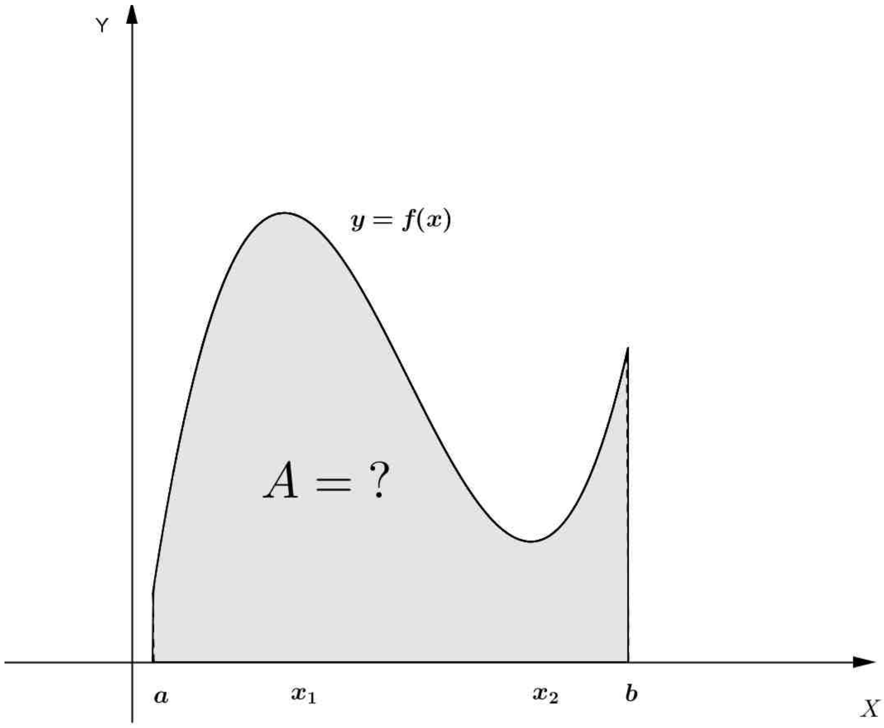
Integrali indefiniti

Premessa

Il problema del calcolo dell'area del "sotto-grafico" di f(x)

Un problema importante, anche per le applicazioni in fisica, è quello del calcolo dell'area "sotto" al grafico di una funzione *f(x)* definita e continua in $[a,b]$ cioè tra l'asse x, il G_f e le rette $x=a$ e $x=b$.



Se la funzione è una retta di equazione $y=mx+q$, il calcolo si riduce a quello dell'area di un trapezio rettangolo, ma in generale come si può calcolare l'area A?

Si dimostra che questo problema è strettamente legato alla determinazione di una funzione **la cui derivata** sia uguale a *f(x)*.

Diventa quindi importante, per il calcolo dell'area A, saper determinare una funzione chiamata **"primitiva**" di *f(x)* cioè una funzione *F(x)* tale che $F'(x)=f(x)$.

Cominceremo quindi trattando questo problema.

Funzioni primitive

Definizione
F(x) si dice " primitiva" di f(x) se $F'(x) = f(x)$

Esempio
Quali sono le funzioni primitive di $f(x) = \cos x$?

Ricordando che $D(senx) = \cos x$ avrò che $F(x) = senx$ ma anche $y = senx + c$ (con $c \in R$) risulta funzione primitiva di $f(x) = \cos x$ poiché $D(senx + c) = \cos x$.

Abbiamo infatti il seguente teorema:

Teorema: se F(x) è una primitiva di f(x) $\Rightarrow$ anche F(x) + c ($c \in R$) è una primitiva di f(x) ed ogni primitiva di f(x) è del tipo F(x) + c.

Dimostrazione

Poiché $D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$ anche $F(x) + c$ è primitiva di f(x).

