

Studio del grafico di una funzione

I) Studia il grafico delle seguenti funzioni razionali fratte:

$$1) \quad y = \frac{2x^2}{x-2}$$

Soluzione:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

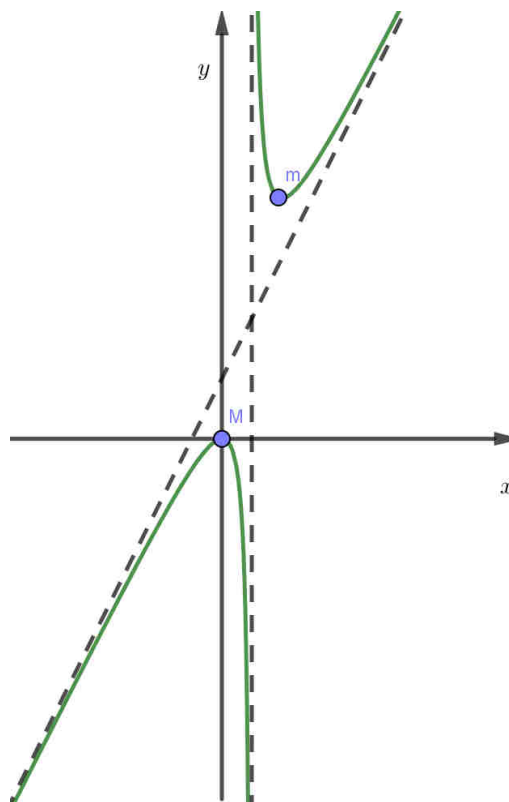
Asintoto verticale: $x = 2$

Asintoto obliquo: $y = 2x + 4$

$$y' = \frac{2x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$M(0;0)$

$m(4;16)$



$$2) \quad y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Soluzione:

$$y' = -\frac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Flesso a tangente obliqua: $F(0;0)$

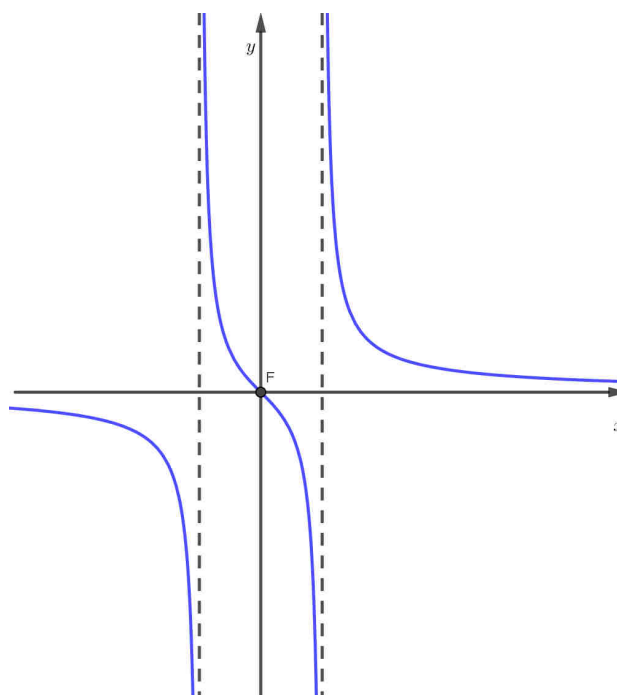


Grafico di una funzione

$$3) \quad y = \frac{x^3}{1-x^2} \quad [as.v. \ x = \pm 1; \ as.obl. \ y = -x; \ m\left(-\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$M\left(\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \ F(0;0) \ a \ tg. \ orizz.]$$

$$4) \quad y = \frac{3x-x^2}{x-4} \quad [as.v. \ x=4; \ as.obl. \ y=-x-1; \ m(2;-1) \ M(6;-9)]$$

$$5) \quad y = \frac{2x-1}{2x^3} \quad [as.v. \ x=0; \ as.or. \ y=0; \ M\left(\frac{3}{4}; \frac{16}{27}\right) \quad F\left(1; \frac{1}{2}\right) \ a \ tg. \ obliqua]$$

