$-5a^3$]
- 39) $\left(xy - \frac{2}{3}xy\right) \cdot y^3 - x \cdot (-y^2)^3 : \left(-\frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{2}{3}xy^4$ [$10xy^4$]
- 40) $-a^2 \cdot (a^5 : a^3) + (-3a^2)^2 + (2a^3)^2 : \left(-\frac{1}{2}a\right)^2 + 2a^4 - (-a^2)^2$ [$25a^4$]
- 41) $\frac{4}{5}xy^2 \cdot \left(-\frac{5}{4}x^3y\right) + (-4x^2y) \cdot (x^2y^2)$ [$-5x^4y^3$]
- 42) $\frac{3}{4}a^2x \cdot (-2ax) - \left(-\frac{1}{3}ax^2\right) \cdot \left(\frac{9}{2}a^2\right)$ [0]
- 43) $\frac{3}{2}ay \cdot \left(-\frac{8}{9}a^2y^3\right) - 2a^3y^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}a^2y^2\right) + \frac{1}{5}a^2y^2 \cdot \left(-\frac{5}{2}a^3y^2\right)$ [$-\frac{4}{3}a^3y^4$]
- 44) $2x^2 + xy \cdot \left(-\frac{1}{4}y\right) + 3x \cdot \left(-\frac{1}{3}y^2\right) + 2x \cdot (-x) - \frac{7}{4}xy \cdot (-y)$ [$\frac{1}{2}xy^2$]
- 45) $-\frac{1}{3}a^3x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^4\right) + \frac{1}{3}a^2x^3 \cdot (-2ax^2) + a^3x^5 - \frac{2}{3}a^2 \cdot \left(\frac{3}{4}ax^4\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)$ [$\frac{3}{4}a^3x^5$]
- 46) $-\frac{1}{3}ab^4 : (-3b)^3 - \left(-\frac{1}{3}ab\right)^3 : (-ab)^2$ [$\frac{4}{81}ab$]
- 47) $\left(-\frac{5}{3}ab\right) \cdot (-3a)^2 : \left(-\frac{15}{4}a^2\right) + \left(\frac{5}{4}ab^3\right)^2 : \left(-\frac{5}{16}ab^5\right)$ [$-ab$]
- 48) $\left(-\frac{2}{5}x^2y\right) : \left(\frac{1}{5}xy\right) - [-6x^3y^3 : (-y)^2] : (3x^2y)$ [0]

PROBLEMI
MONOMI

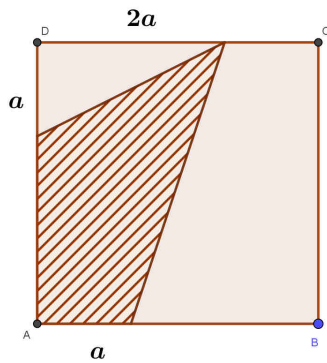
1) Il lato di un quadrato ABCD misura l . Determina l'area della parte tratteggiata.

$[\frac{3}{8}l^2]$

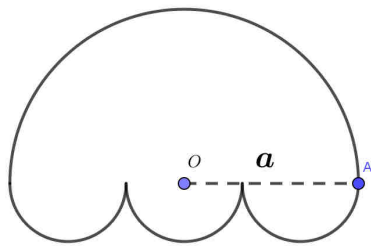


2) Il lato del quadrato ABCD misura $3a$. Determina l'area della parte tratteggiata.

$[\frac{7}{2}a^2]$

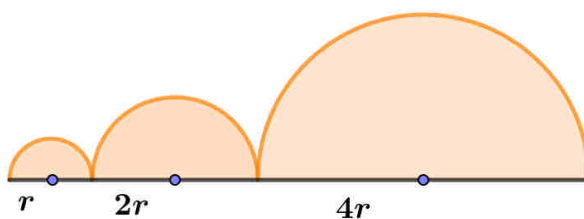


3) Sapendo che $\overline{OA} = a$, determina la lunghezza della curva in figura e l'area racchiusa.



$[2\pi a; \frac{2}{3}\pi a^2]$

4) Determina lunghezza e area racchiusa dalla curva.



$[14r + 7\pi r; \frac{21}{2}\pi r^2]$

Calcolo letterale
Monomi

- 5) In un cilindro il raggio di base è $3a$ e l'altezza è $12a$. Determina volume e superficie totale.

$$[108\pi a^3; 90\pi a^2]$$

- 6) Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono $2a$, $5a$, $8a$. Determina volume e superficie totale.

$$[80a^3; 132a^2]$$

- 7) In un cilindro l'altezza è uguale al diametro. Se il raggio è r , determina volume e superficie totale.

$$[2\pi r^3; 6\pi r^2]$$

- 8) Un cubo ha lo spigolo che misura $5a$. Determina volume e superficie totale. Calcola volume e superficie totale nel caso in cui $a = 2$ cm.

$$[V = 125a^3; S_{tot} = 150a^2; 1000cm^3; 600cm^2]$$

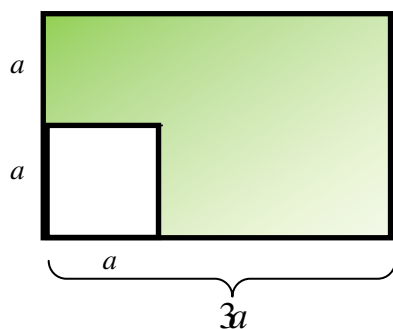
- 9) Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano $6a$ e $8a$. Determina perimetro e area del triangolo.

$$[24a; 24a^2]$$

- 10) Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono $2a$; $\frac{2}{3}a$; $\frac{5}{8}a$. Determina volume e superficie totale e calcolane i valori se $a = 3$ cm.