Inoltre se G(x) è una primitiva di f(x) si ha:

$$D(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x) - F(x) = c \;\Rightarrow\; G(x) = F(x) + c$$

Definizione: l'insieme delle primitive di f(x) viene indicato con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

che si legge *integrale indefinito di f(x) in dx.*

Quindi se F(x) è una primitiva di f(x)

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ con } c \in R$$

f(x) prende il nome di *funzione integranda.*

L'integrazione indefinita può essere considerata l'operazione inversa della differenziazione poiché

$$d\left(\int f(x)\ dx\right) = d\left(F(x) + c\right) = F'(x)\ dx = f(x)\ dx$$

E' chiaro inoltre che $D\left(\int f(x)dx\right) = D(F(x) + c) = F'(x) = f(x)$

Proprietà dell'integrale indefinito

1. $\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx$

Dimostrazione

Se F(x) è una primitiva di *f(x)* allora $k \cdot F(x)$ è primitiva di $k \cdot f(x)$ poiché $D(k \cdot F(x)) = k \cdot f(x)$

Esempio: $\int 2\cos x dx = 2\int \cos x dx = 2(senx + c)$ o anche $2senx + c$

2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Dimostrazione

Se F(x) e G(x) sono primitive rispettivamente di *f(x)* e di *g(x)*,allora $D(F(x) + G(x)) = f(x) + g(x)$ e quindi F(x) + G(x) è una primitiva di *f(x)+g(x)*.

Esempio: $\int (x + \cos x)dx = \int x\ dx + \int \cos x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + senx + c$

Integrali indefiniti immediati

1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \qquad con \qquad \alpha \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$ (*)

3) $\int senx\; dx = -\cos x + c \qquad\qquad \int \cos x\; dx = senx + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = tgx + c \qquad\qquad \int \frac{1}{sen^2 x}\, dx = -\cot gx + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arcsenx + c \qquad\qquad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctgx + c$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ (ricorda che $Da^x = a^x \cdot \ln a$)

$\int e^x dx = e^x + c$ (caso particolare per $a = e$)

(*) NOTA $\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} \cdot (-1) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

Esempi

1) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

2) $\int \frac{3}{x}\, dx = 3\int \frac{1}{x}\, dx = 3\ln|x| + c$

3) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx = tgx + senx + c$

$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4arcsenx + c$

4) $\int 2e^x dx = 2\int e^x dx = 2e^x + c$

Integrazioni basate sulla derivata della funzione composta

Ricordando la regola di derivazione di una funzione composta, abbiamo:

1) $$\boxed{\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx = \frac{1}{\alpha+1}\cdot f^{\alpha+1}(x)+c \qquad \alpha\neq -1}$$

***Esempio 1*:** $\int sen^2 x\cdot \cos x\ dx = \frac{sen^3 x}{3}+c$

Infatti se deriviamo $D\left(\frac{sen^3 x}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot 3sen^2 x\cdot\cos x = sen^2 x\cdot \cos x$

Esempio 2: $\int \left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx$

Cerchiamo di riportarci al caso $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\ dx$ osserviamo che $D\left(x^2+1\right)=2x$, mentre nella nostra funzione integranda abbiamo solo *x*. Per ottenere *f'(x)* moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int \left(x^2+1\right)^3\cdot x\ dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^3\cdot 2x\ dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+c$$

Esempio 3: $\int \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\ dx = \frac{\ln^3 x}{3}+c$

Esempio 4: $\int \sqrt{x+1}\ dx$

Osserviamo che $\sqrt{x+1}=\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}$ e che $D\left(x+1\right)=1$, quindi

$$\int \sqrt{x+1}\ dx = \int \left(x+1\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\left(x+1\right)\sqrt{1+x}+c$$

NOTA

Un caso significativo è : $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\ dx = -\frac{1}{f(x)}+c}$$

2) $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + c}$

Esempio 1: $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\ dx$

Se ci accorgiamo che $D(x^2+x) = 2x+1$, abbiamo subito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\ dx = \int \frac{D(x^2+x)}{x^2+x}\ dx = \ln|x^2+x| + c$$

Esempio 2: $\int \frac{senx}{\cos x}\ dx$

In questo caso $D(\cos x) = -senx$ mentre noi abbiamo $senx$ possiamo. Possiamo "aggiustare" le cose così:

$$\int \frac{senx}{\cos x}\ dx = -\int \frac{(-senx)}{\cos x} dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

3)

a) $\boxed{\int (senf(x)) \cdot f'(x)\ dx = -\cos(f(x)) + c}$

Esempio: $\int sen2x\ dx$

Se $f(x) = 2x$ allora $D(f(x)) = 2$.

