Problemi di massimo e minimo

Supponiamo di avere una funzione $f: [a; b] \to R$ continua in $[a; b]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo assoluto M e il minimo assoluto m.

I problemi di massimo e minimo sono problemi (di geometria piana o solida oppure di geometria analitica ecc.) in cui dobbiamo determinare una funzione (che per esempio esprime, in funzione di una variabile scelta x, un perimetro o un'area o un volume ecc.) e individuare il valore di x per cui la funzione assume il massimo o il minimo assoluto.

Poiché la variabile avrà una limitazione data dal tipo di problema, la funzione dovrà essere considerata in un dato intervallo.

Se la funzione è continua e l'intervallo è limitato, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluto.

Possiamo quindi procedere così:

- Calcolare la derivata della funzione che dobbiamo studiare

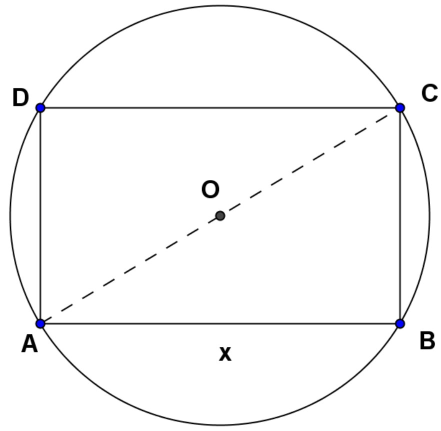
- Cercare i valori per cui si annulla e studiare il segno della derivata: individuare quindi i massimi e minimi relativi ed eventualmente "confrontarli" (confrontare le ordinate corrispondenti) per determinare il massimo o il minimo assoluto.

Attenzione: se la derivata non si annulla ed è per esempio sempre positiva cioè la funzione è crescente, è chiaro che il minimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo e il massimo nell'estremo destro.

Attenzione: controllare se ci sono punti di non derivabilità: nel caso ci siano le loro ordinate vanno confrontate con quelle dei massimi (minimi) relativi trovati.

Esempio 1

Determina, tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r, quello di area massima.



Poniamo $x = \overline{AB}$.

Quindi avremo: $0 \le x \le 2r$

Poiché $\overline{BC} = \sqrt{4r^2 - x^2}$ indicando con $A(x)$ l'area di $ABCD$ avremo:

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} \text{ con } 0 \le x \le 2r$$

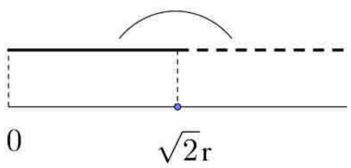
Poiché $A(x)$ è continua in $[0;2r]$ per il teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto.

Calcoliamo quindi la derivata:

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

$A'(x) = 0 \to x = \sqrt{2}r$ ($x = -\sqrt{2}r$ non è accettabile)

$A'(x) > 0 \to 0 < x < \sqrt{2}r$



Quindi $x = \sqrt{2}r$ fornisce il massimo assoluto (non abbiamo trovato altri punti di massimo relativo).

Osserviamo che se $\overline{AB} = \sqrt{2}r$ $ABCD$ è un quadrato.

Quindi tra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r , quello di area massima è il quadrato.

Nota

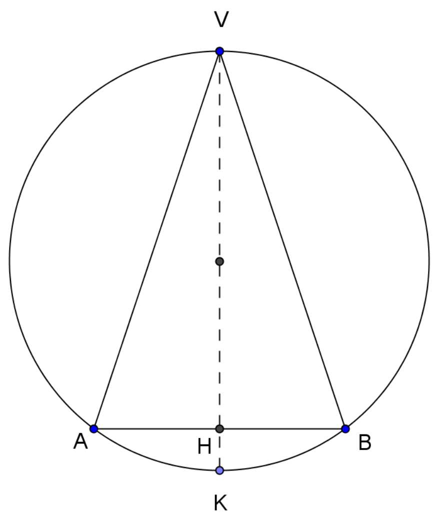
Per $x = 0$ o $x = 2r$ il rettangolo degenera in due diametri sovrapposti e sia ha area nulla (minimo assoluto).