$$[\frac{5}{6}a^3; 6a^2; \frac{45}{2}cm^3; 54cm^2]$$

- 11) Con i dati della figura trova il perimetro e l'area della zona colorata.



$$[10a; 5a^2]$$

- 12) In un triangolo isoscele la base misura $10a$ e il lato obliquo $13a$. Determina perimetro e area.

$$[36a; 60a^2]$$

- 13) Considera un prisma a base quadrata il cui spigolo di base è $3a$ e l'altezza $6a$. Determina superficie totale e volume.

$$[90a^2; 54a^3]$$

- 14) Considera un cilindro di raggio a e altezza $3a$. Determina superficie totale e volume.

$$[8\pi \cdot a^2; 3\pi \cdot a^3]$$

Polinomi

Un polinomio è una somma algebrica di monomi.

Esempio: $a^2b + 2a$; $xy - \frac{1}{2}y^2$; $a^3 + b^3 + c^2$ sono polinomi.

I vari monomi che compongono il polinomio si chiamano “termini” del polinomio.
Un monomio può anche essere considerato come un polinomio con un solo termine.

NOTA: se in un polinomio ci sono monomi simili questi si sommano e il polinomio si dice **ridotto a forma normale**.

Esempio: $6ab - x^2y^2 - 2ab = 4ab - x^2y^2$

Definizione: se un polinomio ridotto a forma normale ha 2 termini, cioè è costituito da 2 monomi, si chiama *binomio*, se è costituito da 3 monomi si chiama *trinomio*.

Esempio: $2a + b$ è un binomio
 $2a^2 + b + c^3$ è un trinomio

Definizione: *il grado di un polinomio è il grado del suo termine di grado maggiore.*

Esempio: $x^3y - xy^2$ ha grado 4

Definizione: *il grado di un polinomio rispetto ad una lettera è il massimo degli esponenti con cui compare quella lettera.*

Esempio: $x^3y - xy^2$ ha grado 3 rispetto alla lettera x e grado 2 rispetto alla lettera y .

Termine “noto” di un polinomio: *è il termine di grado 0 cioè il termine in cui non compare nessuna lettera.*

Esempio: $a^2b + 2$ 2 è il termine noto

Polinomio omogeneo: *un polinomio si dice omogeneo quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.*

Esempio: $a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$ è un polinomio omogeneo poiché tutti i suoi termini hanno grado 4.

Operazioni con i polinomi

Addizione tra polinomi

La somma tra due o più polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

Esempio: $(x^2y + xy) + (2xy - 4x^2y + x^3) = \underline{x^2y} + \underline{xy} + \underline{2xy} - \underline{4x^2y} + x^3 =$
(si riduce sommando i termini simili)
 $= -3x^2y + 3xy + x^3$

Differenza tra polinomi

La differenza tra due polinomi si ottiene sommando al primo polinomio l'opposto del secondo (si cambia il segno dei coefficienti del secondo).

Esempio: $(x^2y + xy) - (2xy - 4x^2y + x^3) = \underline{x^2y} + \underline{xy} - \underline{2xy} + \underline{4x^2y} - x^3 =$
 $= 5x^2y - xy - x^3$

Per indicare addizione e sottrazione tra polinomi si parla di **somma algebrica**.

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Per moltiplicare un monomio per un polinomio si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e si moltiplica il monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio: $5a^2 \cdot (a + 3b) = 5a^2 \cdot a + 5a^2 \cdot 3b = 5a^3 + 15a^2b$

Moltiplicazione tra due polinomi

Si moltiplica ogni termine del 1° polinomio per ogni termine del 2° e si sommano i risultati (sempre per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).

Esempio: $(5a^2 + b) \cdot (a + 3b) = 5a^2 \cdot (a + 3b) + b \cdot (a + 3b) = 5a^3 + 15a^2b + ab + 3b^2$

Nota: il grado del prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori (per la proprietà delle potenze).

Nota: per moltiplicare tre polinomi prima si moltiplicano due polinomi e il risultato si moltiplica per il terzo.

Esempio: $(x + 1)(2x + 2)(x - 4) = (2x^2 + 2x + 2x + 2)(x - 4) =$
 $(2x^2 + 4x + 2)(x - 4) = 2x^3 - 8x^2 + 4x^2 - 16x + 2x - 8 =$
 $2x^3 - 4x^2 - 14x - 8$

Divisione di un polinomio per un monomio

Polinomio divisibile per un monomio

Consideriamo la seguente divisione:

$$(2a^3b + a^2) : a^2$$

Per la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione ho:

$$(2a^3b : a^2) + (a^2 : a^2) = 2ab + 1$$

Quindi in questo caso, essendo ogni termine del polinomio divisibile per il monomio, il polinomio risulta divisibile per il monomio.

$$(2a^3b + a^2) : a^2 = 2ab + 1$$

Quindi: $(2ab + 1) \cdot a^2 = 2a^3b + a^2$ cioè se

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline & Q(\text{quoziante}) \end{array} \quad \text{si ha} \quad Q \cdot B = A$$

Polinomio non divisibile per un monomio

Consideriamo la seguente divisione

$$(2a^3b + a^2) : a^3$$

In questo caso il polinomio non è divisibile per a^3 poiché il suo 2° termine a^2 non è divisibile per a^3 . Possiamo anche scrivere $\frac{2a^3b + a^2}{a^3} = 2b + \frac{1}{a}$ ma *non si tratta di un polinomio*.