Possiamo "aggiustare" le cose:

$$\int sen2x\ dx = \frac{1}{2}\int (sen2x) \cdot 2\ dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

b) $\boxed{\int (\cos f(x)) \cdot f'(x)\ dx = sen(f(x)) + c}$

Esempio: $\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\ dx$.

$$\int \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + c$$

c) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx = tg\big(f(x)\big)+c}$$

Esempio: $\int \frac{3}{\cos^2 3x}\ dx = tg3x + c$

d) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}\ dx = -\cot g\big(f(x)\big)+c}$$

Esempio: $\int \frac{x^2}{sen^2 x^3}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{sen^2 x^3}\, dx = -\frac{1}{3}\cot gx^3 + c$

e) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\ dx = arcsen\big(f(x)\big)+c}$$

Esempio: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2} arcsenx^2 + c$

f) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\ dx = arctg\big(f(x)\big)+c}$$

Esempio: $\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)}\, dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

4) $$\boxed{\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c}$$

$$\boxed{\int \left(e^{f(x)}\cdot f'(x)\right)\ dx = e^{f(x)}+c}$$

Esempio 1: $\int x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+1}+c$ notando che $D\left(x^2+1\right) = 2x$

Esempio 2: $\int \cos x\cdot 3^{senx}dx = \frac{3^{senx}}{\ln 3}+c$

ESERCIZI
INTEGRAZIONI IMMEDIATE

1) $\int senx \cdot \cos x \; dx$

2) $\int senx \cdot \cos^4 x \; dx$

3) $\int (1+x)^4 dx$

4) $\int \sqrt{2x+1} \; dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx$

6) $\int tgx \; dx$

7) $\int \cot gx \; dx$

8) $\int \frac{1}{2x+1} \; dx$

9) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

10) $\int \frac{e^x}{2e^x+5} \; dx$

11) $\int \cos 3x \; dx$

12) $\int \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

13) $\int \frac{1}{sen^2(3-x)} \; dx$

14) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

15) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \; dx$

16) $\int sen^3 x \cdot \cos x \; dx$

17) $\int (2+x)^3 dx$

18) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

19) $\int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \; dx$

20) $\int \frac{1}{sen^2(2-x)} dx$

21) $\int \frac{1}{x^2+3} dx$

22) $\int e^{2x+1} dx$

23) $\int \frac{x}{x^2-2} dx$

24) $\int \frac{x-1}{x^2+5} dx$

25) $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$

26) $\int x \cdot (x^2-1)^3 dx$

27) $\int x \cdot \cos x^2 dx$

28) $\int sen 4x \; dx$

29) $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx$

30) $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{sen^2 x}{2}+c$

2) $-\frac{\cos^5 x}{5}+c$

3) $\frac{(1+x)^5}{5}+c$

4) $\frac{1}{3}\cdot(2x+1)\cdot\sqrt{2x+1}+c$

5) $-\sqrt{1-x^2}+c$

6) $-\ln|\cos x|+c$

7) $\ln|senx|+c$

8) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$

9) $\ln|\ln x|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln(2\cdot e^x+5)+c$

11) $\frac{1}{3}sen3x+c$

12) $\frac{1}{4}sen\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+c$

13) $\cot g(3-x)+c$

14) $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$

15) $2e^{\sqrt{x}}+c$

16) $\frac{sen^4 x}{4}+c$

17) $\frac{(2+x)^4}{4}+c$

18) $\frac{3}{2}arcsenx^2+c$

19) $-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+c$

20) $\cot g(2-x)+c$

21) $\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

22) $\frac{1}{2}e^{2x+1}+c$

23) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2|+c$

24) $\frac{1}{2}\ln(x^2+5)-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}+c\right)$

25) $\ln|e^x-1|+c$

26) $\frac{1}{8}(x^2-1)^4+c$

27) $\frac{1}{2}senx^2+c$

28) $-\frac{1}{4}\cos 4x+c$

29) $\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+c$

30) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}x)+c$

Integrazione mediante semplici trasformazioni

1) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\ dx$

In questo caso conviene semplicemente "separare" i termini al numeratore:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\ dx = \int\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = arctgx + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

2) $\int sen^2 x\ dx$

Ricordiamo che $sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, quindi:

$$\int sen^2 x\ dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x + c$$

3) $\int \cos^2 x\ dx$

Analogamente al precedente ricordando che $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

4) $\int sen^3 x\ dx$

Possiamo scrivere: $sen^3 x = senx \cdot sen^2 x = senx\left(1-\cos^2 x\right) = senx - senx\cos^2 x$ quindi

$$\int sen^3 x\ dx = \int senx\ dx - \int senx \cdot \cos^2 x\ dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

5) $\int \cos^3 x\ dx$

Possiamo scrivere $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\left(1 - sen^2 x\right) = \cos x - \cos x \cdot sen^2 x$ e si procede come nel caso precedente.