Esempio 2

Determinare, tra i coni inscritti in una sfera di raggio r*, quello di massimo volume.*

Consideriamo una sezione. Avremo un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza.

Poniamo $\overline{VH} = x$: $0 \le x \le 2r$



Per il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo VAK: $\overline{AH}^2 = x(2r - x)$

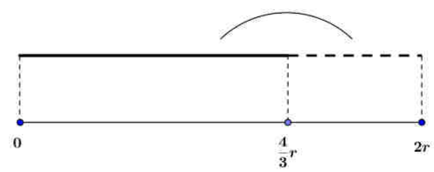
Quindi:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3}\pi x^2(2r - x) = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(4rx - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow x = 0, \qquad x = \frac{4}{3}r$$

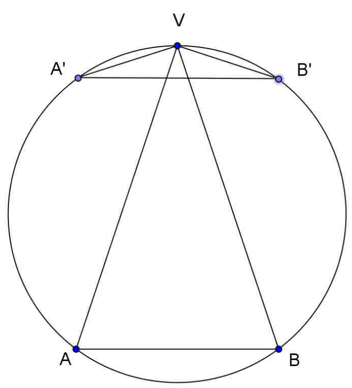
$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r$$



e quindi per $x = \frac{4}{3}r$ si ha il cono di volume massimo.

Osservazione

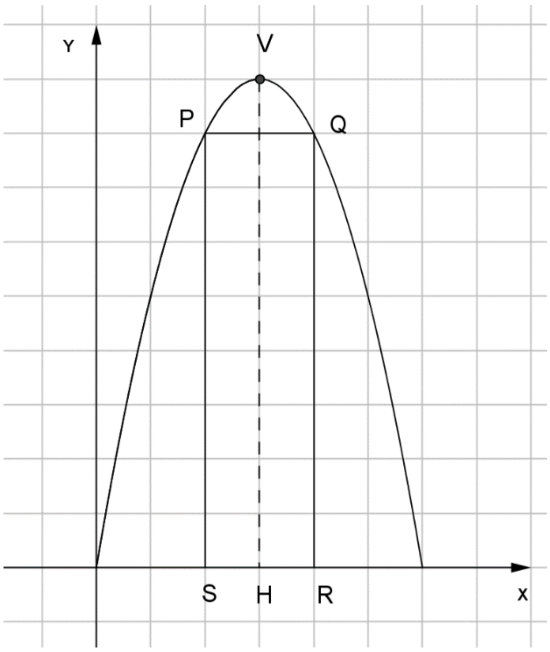
La scelta del segmento a cui associare x è importante. Scegliendo $\overline{VH} = x$ abbiamo individuato bene il cono (non ci sono coni inscritti diversi con la stessa altezza) mentre se avessimo scelto $\overline{AH}$ (o $\overline{AB}$) ad un dato valore dell'incognita corrispondevano generalmente due coni diversi.



In figura per esempio abbiamo lo stesso valore della base ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$) ma i triangoli sezione e quindi i coni sono diversi.

Esempio 3

Data la parabola di equazione $P: y = -x^2 + 6x$, considera i rettangoli inscritti nell'arco di parabola appartenente al primo quadrante e determina quello di area massima.