$$6) \quad y = \frac{x^2}{x+1} \quad [as.v. \ x=-1; \ as.obl. \ y=x-1; \ m(0;0); \ M(-2;-4)]$$

$$7) \quad y = \frac{x^2-4}{x+1} \quad [as.v. \ x=-1; \ as.obl. \ y=x-1]$$

$$8) \quad y = x + \frac{4}{x^2} \quad [as.v. \ x=0; \ as.obl. \ y=x; \ m(2;3)]$$

$$9) \quad y = \frac{2x^3-3x^2+1}{2x^2} \quad [as.v. \ x=0; \ as.obl. \ y=x-\frac{3}{2}; \ m(1;0)]$$

$$10) \quad y = \frac{6x^2+2x+3}{2(2x^2+1)} \quad [as.or. \ y=\frac{3}{2}; \ m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right); \ M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right);$$

$$F_1\left(0; \frac{3}{2}\right); \ F_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{12+\sqrt{6}}{8}\right); \ F_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{12-\sqrt{6}}{8}\right); \ flessi \ a \ tg. \ obliqua]$$

$$11) \quad y = \frac{x^2-4x+3}{x} \quad [as.v. \ x=0; \ as.obl. \ y=x-4; \ M(-\sqrt{3}; -(2\sqrt{3}+4)); \ m(\sqrt{3}; 2\sqrt{3}-4)]$$

$$12) \quad y = \frac{x^2-5x+4}{x-5} \quad [as.v. \ x=5; \ as.obl. \ y=x; \ M(3;1); \ m(7;9)]$$

$$13) \quad y = \frac{x^2-4x}{1-x} \quad [as.v. \ x=1; \ as.obl. \ y=-x+3]$$

$$14) \quad y = \frac{x^2-1}{2x^2} \quad [as.v. \ x=0 \ as.or. \ y=\frac{1}{2}]$$

II) Funzioni irrazionali

Esempio

Consideriamo la funzione irrazionale: $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$

- $D_f : x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee \geq 1$

Intersezioni con gli assi:

$$\text{Per } y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2 - 1} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x^2 - 1 \quad \nexists \text{ sol.} \end{cases}$$

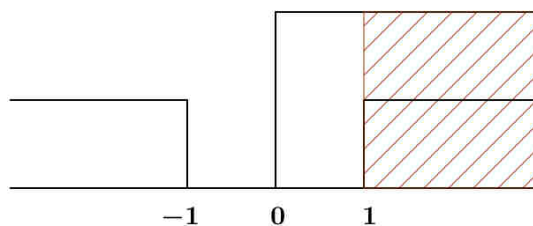
Quindi non ci sono intersezioni con gli assi.

Segno della funzione:

$$y > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$$

$$x > \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x^2 > x^2 - 1 \quad \forall x \end{cases}$$



$$x \geq 1$$

- Studio dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ricerca asintoto obliquo:

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)}{x} = 2$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - \sqrt{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{(x^2 - x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

Grafico di una funzione

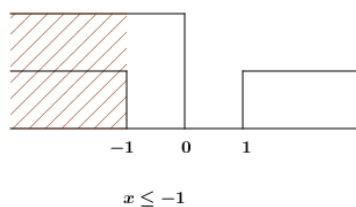
$\Rightarrow y = 2x$ asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

- Studio della derivata

$$y' = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 = x^2 \quad \nexists \text{ sol.} \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > x \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > x^2 \end{cases} \quad \nexists \text{ sol.}$$



Quindi la funzione è crescente per $x \leq -1$ (e decresce per $x \geq 1$).