Esempi

$$1) (x^3y^2 + x^2) : x = x^2y^2 + x$$

$$2) (3ab^2 - 2b) : b = 3ab - 2$$

$$3) (2a^2 - 7a^2 + a) : \left(\frac{1}{2}a - a\right) = (-5a^2 + a) : \left(-\frac{1}{2}a\right) = (-5a^2) : \left(-\frac{1}{2}a\right) + a : \left(-\frac{1}{2}a\right) = 10a - 2$$

$$4) \left(\frac{1}{2}ab + ab + a\right) : (a - 3a) = \left(\frac{3}{2}ab + a\right) : (-2a) = \frac{3}{2}ab : (-2a) + a : (-2a) = -\frac{3}{4}b - \frac{1}{2}$$

Prodotti notevoli

Nella moltiplicazione dei polinomi ci sono dei casi particolari che conviene ricordare. E sono chiamati “prodotti notevoli” cioè degni di nota.

Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

Consideriamo per esempio:

$$(2a + b)(2a - b) = 4a^2 - 2ab + 2ab - b^2 = 4a^2 - b^2$$

In generale si ha:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$$

cioè si ottiene sempre la differenza tra il quadrato del 1° monomio e il quadrato del 2° monomio

$$\boxed{(A + B)(A - B) = A^2 - B^2}$$

Esempi

$$1) (a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$$

$$2) (3a + 5b)(3a - 5b) = 9a^2 - 25b^2$$

$$3) \left(\frac{1}{2}x - y\right)\left(\frac{1}{2}x + y\right) = \frac{1}{4}x^2 - y^2$$

$$4) (x + y)(-y + x) = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$5) (3a - b)(b + 3a) = (3a - b)(3a + b) = 9a^2 - b^2$$

$$6) (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$$

Quadrato di un binomio

Consideriamo per esempio:

$$\begin{aligned}(2a + b)^2 &= (2a + b)(2a + b) = 4a^2 + 2ab + 2ab + b^2 = \\ &= 4a^2 + 4ab + b^2 = \\ &= (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot b + (b)^2\end{aligned}$$

In generale si ha:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = A^2 + AB + AB + B^2 = \\ &= A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

In conclusione:

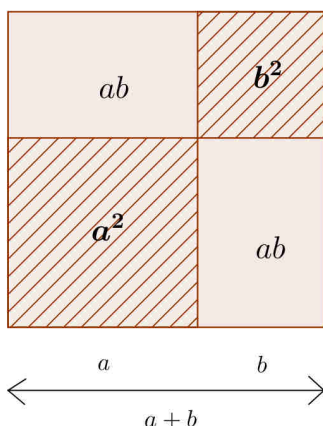
$$\boxed{(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

Quindi il quadrato di un binomio risulta uguale alla somma tra il quadrato del 1° termine, il quadrato del 2° termine e il doppio prodotto tra il 1° termine e il 2° termine del binomio.

Esempi

- 1) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- 2) $(x - y)^2 = x^2 + 2(x)(-y) + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- 3) $\left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot y + y^2 = \frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$

Interpretazione geometrica



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Il quadrato di lato $a+b$ è dato dall'unione del quadrato di lato a , del quadrato di lato b e di due rettangoli di lati a e b (e quindi area $2ab$)

Nota

Vediamo come risulta il quadrato di un trinomio:

$$\begin{aligned}(A + B + C)^2 &= (A + B + C)(A + B + C) = \\ &= A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2 = \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC\end{aligned}$$

Quindi il quadrato di un trinomio è dato dalla *somma tra quadrato del 1° termine, quadrato del 2° termine, quadrato del 3° termine e il doppio prodotto tra il 1° e il 2° termine, il doppio prodotto tra il 1° e il 3° termine e il doppio prodotto tra il 2° e il 3° termine.*

Esempio

$$\begin{aligned}(3a - b - 2c)^2 &= \\ &= 9a^2 + b^2 + 4c^2 + 2 \cdot (3a) \cdot (-b) + 2 \cdot (3a) \cdot (-2c) + 2 \cdot (-b) \cdot (-2c) = \\ &= 9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab - 12ac + 4bc\end{aligned}$$

Cubo di un binomio

Sviluppiamo il cubo di un binomio:

$$\begin{aligned}(A + B)^3 &= (A + B)(A + B)(A + B) = (A + B)^2(A + B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\boxed{(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3}$$

Quindi il cubo di un binomio risulta *la somma tra cubo del 1° termine, cubo del 2° termine, triplo prodotto tra il quadrato del 1° termine e il 2° termine, triplo prodotto tra il 1° termine e il quadrato del 2° termine.*

Esempi

1) $(2a + b)^3 = 8a^3 + b^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (b) + 3 \cdot (2a) \cdot (b)^2 = 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

2) $(2a - b)^3 = 8a^3 + (-b)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (-b) + 3 \cdot (2a) \cdot (-b)^2 = 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

Introduzione alla scomposizione dei polinomi

E' molto importante riuscire a scrivere, se è possibile, un polinomio come prodotto di polinomi di grado minore: si parla di "scomposizione" del polinomio così come si parla di scomposizione in fattori di un numero naturale.

Impariamo a scomporre un polinomio ripercorrendo "a ritroso" la moltiplicazione di un monomio per un polinomio (sarà quello che chiameremo metodo del raccoglimento totale), la moltiplicazione tra due polinomi (sarà quello che chiameremo metodo del raccoglimento parziale) ed alcuni prodotti notevoli.
Vediamo alcuni esempi.