$V(3;9)$

Consideriamo $P(x; -x^2 + 6x)$

con $0 \leq x \leq 3$

$$\overline{PQ} = 2(3-x)\,;\ \overline{SH} = 3 - x\,;\quad \overline{PS} = -x^2 + 6x$$

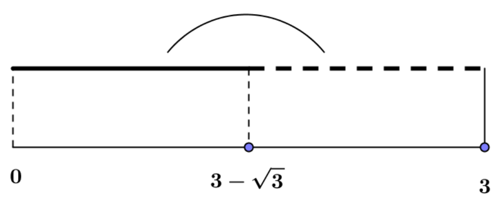
Quindi

$$A(x) = 2(3-x)(-x^2+6x) = 2(x^3 - 9x^2 + 18x)$$

$$A'(x) = 2(3x^2 - 18x + 18)$$

$$A'(x) = 0 \to x^2 - 6x + 6 = 0 \to x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Solo $x = 3 - \sqrt{3}$ è accettabile considerando la limitazione della x.



$$A'(x) > 0 \iff x < 3 - \sqrt{3} \cup x > 3 + \sqrt{3}$$

e quindi per $x = 3 - \sqrt{3}$ si ottiene il rettangolo di area massima.

È chiaro che per conoscere il valore dell'area massima basta sostituire $x = 3 - \sqrt{3}$ nella funzione $A(x)$ e si ottiene $A_{max} = 2[3-(3-\sqrt{3})]\left[-(3-\sqrt{3})^2 + 6(3-\sqrt{3})\right] = \cdots = 12\sqrt{3}$

PROBLEMI
GEOMETRIA PIANA

1. Tra tutti i rettangoli di area assegnata a^2 determina quello di perimetro minimo.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = a \rightarrow quadrato\right]$$

2. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determina quello di area massima.

$$\left[ponendo\ x = dimensione \rightarrow x = \frac{p}{2} \rightarrow quadrato\right]$$

3. Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata a determina quello di area massima.

$$\left[x = cateto \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow triangolo\ rettangolo\ isoscele\right]$$

4. Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.

$$\left[x = altezza\ relativa\ alla\ base \rightarrow x = \frac{3}{2}r \rightarrow triangolo\ equilatero\right]$$

5. Tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r determina quello di perimetro massimo.

$$\left[x = dimensione\ rettangolo \rightarrow x = r\sqrt{2} \rightarrow quadrato\right]$$

6. Tra i triangoli equilateri inscritti in un triangolo equilatero ABC di lato l, determina quello di area minima.

$$\left[trinagolo\ di\ lato\ \frac{l}{2}\right]$$

7. Tra tutti i triangoli iscritti in una semicirconferenza, trova quello di area massima.

[triangolo rettangolo isoscele]

8. Nell'insieme dei trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio r, determina quello di perimetro massimo.

[semiesagono regolare]

9. Un foglio di carta deve contenere un'area di stampa di $50cm^2$, margini superiore e inferiore di 4 cm e laterali di 2 cm. Determina le dimensioni del foglio di area minima con queste caratteristiche.

[9 cm , 18 cm]

10. Fra tutti i rettangoli di data area, che misura a^2, determina quello la cui diagonale è minima.

[quadrato di lato a]

11. Tra tutti rettangoli di data diagonale, che misura d,determina quello di area massima.

[quadrato di lato $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$]

12. Tra tutti i triangoli isosceli che hanno per base una corda di una circonferenza di raggio r e il vertice nel centro della circonferenza, determina quello di area massima.

[triangolo la cui altezza misura $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$]

13. Sia ABCD un trapezio isoscele di area s^2 con gli angoli adiacenti alla base maggiore di 45°, determina l'altezza del trapezio in modo che abbia perimetro minimo.

[altezza=$\dfrac{s}{\sqrt[4]{2}}$]

14. Nel triangolo qualsiasi ABC manda la parallela al lato AB che interseca i lati AC e BC rispettivamente nei punti G e F. Indicate con D e E le proiezioni ortogonali di G e F sulla retta del alto AB, determina il rettangolo DEFG di area massima.