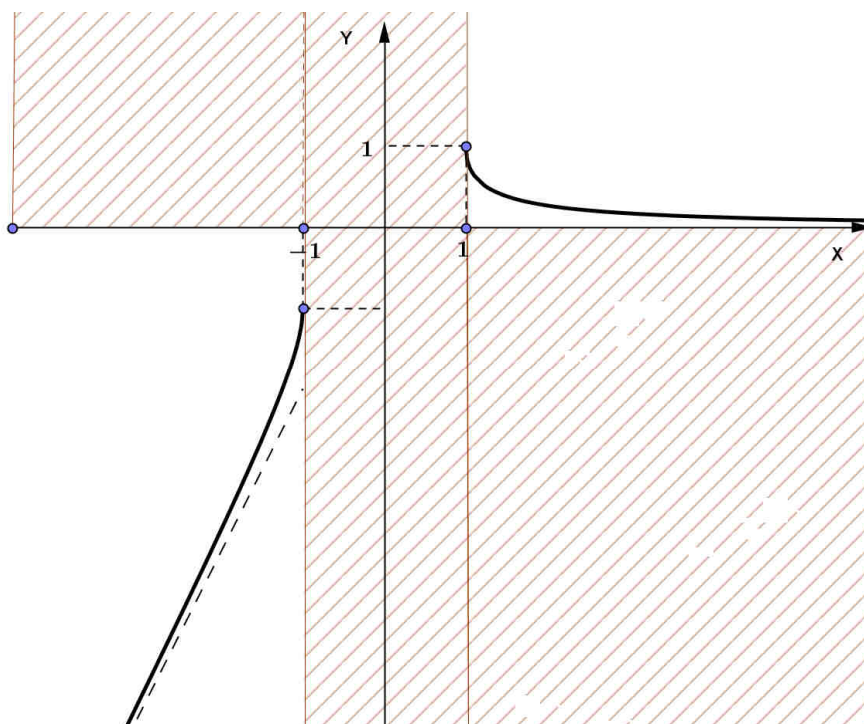
Osserviamo che $x = \pm 1$ sono punti a tangente verticale con:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\infty$$

NOTA: per tracciare il grafico occorre calcolare $y(-1) = -1$ e $y(1) = 1$ ma non è necessario lo studio di y'' .

Il grafico è il seguente:



Studia il grafico delle seguenti funzioni irrazionali:

1) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$ [*as.obl.* $y = x - \frac{3}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$; *as.obl.* $y = -x + \frac{3}{2}$ per $x \rightarrow -\infty$;
 $x=0$ $x=3$ *p.ti tg vert.*]

2) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 1}{x}$ [*as.or.* $y=1$ per $x \rightarrow +\infty$; *as.or.* $y=-1$ per $x \rightarrow -\infty$;
 $x = \pm 3$ *p.ti tg vert.*]

3) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ [*as.v.* $x = \pm 2$; $m\left(0; \frac{1}{2}\right)$]

4) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ [*as.v.* $x = -1$; *as.or.* $y=1$; $x=1$ *p.to tg ver*]

5) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ [*as.v.* $x = -1$; $x=1$ *p.to tg vert.*; $F\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ *flesso tg obl*]

6) $y = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ [*as.or.* $y = -1$ per $x \rightarrow +\infty$;
as.obl. $y = 2x - 3$ per $x \rightarrow -\infty$; $x = -1$ $x = 3$ *p.ti tg vert.*]

7) $y = x - 3 - \sqrt{x^2 - 1}$ [*as.or.* $y = -3$ per $x \rightarrow +\infty$;
as.obl. $y = 2x - 3$ per $x \rightarrow -\infty$; $x = \pm 1$ *p.ti tg vert.*]

8) $y = \frac{x}{2 - \sqrt{x^2 - 5}}$ [*as.v.* $x = \pm 3$; *as.or.* $y = -1$ per $x \rightarrow +\infty$;
as.or. $y = 1$ per $x \rightarrow -\infty$; $x = \pm \sqrt{5}$ *p.ti tg vert.*]

9) $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$ [$m\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$; $F_1(-1;0)$ $F_2(0;0)$ *flessi tg vert.*]