Raccoglimento totale

Consideriamo per esempio il polinomio $2x^2 + 4x$: ci accorgiamo che tutti i termini del polinomio sono divisibili per $2x$ e quindi "raccogliendo" $2x$ (si dice anche che lo "mettiamo in evidenza") abbiamo:

$$2x^2 + 4x = 2x \cdot (x + 2)$$

Praticamente nella parentesi dopo il fattore comune scriviamo i termini ottenuti dividendo i termini del polinomio per il fattore comune $2x$: stiamo tornando indietro rispetto alla moltiplicazione di un monomio per un polinomio.

Nota: è importante capire che possiamo mettere in evidenza anche un polinomio e non solo un monomio.

Se per esempio abbiamo $2(x+1)^2 + 4(x+1)$ in questo caso il fattore comune è $2(x+1)$ ed abbiamo

$$2(x+1)^2 + 4(x+1) = 2(x+1)[(x+1)+2] = 2(x+1)(x+3)$$

Raccoglimento parziale

Consideriamo per esempio il seguente polinomio:

$$3x + 3y + x^2 + xy$$

In questo caso i vari termini non hanno tutti un fattore comune ma se proviamo a raccogliere 3 tra i primi due termini e x tra il terzo e quarto (per questo si parla di raccoglimento parziale) osserviamo che otteniamo il fattore comune $(x+y)$ che possiamo così mettere in evidenza:

$$3x + 3y + x^2 + xy = 3(x+y) + x(x+y) = (x+y)(3+x)$$

Perché questo metodo funziona è necessario che dopo il raccoglimento parziale si possa procedere con un raccoglimento totale, cioè è necessario ottenere un fattore comune.
Praticamente è come se fossimo tornati indietro rispetto alla moltiplicazione tra due polinomi: se infatti svolgiamo il prodotto ritroviamo il polinomio iniziale

$$(x+y) \cdot (3+x) = 3x + x^2 + 3y + xy$$

Scomposizione con i prodotti notevoli

Differenza di due quadrati

Se consideriamo il prodotto notevole $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ ma lo leggiamo da destra verso sinistra abbiamo che

$$\boxed{A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B)}$$

Esempi

1) Consideriamo il polinomio $x^2 - y^2$

Possiamo scrivere $x^2 - y^2 = (x+y) \cdot (x-y)$

2) Consideriamo il polinomio $1 - y^2$

Anche in questo caso possiamo considerare 1 come il quadrato di 1 e scomporre con lo stesso prodotto notevole:

$$1 - y^2 = (1+y) \cdot (1-y)$$

3) $4a^2 - b^2 = (2a+b) \cdot (2a-b)$

Quadrato di un binomio

Se consideriamo lo sviluppo del quadrato del binomio $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$ ma lo leggiamo da destra a sinistra abbiamo che

$$\boxed{A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A+B)^2}$$

Esempi

1) Consideriamo il polinomio $x^2 + 2xy + y^2$

Possiamo riconoscere lo sviluppo del quadrato di un binomio dal momento che ci sono due quadrati e che il termine rimanente è proprio il doppio prodotto delle due "basi" x e y .

Quindi abbiamo

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

2) Consideriamo il polinomio $a^2 + 2a + 1$: anche in questo caso ci sono due quadrati (a^2 è il quadrato di a e 1 è il quadrato di 1) e il terzo termine è proprio il doppio prodotto tra a e 1 .

Quindi

$$a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

3) Consideriamo $4b^2 - 4b + 1$: in questo caso, essendo il doppio prodotto $-4b$ sarà il quadrato della differenza tra le due "basi" cioè

$$4b^2 - 4b + 1 = (2b-1)^2$$

Cubo di un binomio

$$\boxed{A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3}$$

Esempi

1) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

2) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

Calcolo letterale
Polinomi

Nota

A volte per scomporre un polinomio dobbiamo usare *più metodi in successione*.

Esempi

1) Consideriamo il polinomio $3x^2 - 3$: possiamo mettere in evidenza il fattore 3

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

ma vediamo che abbiamo ottenuto $x^2 - 1$ che risulta una differenza di quadrati e quindi può essere scomposto e quindi in conclusione abbiamo:

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1) \cdot (x-1)$$

2) Consideriamo il polinomio $x^4 - y^4$: possiamo considerarlo come differenza di quadrati e scrivere

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2)$$

ma ci accorgiamo che possiamo ancora scomporre $x^2 - y^2$ sempre utilizzando la differenza di quadrati e quindi abbiamo:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) = (x^2 + y^2) \cdot (x+y) \cdot (x-y)$$

3) Consideriamo il polinomio $4x^2 - 8x + 4$: possiamo mettere in evidenza il fattore 4

$$4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1)$$

ma ci accorgiamo che possiamo ancora scomporre perché $x^2 - 2x + 1$ è il quadrato di un binomio e quindi in conclusione:

$$4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$$

4) Consideriamo il polinomio $2 - 2a^2 + 3ab - 3a^3b$: possiamo effettuare un raccoglimento parziale

$$2 - 2a^2 + 3ab - 3a^3b = 2(1 - a^2) + 3ab(1 - a^2) = (1 - a^2)(2 + 3ab)$$

ma ci accorgiamo che possiamo ancora scomporre il fattore $1 - a^2$ con il metodo della differenza dei quadrati e quindi in conclusione abbiamo:

$$2 - 2a^2 + 3ab - 3a^3b = (1 + a)(1 - a)(2 + 3ab)$$

ESERCIZI
POLINOMI

- 1) $(4x^3 - 5x^2 + 2) + (-3x^2 + 2x^2 - 2)$ [$4x^3 - 6x^2$]
- 2) $(-8a^5 + 6a^3 + 3a - 2) + (5a^5 - 3a^3 + 2a)$ [$-3a^5 + 3a^3 + 5a - 2$]
- 3) $(3a^3 + 5a^2 - 2a + 1) - (3a^3 - 2a^2 + 5a - 7)$ [$7a^2 - 7a + 8$]
- 4) $(3x^3 - 4y^2) + (5y^2 - 4x^3) + (x^3 - y^3)$ [$y^2 - y^3$]
- 5) $(3x - 2) - (3x + 2) - (-2x + 1) - (-3x - 1)$ [$5x - 4$]
- 6) $x^2(x + y - 1) - x(x - y) - y(x^2 - 2) - xy$ [$x^3 - 2x^2 + 2y$]
- 7) $[-2a(3a - 2) - a] \cdot (-2a^2) - (-2a^3)(3a - 1) - 2a(9a^3)$ [$-8a^3$]
- 8) $(-x^3)[(-x^2) \cdot (2a - 3x) - 3x^3] - 2ax(x^4 - 1)$ [$2ax$]
- 9) $(3a + 2)(a - 3) + (4a - 1)(a + 2)$ [$7a^2 - 8$]
- 10) $(2a - 1)(a + 1) - (a - 1)(2a - 3)$ [$6a - 4$]
- 11) $(a^3 + 2b)(a^3 - 2b) - (a^5 + a)(a - 1)$ [$a^5 - a^2 + a - 4b^2$]
- 12) $(4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2) - y^3(16x^2 - 81y)$ [$16x^4 - 16x^2y^3$]
- 13) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$ [$a^4 - b^4$]
- 14) $3a(a + 2)5a - 2a(a + 3)(a - 1)$ [$13a^3 + 26a^2 + 6a$]
- 15) $(3x - 2y)(x - 4y) - (5x + 3y)(2x - 5y)$ [$-7x^2 + 23y^2 + 5xy$]
- 16) $\frac{3}{2}a(1 + 3a)(3a - 1) + 3\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}\right)\left(a + \frac{1}{3}\right)$ [$\frac{27}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3}$]
- 17) $(x + 3)(2x - 5) + (1 - 3x)(4 - x) + (2 - 5x)(4 - x)$ [$10x^2 - 34x - 3$]

Calcolo letterale
Polinomi

$$18) \quad (a-2b)(2a+3b) + (a+4b)(a-b) \quad [3a^2 - 10b^2 + 2ab]$$

$$19) \quad (1-2a)(a-3) + (a-1)(3a+2) \quad [a^2 + 6a - 5]$$

$$20) \quad \left(2x - \frac{1}{2}\right)(2-3x) + (4x+1)\left(\frac{1}{2}x-1\right) \quad [-4x^2 + 2x - 2]$$

$$21) \quad (a+4b)(a-b) - (2a-b)(2a+b) \quad [-3a^2 - 3b^2 + 3ab]$$

$$22) \quad \left(-a + \frac{3}{2}\right)(a+1) - \left(\frac{a}{2} - 1\right)\left(2a + \frac{3}{2}\right) \quad \left[-2a^2 + \frac{7}{4}a + 3\right]$$

$$23) \quad (a+b-3)(2a-b+1) + (a-3b)(-b) \quad [2b^2 + 2a^2 - 5a + 4b - 3]$$

$$24) \quad \frac{3}{2}a(2a+1-b) - (-a+b+4)(a-b) - 4a(a-1) - \frac{3}{2}a \quad \left[-\frac{7}{2}ab + b^2 + 4b\right]$$

$$25) \quad (a-2b)(a+2b) - a(a+2b) - b(-4b-2a) \quad [0]$$

$$26) \quad 2a(a-3b)(a+b) - b(2a+b)(a-b) \quad [2a^3 + b^3 - 5ab^2 - 6a^2b]$$

$$27) \quad \frac{2}{3}x^2(x+y-1) - 2x(x+1)(x-y) - \frac{4}{3}x^2(2y-x) \quad \left[-\frac{8}{3}x^2 + 2xy\right]$$

$$28) \quad (2x^2 - y^2)(x+y) + \frac{1}{2}y^2(x-2y) - 3x^2(x+2y) \quad \left[-x^3 - 2y^3 - 4x^2y - \frac{1}{2}xy^2\right]$$

$$29) \quad \left(\frac{3}{2}xy^2 - \frac{1}{5}x^2y\right)\left(2x + \frac{20}{3}y\right) - 2xy\left(5y^2 - \frac{x^2}{5}\right) - \frac{2}{3}x^2y^2 \quad [x^2y^2]$$

$$30) \quad 2x[(2x+y-2)(2x-y+1) - (4x-y)(x+y+1) - 2(-1-3x+2y) + 3xy] \quad [0]$$

Prodotti notevoli

$$31) 3x(x+2) - (x-1) - (x+3)(x-3) - 2x^2 \quad [5x+10]$$

$$32) 3a^2 + (2a-5b)(2a+5b) - b(a-3b) + 22b^2 + ab \quad [7a^2]$$

$$33) (1-2x)^2 + (x+2)^2 - 5(x^2-2) \quad [15]$$

$$34) \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 - 3\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right) + 2(a-1)^2 \quad [3-5a]$$

$$35) \left(\frac{3}{2}a - 2b\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}a + 3b\right)^2 - 2(-a)^2 \quad [-3ab - 5b^2]$$