[DG metà dell'altezza del triangolo]

PROBLEMI

GEOMETRIA SOLIDA

1. Tra i cilindri inscritti in una sfera di raggio r determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}r\right]$$

2. Tra i cilindri inscritti in un cono avente raggio di base r e altezza assegnata h, determina quello di volume massimo.

$$\left[x = raggio\ di\ base\ del\ cilindro \rightarrow x = \frac{2}{3}r\right]$$

3. Tra i coni inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

$$\left[x = altezza\ del\ cono \rightarrow x = \frac{4}{3}r\right]$$

4. Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio r, determina quello di minimo volume.

$$[x = distanza\ tra\ vertice\ cono - centro\ sfera \rightarrow x = 3r]$$

5. Tra i parallelepipedi rettangolari aventi per base un quadrato e un volume assegnato V, determina quello di superficie totale minima.

$$[cubo]$$

6. Tra i cilindri di superficie totale assegnata S determina quello di volume massimo.

$$[cilindro\ equilatero]$$

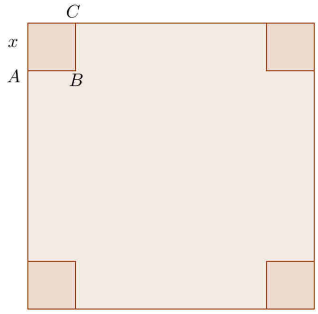
7. Una tipica lattina cilindrica ha volume fissato pari a 33 *cl*. Quali sono le dimensioni della lattina (altezza e diametro) che minimizzano il costo del metallo necessario a produrla, ossia la superficie totale della lattina?

[cilindro equilatero di diametro $2r = h = 2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ cm]

8. Si vuole costruire un salone insonorizzato a forma di parallelepipedo rettangolo con i lati del pavimento uno doppio dell'altro e volume di 300 m^3. Per insonorizzare il locale vanno applicati sulle pareti e sul soffitto pannelli del costo di € 50 al metro quadrato. Sul pavimento sarà posato un laminato che costa € 40 al metro quadrato. Quali sono le misure del pavimento che rendono minima la spesa complessiva?

[5 m ; 10 m]

9. Una scatola senza coperchio è ottenuta tagliando quattro quadrati uguali dagli angoli di un foglio di cartone quadrato, di lato 60 cm e ripiegando il cartone rimasto (incollando per esempio AB con BC). Quando vale x per avere la scatola di volume massimo?



[$x = 10cm$]

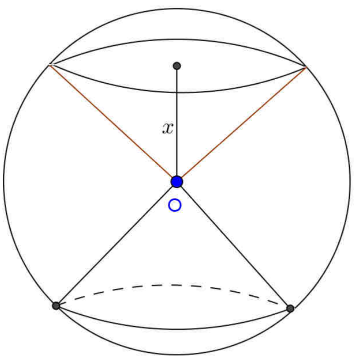
10. Tra tutti i cilindri inscritti in una sfera di raggio r, determina quello di superficie laterale massima.

[cilindro equilatero di altezza $r\sqrt{2}$]

11. Tra i parallelepipedi rettangoli a base quadrata e diagonale di misura d, determina quello di volume massimo.

[cubo di lato $\frac{d}{\sqrt{3}}$]

12.



Determina x in modo che la "clessidra" inscritta nella sfera di raggio r abbia volume massimo.

[$x = \frac{r}{\sqrt{3}}$]

PROBLEMI
GEOMETRIA ANALITICA

1. Considerata la parabola di equazione $P: y = -x^2 + 9x - 8$ determina, tra i rettangoli inscritti nella parte di piano delimitata dalla parabola e dall'asse x, quello di perimetro massimo. Determina il perimetro massimo.

$$\left[perimetro\ massimo = \frac{53}{2}\right]$$

2. Considera la parabola $y = 4x - x^2$ ed indica con V il suo vertice. Se $P \in \overset{\frown}{OV}$ della parabola , determina per quale punto P l'area del triangolo OVP è massima.

$$[P(1;3)]$$

3. Considera l'iperbole di equazione $\mathfrak{I}$: $y = \frac{x}{x-2}$ e determina la sua retta tangente t in $(0;0)$. Tra i punti P di $\mathfrak{I}$ appartenenti al primo quadrante determina quello per cui è minima la distanza da t.