6) $\int \frac{1}{senx\cos x}\ dx$

In questo caso conviene sostituire $1 = sen^2 x + \cos^2 x$ e poi separare i due termini:

$$\int \frac{1}{senx\cos x}\ dx = \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{senx\cos x} dx = \int \frac{sen^2 x}{senx\cos x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{senx\cos x} dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{senx} dx =$$
$$= -\ln|\cos x| + \ln|senx| + c$$

7) $\int tg^2 x\ dx$

$$\int tg^2 x\ dx = \int \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = tgx - x + c$$

8) $\int \frac{1}{senx} dx$

Se poniamo $senx = sen2\left(\frac{x}{2}\right) = 2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ e ritroviamo un integrale simile al n°6:

$$\int \frac{1}{senx} dx = \int \frac{1}{2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{sen^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{sen\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\ dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2}sen\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\ dx + \int \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}\ dx = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|sen\frac{x}{2}\right| + c$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Consideriamo una funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ con grado di D(x) ≤ 2.

Distinguiamo due casi:

a) **Se il grado del numeratore N(x) è maggiore o uguale al grado del denominatore D(x)** si esegue la divisione.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+3}\, dx$ $\Longrightarrow$

$$
\begin{array}{ccc|c}
x^2 & 0x & 1 & x+3 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -3x & & x-3 \\ \cline{1-2}
= & -3x & 1 & \\
 & 3x & 9 & \\ \cline{2-3}
 & = & 10 &
\end{array}
$$

Quindi $x^2+1 = (x-3)(x+3)+10$

e sostituendo

$$\int \frac{x^2+1}{x+3}\, dx = \int \frac{(x-3)(x+3)+10}{x+3}\, dx = \int (x-3)\, dx + \int \frac{10}{x+3} dx = \frac{(x-3)^2}{2} + 10 \cdot \ln|x+3| + c$$

b) **Se grado di N(x) < grado di D(x)**

- Se il grado di D(x) è 1, allora il grado di N(x) sarà 0 (quindi N(x) = costante) e l'integrale si risolve facilmente.

Esempio: $\displaystyle\int \frac{10}{x+3} dx = 10 \int \frac{1}{x+3}\, dx = 10 \cdot \ln|x+3| + c$

- Se il grado di D(x) è 2, allora D(x) = ax^2+bx+c e distinguiamo tre casi a seconda che il discriminante dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ (Δ) sia positivo, nullo o negativo.

Caso 1: $\Delta > 0$

In questo caso ci si riconduce a $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

Esempio: $\int \frac{2x-7}{x^2-x-2}\,dx$

Considerando il denominatore si ha che $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$: cerchiamo due costanti, che chiameremo A e B, in modo che si abbia:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Basta sviluppare al secondo membro dell'uguaglianza e porre, per il principio di identità dei polinomi, l'uguaglianza tra i coefficienti del numeratore:

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)\cdot(x-2)}$$

Uguagliando i coefficienti si ha il sistema:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-1 \end{cases}$$

Perciò: $\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{3}{(x+1)} - \frac{1}{(x-2)}$ e quindi:

$$\int \frac{2x-7}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{3}{x+1}dx - \int \frac{1}{x-2}dx = 3\ln|x+1| - \ln|x-2| + c$$

Attenzione
Se nel polinomio al denominatore $a \neq 1$ occorre ricordare che $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Esempio: $\int \frac{1}{2x^2-5x-3}dx$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$ ammette come radici $x_1 = 3; x_2 = -\frac{1}{2}$, perciò la sua scomposizione sarà:

$2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}(x-3)\left(\frac{2x+1}{\cancel{2}}\right) = (x-3)(2x+1)$, da cui $\frac{1}{2x^2-5x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+1}$

e, procedendo come nell'esempio precedente, si giunge alla soluzione.

Caso 2: $\Delta = 0$

In questo caso il polinomio al denominatore è un quadrato pertanto ci si riconduce a

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{1}{f(x)} + c$$

Esempio 1: $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1}$

$4x^2 - 4x + 1$ è il quadrato di $(2x-1)$ perciò l'integrale assegnato può essere scritto come:

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x-1)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2x-1)} + c$$

Esempio 2: $\int \frac{x+5}{9x^2 - 6x + 1}dx$

Prima di "spezzare" il numeratore dobbiamo vedere quello che può essere utile affinché il numeratore possa essere riportato ad essere la derivata del denominatore.