10) $y = \sqrt[3]{x^2(3+x)}$ [*as.obl.* $y = x + 1$; $M(-2; \sqrt[3]{4})$
 $(0;0)$ *cuspidi*; $F(-3;0)$ *flesso tg vert.*]

III) Funzioni goniometriche

Esempio

Consideriamo la funzione goniometrica $y = \frac{3 \cos x}{2 \cos x - 1}$

Dominio:

$$\cos x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$D_f = \mathfrak{R} - \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

Periodo: poiché nella nostra funzione compare $\cos x$ il periodo sarà quello del coseno, cioè 2π : quindi $T = 2\pi$

Quindi possiamo limitare il nostro studio all'intervallo $I = [0, 2\pi]$.

Note

Se nella funzioni compaiono funzioni goniometriche di *periodo diverso* occorre determinare il “**minimo**” **multiplo comune**. Se per esempio abbiamo $\sin 2x$ e $\sin x$ il periodo sarà 2π poiché $\sin 2x$ ha periodo $\pi = \left(\frac{2\pi}{2}\right)$ e $\sin x$ periodo 2π . Se abbiamo insieme $\sin 2x$ e $\cos 3x$ il periodo sarà 2π cioè il primo multiplo comune tra i periodi delle due funzioni π e $\frac{2}{3}\pi$.

Inoltre considerare un dato intervallo di studio non vuol dire che la funzione sia definita in tutto l'intervallo. Nel nostro caso studiamo la funzione in $I = [0, 2\pi]$ ricordando però che

$$x \neq \frac{\pi}{3} \quad x \neq \frac{5}{3}\pi \quad (\text{infatti } x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi).$$

Intersezioni con gli assi e segno della funzione:

$$\begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ y = 3 & \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \quad \left(\frac{3}{2}\pi; 0\right) \end{cases}$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{3 \cos x}{2 \cos x - 1} > 0 \Rightarrow \cos x < 0 \vee \cos x > \frac{1}{2}$$

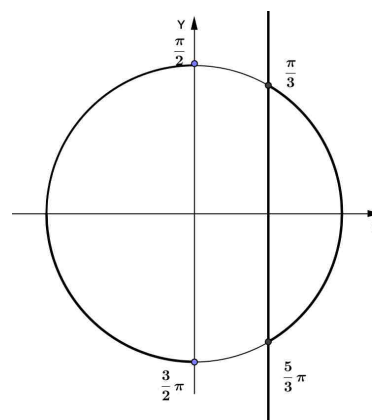


Grafico di una funzione

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}\pi} f(x) = \infty$$

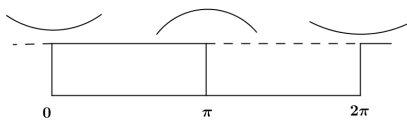
$$x = \frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{5}{3}\pi \quad \text{asintoti verticali}$$

Ricordiamo che non ha senso studiare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ per una funzione periodica.

$$y' = \frac{-3\text{sen}x(2\cos x - 1) - 3\cos x(-2\text{sen}x)}{(2\cos x - 1)^2} = \frac{3\text{sen}x}{(2\cos x - 1)^2}$$