$$[P(4;2)]$$

4. Considerata la parabola $\wp: x = y^2$, tra i punti P di $\wp$ appartenenti all'arco OA con $A(4;2)$, determina quello per cui, tracciata da P la parallela e la perpendicolare all'asse x, si individua con l'asse x e la perpendicolare per A all'asse x, un rettangolo di perimetro massimo.

$$\left[P\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\right]$$

5. Considera $\wp: y = 3x - x^2$ e determina un punto $P \epsilon\ arco\ VA$ di $\wp$, con V vertice di $\wp$ e $A(3;0)$, tale che l'area del quadrilatero $OVPA$ sia massima.

$$\left[P\left(\frac{9}{4};\frac{27}{16}\right)\right]$$

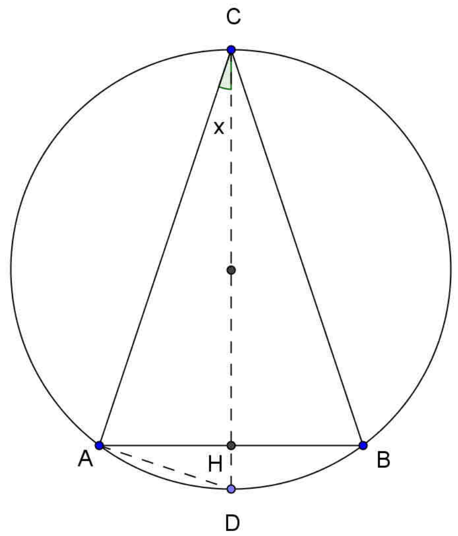
COMPLEMENTI

OSSERVAZIONE

A volte può convenire risolvere un problema di massimo e minimo utilizzando come incognita x *l'ampiezza (in radianti) di un angolo.*

Come esempio riprendiamo un problema già proposto tra i problemi di geometria piana.

Tra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, determina quello di area massima.



Prendiamo $A\hat{C}H = x$: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Considerando il triangolo rettangolo ACD avremo:

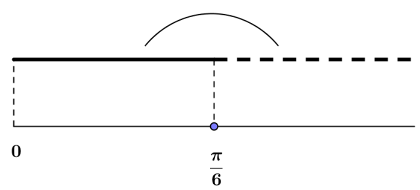
$\overline{AC} = 2r\cos x$ e quindi $\overline{AH} = \overline{AC}\,sen x = 2r\,sen x \cdot \cos x$ e $\overline{CH} = \overline{AC}\cos x = 2r\cos^2 x$

Quindi $A(x) = 2r\,sen x\cos x \cdot 2r\cos^2 x = 4r^2 sen x\cos^3 x$

$$A'(x) = 4r^2(\cos^4 x - 3sen^2 x\cos^2 x) = 4r^2\cos^2 x(\cos^2 x - 3sen^2 x)$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ tg^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow tg x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \rightarrow triangolo\ equilatero \end{cases}$$

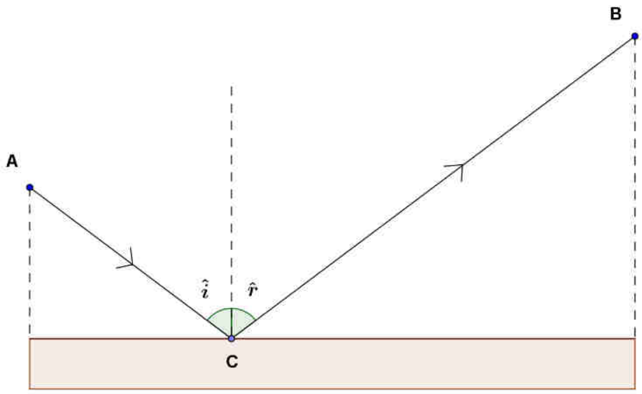
$A'(x) > 0$



Quindi per $x = \frac{\pi}{6}$ si ha un massimo (triangolo equilatero).