$$D(9x^2 - 6x + 1) = 18x - 6 = 18\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Quindi possiamo scrivere $x + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 5 = x - \frac{1}{3} + \frac{16}{3}$

$$\int \frac{x - \frac{1}{3}}{9x^2 - 6x + 1}dx + \frac{16}{3}\int \frac{1}{9x^2 - 6x + 1}dx = \frac{1}{18}\ln\left(9x^2 - 6x + 1\right) - \frac{16}{9}\frac{1}{(3x-1)} + c$$

Nota: la prima parte della risoluzione può anche essere scritta come

$$\frac{1}{18}\ln(3x-1)^2 = \frac{1}{18}\cdot 2\cdot \ln|3x-1| = \frac{1}{9}\cdot \ln|3x-1|$$

Caso 3: $\Delta < 0$

In questo caso il polinomio al denominatore non si può scomporre.

Esempio 1: $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 6}$

Proviamo a fare in modo che nel denominatore ci sia un quadrato in modo da poter applicare $\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = arctg\left(f(x)\right) + c$

$$x^2 - 4x + 6 = \left(x^2 - 4x + 4\right) + 2 = (x-2)^2 + 2 \text{, quindi:}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 2}$$

Ora è necessario far diventare 1 il termine noto al denominatore in modo da poter applicare l'integrale dell'arcotangente:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 + 2} = \int \frac{dx}{2\left[\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left[\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Esempio 2: $\int \frac{3x+1}{x^2 + 4}\, dx$

Anche in questo caso, prima di "spezzare" il numeratore, vediamo cosa occorre facendo la derivata del denominatore:

$$D(x^2 + 4) = 2x$$

Quindi basta spezzare senza fare ulteriori passaggi:

$$\int \frac{3x}{x^2 + 4}\, dx + \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 4}\, dx + \int \frac{dx}{4\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 4\right) + \int \frac{dx}{4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right]} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 4\right) + \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right]} dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 4\right) + \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

ESERCIZI
INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

1) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

3) $\int \frac{dx}{9x^2-25}$

4) $\int \frac{2}{x^2-3}dx$

5) $\int \frac{dx}{x^2+8x+16}$

6) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx$

7) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$

8) $\int \frac{x}{x^2+x+2}dx$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

2) $-\ln|x-1|+\ln|x-2|+c=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$

3) $\frac{1}{30}\ln|3x-5|-\frac{1}{30}\ln|3x+5|+c=\frac{1}{30}\ln\left|\frac{3x-5}{3x+5}\right|+c$

4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c$

5) $-\frac{1}{x+4}+c$

6) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+1|-\frac{2}{x-1}+c=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+c$

7) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

8) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+2\right)-\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+c$

Integrazione per sostituzione

Esempio 1: $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

L'integrale non è immediato e, per cercare di renderlo tale, poniamo $t=\sqrt{x}$.

$$t=\sqrt{x} \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx = 2\cdot t\ dt$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 2t\ dt = 2\int \frac{t}{t(t+1)}dt = 2\int \frac{1}{t+1}dt = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\cdot \ln|t+1| + c$$

Tornando alla variabile *x* (essendo $t=\sqrt{x}$) abbiamo:

$$2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + c$$

Esempio 2: $\int \frac{1}{senx}dx$

Nota

Per risolvere integrali in cui compaiono funzioni goniometriche, può essere utile ricordare che

$$senx = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{dove} \quad t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

Considerando quindi la sostituzione $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ si ha:

$$\frac{x}{2} = arctgt \rightarrow x = 2arctgt \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Sostituendo:

$$\int \frac{1}{senx}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}}\cdot 2\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

Osservazione: eravamo già pervenuti a questo risultato con calcoli più complessi nell'esempio 8 degli integrali in cui si utilizzano delle scomposizioni.

Esempio 3: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

In questo caso poniamo $x = a \cdot sent$

da cui $dx = a\cos t \cdot dt$ e sostituendo:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - (a \cdot sent)^2}\, a \cdot \cos t \;\, dt = \int \sqrt{a^2\left(1 - sen^2 t\right)}\, a \cdot \cos t \;\, dt = a^2 \int \cos^2 t \;\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} sen2t + c$$

Dalle formule goniometriche:

$$\frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} sen2t + c = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} 2sent\cos t + c$$