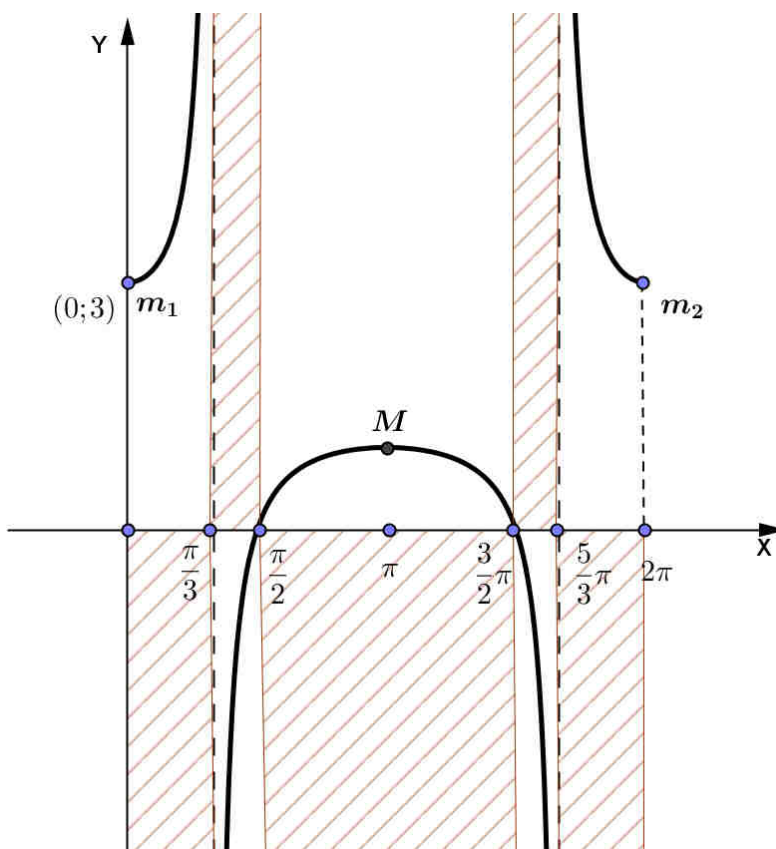
$$y' = 0 \Rightarrow \text{sen}x = 0 \quad x = k\pi \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \pi \quad x_3 = 2\pi$$

$$y' > 0 \Rightarrow \text{sen}x > 0$$



$$m_1(0;3) \quad m_2(2\pi;3) \quad M(\pi;1)$$

Il grafico è quindi il seguente:



Studia il grafico delle seguenti funzioni goniometriche:

$$1) \quad y = \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x \quad [T = 2\pi \quad I = [0; 2\pi]; \quad M\left(\frac{5}{6}\pi; 2\right); \quad m\left(\frac{11}{6}\pi; -2\right); \\ F_1\left(\frac{\pi}{3}; 0\right) \quad F_2\left(\frac{4}{3}\pi; 0\right) \quad \text{flessi tg obl.}]$$

$$2) \quad y = \frac{\cos x}{1 - \cos x} \quad [T = 2\pi \quad I = [0; 2\pi] \\ \text{as.v. } x = 0; x = 2\pi; \quad m\left(\pi; -\frac{1}{2}\right)]$$

$$3) \quad y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x} \quad [T = \pi \quad I = [0; \pi] \\ \text{as.v. } x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{7}{6}\pi; \quad F_1\left(\frac{2}{3}\pi; \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right); \quad F_2\left(\frac{5}{3}\pi; \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) \quad \text{flessi tg obl.}]$$

$$4) \quad y = 4\operatorname{sen}^2 x - 3 \quad [T = \pi \quad I = [0; \pi] \\ m(0; -3); \quad m_2(\pi; -3); \quad ; \quad M_1\left(\frac{\pi}{2}; 1\right); \\ F_1\left(\frac{\pi}{4}; -1\right); \quad F_2\left(\frac{3}{4}\pi; -1\right); \quad \text{flessi tg obl.}]$$

$$5) \quad y = \operatorname{sen}^2 x + \cos x \quad [T = 2\pi \quad I = [0; 2\pi]; \\ m_1(0; 1); \quad m_2(\pi; -1); \quad m_3(2\pi; 1); \quad M_1\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5}{4}\right); \quad M_2\left(\frac{5}{3}\pi; \frac{5}{4}\right) \quad] \\ F_1(\beta_1; \dots); \quad F_2(\beta_2; \dots); \quad F_3(2\pi - \beta_1; \dots); \quad F_4(2\pi - \beta_2; \dots) \quad \text{flessi tg obl.} \\ \left(\text{dove } \cos \beta_1 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \quad \cos \beta_2 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \right)$$

$$6) \quad y = \operatorname{sen}^3 x. \quad [T = 2\pi \quad I = [0; 2\pi] \\ m\left(\frac{3}{2}\pi; -1\right); \quad M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right); \quad F_1(0; 0); \quad F_2(\pi; 0); \quad F_3(2\pi; 0) \quad \text{flessi tg or.}; \\ F_4(\alpha; \dots); \quad F_5(\pi - \alpha; \dots); \quad F_6(\pi + \alpha; \dots); \quad F_7(2\pi - \alpha; \dots) \quad \text{flessi tg. obl.} \\ \left(\text{dove } \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