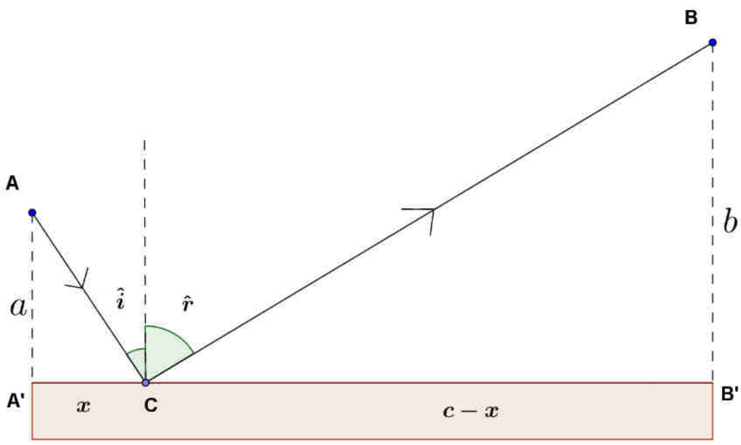
La legge della riflessione della luce

Dimostriamo che, quando la luce passa da A → B, riflessa dalla superficie piana in figura nel punto C, segue il ***percorso di "minimo tempo"****.*



Nota: per la legge della riflessione l'angolo di incidenza $\hat{\imath}$ è uguale all'angolo di riflessione $\hat{r}$.

Consideriamo un percorso generico $A \to C \to B$.



Indichiamo con a la distanza di A dallo "specchio", con b la distanza di B dallo specchio, con $c = \overline{A'B'}$, con $\hat{\imath}$ l'angolo di incidenza e con $\hat{r}$ quello di riflessione.

Se poniamo $\overline{A'C} = x$ avremo $\overline{CB'} = c - x$.

Consideriamo il tempo $t(x)$ impiegato dalla luce (che si muove con velocità v) per compiere il percorso in figura:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v} \qquad t'(x) = \frac{1}{v}\left[\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right]$$

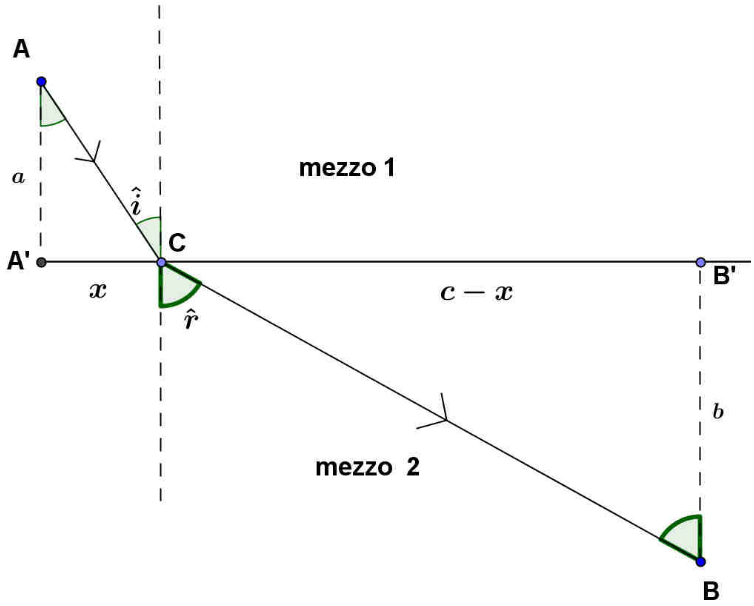
$$t'(x) = 0 \to \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

cioè $\dfrac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{CB}} \Rightarrow sen\hat{\imath} = sen\hat{r} \to \hat{\imath} = \hat{r}$ (legge della riflessione!)