Visto che $x = a \cdot sent$, si ha $sent = \frac{x}{a}$ vale a dire $t = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$ da cui, sostituendo nella soluzione dell'integrale:

$$\frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4} 2sent\cos t + c = \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + c = \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Per esempio se abbiamo $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$

poniamo $x = 2sent$ da cui $dx = 2\cos t \;\, dt$ e, seguendo i passaggi precedenti, si ha:

$$\int \sqrt{4\left(1 - sen^2 t\right)}\,2\cos t dt = 4\int \cos^2 t dt = 4\int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)\, dt = 2t + sen2t + c =$$

$$2arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + c$$

Integrazione per parti

Ricordando la regola di derivazione del prodotto:

$$D(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \rightarrow f'(x)\cdot g(x) = D(f(x)\cdot g(x)) - f(x)\cdot g'(x)$$

ed integrando: $\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$

che viene detta regola di "integrazione per parti" in cui *f'(x)* prende il nome di <u>fattore derivato</u> e *g(x)* è detto <u>fattore finito.</u>

Esempio 1: $\int x\cdot \cos x dx$

Possiamo considerare cosx come fattore derivato cioè $\cos x = D(senx)$:

$$\int x\cdot D(senx)\ dx = xsenx - \int 1\cdot senx\ dx = xsenx + \cos x + c$$

NOTA: se avessimo scelto come fattore derivato x ($x = D\left(\frac{x^2}{2}\right)$), avremmo solo complicato la situazione senza risolvere l'integrale.

Esempio 2: $\int x\cdot e^x dx$

$$\int x\cdot e^x dx = \int x\cdot D(e^x)dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Esempio 3: $\int x\cdot \ln x dx$

$$\int x\cdot \ln x dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot \ln x\ dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

***Esempio 4**:* $\int arctgx dx$

In casi come questo, possiamo sempre pensare che la funzione sia moltiplicata per un fattore

1 =D(x)

e quindi $\int 1\cdot arctgx dx = \int D(x)\cdot arctgx\ dx = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

***Esempio 5**:* $\int \ln x\ dx$

$$\int 1\cdot \ln x\ dx = \int D(x)\cdot \ln x\ dx = x\ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

Esercizi di ricapitolazione sugli integrali indefiniti

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

3) $\int \frac{(arcsenx)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

5) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

6) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

7) $\int \frac{x+1}{x^2+5}dx$

8) $\int \frac{dx}{\cos x}$

9) $\int \ln^2 x dx$

10) $\int e^x senx\ dx$

11) $\int \ln x\ dx$

12) $\int \frac{\cos x - senx}{\cos x + senx}dx$

13) $\int \cos x \cdot sen2x\ dx$

14) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

15) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

16) $\int \frac{x+1}{x^2-25}dx$

17) $\int \frac{1}{x^2+9}dx$

18) $\int \frac{dx}{x^2+10x+25}$

19) $\int \frac{1}{\cos x+1}dx$

20) $\int x^2 e^x dx$

21) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}}dx$

22) $\int \sqrt{x+1}\ dx$

23) $\int \frac{x+1}{x^2+4}dx$

24) $\int \frac{dx}{senx+1}$

25) $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$

26) $\int \frac{x+3}{x^2+9}dx$

27) $\int xarctgx\ dx$

28) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

29) $\int \frac{2x+3}{x+5}dx$

30) $\int \sqrt{5-x^2}dx$

Soluzioni degli esercizi

1) $\frac{1}{2}arcsen2x+c$

2) $-\ln|x-2|+\ln|x-3|+c$

3) $\frac{1}{4}(arcsenx)^4+c$

4) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

5) $\frac{1}{6}arctg\left(\frac{2x}{3}\right)+c$

6) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$

7) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$

8) $\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+c$

9) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$

10) $\frac{1}{2}e^x(senx-\cos x)+c$

11) $x\ln x-x+c$

12) $\ln|\cos x+senx|+c$

13) $-\frac{2}{3}\cos^3 x+c$

14) $\frac{1}{2}arcsenx+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$

15) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$

16) $\frac{3}{5}\ln|x-5|+\frac{2}{5}\ln|x+5|+c$

17) $\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

18) $-\frac{1}{x+5}+c$

19) $tg\left(\frac{x}{2}\right)+c$

20) $e^x\left(x^2-2x+2\right)+c$

21) $\frac{1}{4}arcsen(2x^2)+c$

22) $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x}+c$

23) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$

24) $-\frac{2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}+c$

25) $-\frac{1}{x-2}+c$

26) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

27) $\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+c$

28) $\frac{1}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{6}\ln|x+3|+c$

29) $2x-7\ln|x+5|+c$

30) $\frac{5}{2}arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{5-x^2}+c$