$$36) (a-1)^2 - (a-1)(a+1)(a^2-1) + (a^2+1)^2 \quad [5a^2 - 2a + 1]$$

$$37) (x+3)^2 - (6+x)(x-6) - (1-x)^2 + x(x-8) \quad [44]$$

$$38) (x+a+2)^2 - (x+a)^2 - 4(2+x+a) \quad [-4]$$

$$39) (a+1+2y)^2 - (a-1)(a+1) - (1+2y)^2 - 2a \quad [1+4ay]$$

$$40) a^3 - (-b)^3 - (a+b)^3 - \frac{1}{3}a(3b+1)(1-3b) \quad [-3a^2b - \frac{1}{3}a]$$

$$41) (x-2y)^3 - (2x-y)^3 - 6xy(x+y) + 7y^3 + 8x^3 \quad [x^3]$$

$$42) (x+y)^2 - 2y(x-y) - (x+y)(y-x) \quad [2x^2 + 2y^2]$$

$$43) (a^2+b^2)(a^2-b^2) - (a^2+b^2)^2 + 2a^2(a^2+b^2) \quad [2a^4 - 2b^4]$$

$$44) (x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 \quad [x^3 + 6x^2 + 12x + 8]$$

$$45) (2a+x-2)^2 + 4a(2-x) - (x-3)^2 - [(-2a)^2 - 5] \quad [2x]$$

Calcolo letterale
Polinomi

$$46) (a-3)(a+3) - (2a+1)^2 \quad [-3a^2 - 4a - 10]$$

$$47) \left(\frac{1}{2}x - y\right)\left(y + \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}(x+y)^2 \quad \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy \right]$$

$$48) (x-2y)(2y-x) - (x+y)(x-y) \quad [-2x^2 - 3y^2 + 4xy]$$

$$49) \left(\frac{1}{3}a+1\right)\left(\frac{1}{3}a-1\right) + (a-1)^2 - \frac{2}{9}a(5a-9) \quad [0]$$

$$50) (2x-1)^2 + \left(\frac{3}{2}x-1\right)^2 \quad \left[\frac{25}{4}x^2 - 7x + 2 \right]$$

$$51) (x+2y)^2 - (x-2y)^2 - 8xy \quad [0]$$

$$52) \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2} \quad [2x^2]$$

$$53) (2x-3y)(2x+3y) - (2x+3y)^2 \quad [-18y^2 - 12xy]$$

$$54) (xy+1)(1-xy) + (xy+1)^2 \quad [2xy + 2]$$

$$55) (a^2-2)^2 - (a^2-2)(a^2+1) - a^2 - 6 \quad [-4a^2]$$

$$56) (3x-y^2)^2 - (3x+y^2)(3x-2y^2) - y^2(y^2-3x+2y^2) \quad [0]$$

$$57) 2x(3x-2y)^2 + x(x+4y)(x-4y) + 8xy^2 \quad [19x^3 - 24x^2y]$$

$$58) (5ab-3a)^2 - 2(5ab-3a)(3a+5ab) + (4a+5ab)^2 \quad [43a^2 + 10a^2b]$$

$$59) [(x+1)(x-1)]^2 - (2+x^2)^2 + \frac{3}{2}(2x-3)(2x+3) \quad \left[-\frac{33}{2} \right]$$

$$60) -(xy+1)(xy-1) + (xy+1)^2 \quad [2xy + 2]$$

Scomposizione di polinomi

Scomponi mettendo in evidenza il fattore comune

- 61) $3x + 6y$; $a^3x - a^3y$; $x^3 + 4x$
- 62) $8a^4 - 4a^3 + 2a^2$; $3xy + 6x^2 - 9y^2$; $a^2b - ab$
- 63) $2ab - 4a^2$; $\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a$; $2ax - 4a + 2a^2$
- 64) $5x - 10xy + 15y$; $-27a^2 + 9ay - 18a$; $-6a^3 + 9a^2b + 3a^2$
- 65) $(x + 3y) - (x + 3y)^2$; $(a - b)^2 - (a - b)$; $(2x - 3y^2)^3 + (2x - 3y^2)^2$

Scomponi con il metodo del raccoglimento parziale

- 66) $5ay - y - 5a + 1$ $[(5a - 1)(y - 1)]$
- 67) $x^2y^2 + 1 + x^2 + y^2$ $[(x^2 + 1)(y^2 + 1)]$
- 68) $3a^2b - 2a + 12ab - 8$ $[(3ab - 2)(a + 4)]$
- 69) $x^3 + 12x^2 + 6x + 72$ $[(x + 12)(x^2 + 6)]$
- 70) $5ax + 2ay + 5bx + 2by$ $[(5x + 2y)(a + b)]$
- 71) $ay - by - b + a$ $[(a - b)(y + 1)]$
- 72) $(a + b)^2 - ax - bx$ $[(a + b)(a + b - x)]$
- 73) $ay - 4a - 3y + 12$ $[(y - 4)(a - 3)]$
- 74) $2ax + 4x - 3a - 6$ $[(a + 2)(2x - 3)]$
- 75) $a^2bx + a^2b + bxy^2 + by^2$ $[b(x + 1)(a^2 + y^2)]$
- 76) $x^4 + 4x^2 - x^3y - 4xy$ $[x(x^2 + 4)(x - y)]$