IV) Funzioni esponenziali

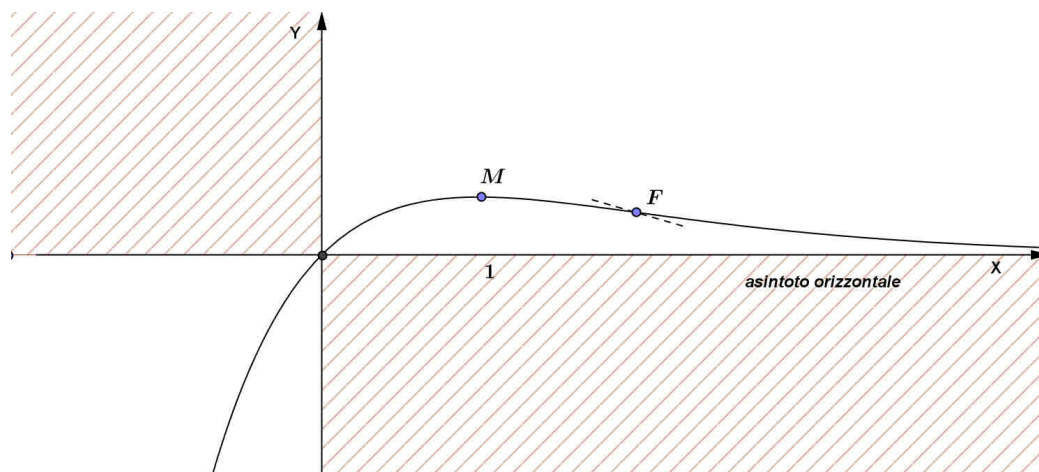
Esempio

Consideriamo la seguente funzione esponenziale: $y = xe^{-x}$

$$D_f : \mathfrak{R}$$

$$y > 0 \quad x > 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

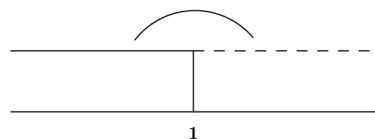
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \right) \exists \text{ asintoto obliquo}$$

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$y' = 0 \quad x = 1$$

$$y' > 0 \quad x < 1$$

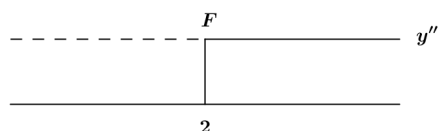


$$M(1; e^{-1}) \approx (1; 0,37)$$

$$y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

$$y'' = 0 \quad x = 2$$

$$y'' > 0 \quad x > 2$$



$$F(2; 2e^{-2}) \approx (2; 0,27)$$

V) Funzioni logaritmiche

Esempio

Consideriamo la seguente funzione logaritmica $y = \frac{x^2}{\ln x}$

$$D_f : x > 0 \quad \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$y > 0 \quad \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$y = 0 \rightarrow x = 0 \notin D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left(\frac{1}{0^-} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ as. verticale}$$