(Non importa studiare $t'(x) > 0$ perché è intuitivo che abbiamo trovato un minimo).

La legge della rifrazione della luce

*Dimostriamo che quando la luce passa da un punto A situato in un mezzo ad un punto B situato in un altro mezzo (toccando in C la linea che separa i due mezzi) segue il percorso di "**minimo tempo**".*



Tracciamo un percorso $A \rightarrow B$ qualsiasi: come prima poniamo a = distanza di A dalla linea che separa i due mezzi ecc. e poniamo $\overline{A'B'} = c$.

Vogliamo calcolare la funzione che esprime il tempo impiegato dalla luce per andare $A \rightarrow B$.
Se poniamo $\overline{A'C} = x$ avremo (le velocità della luce nei due mezzi sono diverse v_1e v_2):

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{(c-x)}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$\frac{\overline{A'C}}{v_1\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C}}{v_2\overline{CB}}$$

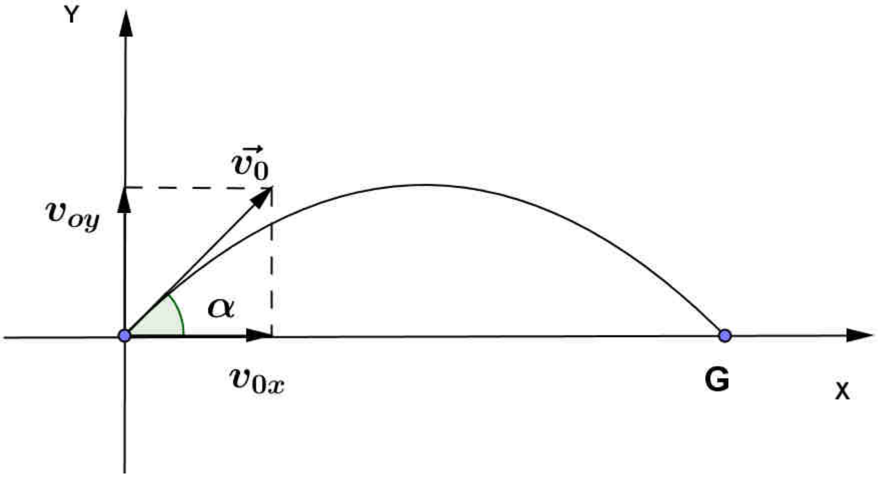
$$\frac{sen\hat{i}}{v_1} = \frac{sen\hat{r}}{v_2}$$

$$\frac{sen\,\hat{i}}{sen\,\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$$ (ma questa è la legge della rifrazione!)

Poiché la situazione rappresenta chiaramente un minimo abbiamo dimostrato che la luce percorre il cammino di "minimo" tempo.

La gittata massima

Lanciando un corpo con velocità $\vec{v_0}$ *inclinata di* α *rispetto all'orizzontale qual è, a parità di* v_0 *(intensità della velocità iniziale), l'angolo* α *per cui si ottiene la massima gittata?*



Ricordiamo che per studiare il moto dobbiamo scomporlo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x} in direzione orizzontale e in un moto uniformemente decelerato (con decelerazione $g = 9{,}81\ m/s^2$) di velocità iniziale v_{0y} in direzione verticale.

$$\begin{cases} x = v_{0x}\,t \\ y = v_{0y}\,t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo t (lo ricaviamo dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda) e ponendo $y = 0$ trovo:

$$x_G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Quindi, poiché $v_{0x} = v_0 cos\alpha$ e $v_{0y} = v_0 sen\alpha$ il problema si riconduce a determinare il massimo di:

$$f(\alpha) = \frac{2{v_0}^2 sen\alpha cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} sen2\alpha$$

Abbiamo quindi che $f(\alpha)$ è massima quando $sen2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ e quindi l'angolo per cui si ha la massima gittata risulta $\alpha = \frac{\pi}{4}$.