Calcolo letterale
Polinomi

Scomponi utilizzando i prodotti notevoli

- 77) $x^2 - 49y^2$; $9 - a^2b^2$
- 78) $4x^2 - 9y^2$; $25a^6b^8 - \frac{1}{4}$
- 79) $81 - a^2$; $16x^2 - a^4$
- 80) $9x^2 + 6x + 1$; $a^2 + 4ab + 4b^2$
- 81) $y^3 - 3y^2 + 3y - 1$; $y^3 + 3y^2 + 3y + 1$
- 82) $x^2 - 4x + 4$; $25x^2 - 60x + 36$
- 83) $4a - 4a^2 - 1$; $9y^2 + \frac{1}{4} - 3y$
- 84) $x^2 - 4x + 1$; $1 - 2x + x^2$
- 85) $\frac{1}{4}a^2b^2 - ab + 1$; $25x^2 - 1$
- 86) $a^3 + 6a^2 + 12a - 8$; $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$
- 87) $4 - 4b + b^2$; $9a^2 - 6a + 1$
- 88) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$; $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$
- 89) $x^3 + \frac{1}{27}y^3 + x^2y + \frac{1}{3}xy^2$; $a^3b^3 - 9a^2b^2 + 27ab - 27$
- 90) $a^2 - 9b^2$; $\frac{1}{4} - x + x^2$

Calcolo letterale
Polinomi

Scomponi combinando più metodi

$$91) \quad y - 2 - x^2y + 2x^2 \quad [(x+1)(1-x)(y-2)]$$

$$92) \quad x^6 - x^4 + x^2 - 1 \quad [(x+1)(x-1)(x^4+1)]$$

$$93) \quad 3x^4 - 12ax^2 + 12a^2 \quad [3(x^2 - 2a)^2]$$

$$94) \quad 4a^4 + 4 - 8a^2 \quad [4(a+1)^2(a-1)^2]$$

$$95) \quad x^2 - y^2 - 3(x-y)^2 \quad [2(2y-x)(x-y)]$$

$$96) \quad x^3 + x^2y - x - y \quad [(x-1)(x+1)(x+y)]$$

$$97) \quad 7x^4 - 7 \quad [7(x-1)(x+1)(x^2+1)]$$

$$98) \quad -2xb^2 - 4xb - 2x \quad [-2x(b+1)^2]$$

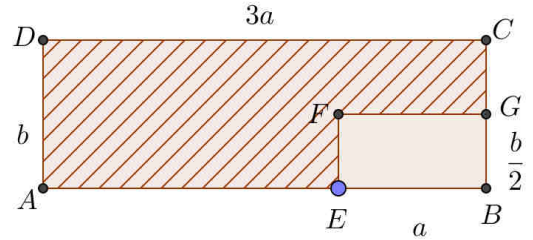
$$99) \quad x^5 - 10x^4 + 25x^3 \quad [x^3(x-5)^2]$$

$$100) \quad 2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2 \quad [(x+y)(2+x+y)]$$

**PROBLEMI
POLINOMI**

1) *Problema svolto*

Determina perimetro e area della figura tratteggiata.



Svolgimento

Determiniamo per differenza $\overline{AE} = 2a$

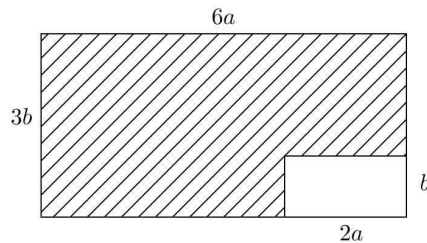
Quindi il perimetro della figura tratteggiata sarà $2p = 2a + \frac{b}{2} + a + \frac{b}{2} + 3a + b = 6a + 2b$

Osserviamo che risulta uguale al perimetro del rettangolo ABCD.

Per determinare l'area della figura tratteggiata basta sottrarre all'area del rettangolo ABCD l'area del rettangolo EBGH. Otteniamo quindi:

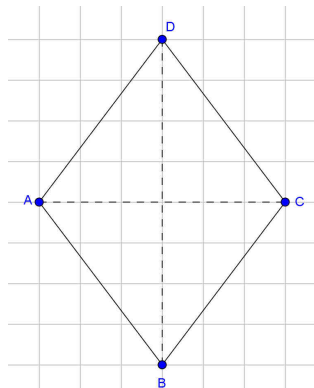
$$A = 3a \cdot b - a \cdot \frac{b}{2} = 3ab - \frac{1}{2}ab = \frac{5}{2}ab$$

2) Determina perimetro e area della figura tratteggiata.



$$[2p = 12a + 6b; \quad A = 16ab]$$

3) Determina perimetro e area del rombo in figura sapendo che $\overline{AC} = 6a$; $\overline{BD} = 8a$.



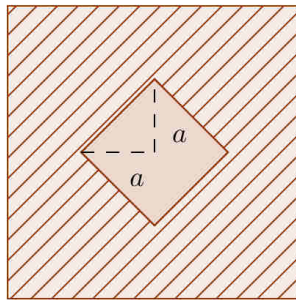
$$[2p = 20a; \quad A = 24a^2]$$

Calcolo letterale
Polinomi

- 4) Considera un rettangolo R di dimensioni a e b . Se a viene aumentato del 50% e b viene diminuito del 50% come risulta l'area del nuovo rettangolo R' ? Come risulta rispetto all'area di R ?

$$[A_{R'} = \frac{3}{4}ab; \quad A_{R'} = \frac{3}{4}A_R]$$

- 5) Determina l'area della zona tratteggiata.



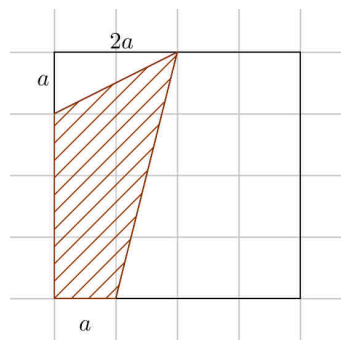
$4a$

$$[14a^2]$$

- 6) Determina l'area di un esagono regolare di lato $2a$.

$$[A = 6\sqrt{3}a^2]$$

- 7) Considera un quadrato di lato $4a$ e determina l'area della zona tratteggiata.



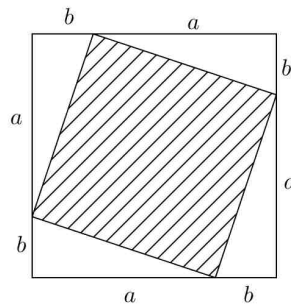
$$[A = 5a^2]$$

- 8) Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni a , $2a$, $3a$. Calcola il suo volume V . Aumenta di 1 tutte le dimensioni e calcola il nuovo volume V' .

$$[V = 6a^3; \quad V' = 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1]$$

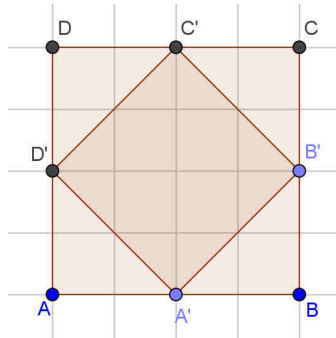
Calcolo letterale
Polinomi

9) Calcola l'area A della zona tratteggiata.



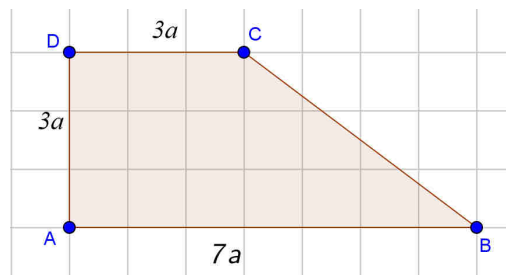
$$[A = a^2 + b^2]$$

10) Calcola l'area del quadrato ABCD di lato $\overline{AB} = 2a + 3$ e l'area del quadrato A'B'C'D' ottenuto congiungendo i punti medi. Come risulta l'area di A'B'C'D' rispetto all'area di ABCD?



$$[A(ABCD) = 4a^2 + 9 + 12a; \quad A(A'B'C'D') = 2a^2 + \frac{9}{2} + 6a]$$

11) Determina perimetro e area del trapezio ABCD.



$$[2p = 18a; \quad A = 15a^2]$$

SCHEDA PER IL RECUPERO
MONOMI E POLINOMI

1. $\left(-\frac{1}{3}x\right)^2 \cdot (-2y) + (-xy)^3 + xy \cdot \left(-\frac{1}{9}x\right) + x^3y \cdot (-y)^2$ [$-\frac{1}{3}x^2y$]

2. $[-3xy \cdot \left(\frac{1}{9}x^2y\right) - y^2 \cdot (-x)^3] : (-x)^2 + 2x^2y^2 : (-x)$ [$-\frac{4}{3}xy^2$]

1. In un triangolo isoscele la base misura $10a$ e il lato obliquo $13a$. Determina perimetro e area del triangolo.

[$36a$; $60a^2$]

2. Un quadrato ha lato che misura $4a$. Calcola perimetro, area e misura della diagonale.

[$16a$; $16a^2$; $4a\sqrt{2}$]

3. Considera un triangolo equilatero di lato $3b$. Determina perimetro e area del triangolo.

[$9b$; $\frac{9}{4}\sqrt{3}b^2$]

6. $(x+3) \cdot (2x-5) + (1-3x) \cdot (4-x) + (2-5x) \cdot (4-x)$ [$10x^2 - 34x - 3$]

7. $\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 - 3 \cdot \left(a-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(a+\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot (a-1)^2$ [$3-5a$]

8. $(a-2b)^2 - (a+b) \cdot (a-b)$ [$5b^2 - 4ab$]

9. $(2a^2b + ab^3) : a + (a-b)^2$ [$a^2 + b^2 + b^3$]

10. $(a-2b)^3 - (a-b) \cdot (a^2 + 2ab) - (-2b)^3$ [$-7a^2b + 14ab^2$]

SCHEMA PER IL RECUPERO
SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO

- | | | |
|-----|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $x^2 + xy + x + y$ | $[(x + y)(x + 1)]$ |
| 2. | $x^2 + 2xy + 2x + 4y$ | $[(x + 2y)(x + 2)]$ |
| 3. | $6a + axy - 3ay - 2ax$ | $[a(x - 3)(y - 2)]$ |
| 4. | $16a^2 - 36b^2$ | $[4(2a - 3b)(2a + 3b)]$ |
| 5. | $a^2 + 6a + 9$ | $[(a + 3)^2]$ |
| 6. | $2a^2 + 12a + 18$ | $[2(a + 3)^2]$ |
| 7. | $a^2 + 6a + 9 - b^2$ | $[(a + 3 + b)(a + 3 - b)]$ |
| 8. | $\frac{4}{9}a^2 - b^2$ | $\left[\left(\frac{2}{3}a + b\right)\left(\frac{2}{3}a - b\right)\right]$ |
| 9. | $x^2 - xy + \frac{1}{3}ax - \frac{1}{3}ay$ | $\left[(x - y)\left(x + \frac{1}{3}a\right)\right]$ |
| 10. | $3x(a - b) - 2(a - b)$ | $[(a - b)(3x - 2)]$ |
| 11. | $x^5 - x^3$ | $[x^3(x + 1)(x - 1)]$ |
| 12. | $4a^2b^3 - 6ab^2$ | $[2ab^2(2ab - 3)]$ |
| 13. | $(x + y)^2 - 1$ | $[(x + y + 1)(x + y - 1)]$ |
| 14. | $9a^2 - 9b^2$ | $[9(a + b)(a - b)]$ |
| 15. | $x^4 - 1$ | $[(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)]$ |