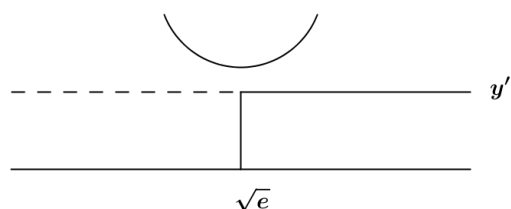
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \exists \text{ as. obliquo} \right)$$

$$y' = \left(2x \ln x - x^2 \frac{1}{x} \right) \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{x}{\ln^2 x} (2 \ln x - 1)$$

$$y' = 0 \quad \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

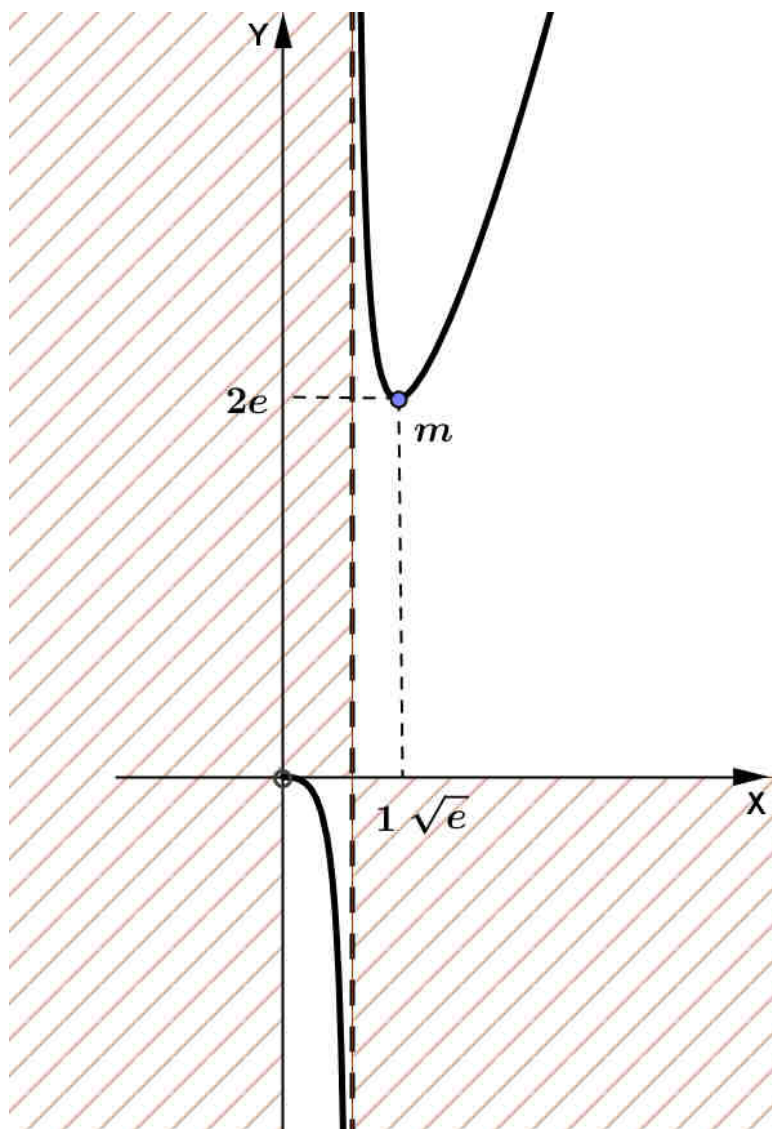
$$y' > 0 \quad \ln x > \frac{1}{2} \rightarrow x > e^{\frac{1}{2}}$$



$$m(\sqrt{e}; 2e) \approx (1,64; 5,4)$$

Il grafico quindi risulta:

Grafico di una funzione



Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{2 \ln x - 1}{\ln^2 x} \right) \xrightarrow{\rightarrow 0} = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x - 1}{\ln^2 x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \right)$$

e quindi la tangente in (0;0) è orizzontale.

Controlliamo anche la concavità del grafico:

$$y'' = D \left(\frac{2x}{\ln x} - \frac{x}{\ln^2 x} \right) = \dots = \frac{2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2}{\ln^3 x}$$

$y'' = 0$ nessuna soluzione (non ci sono flessi)

$y'' > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$ (concavità verso l'alto)

Studia il grafico delle seguenti funzioni logaritmiche ed esponenziali:

1) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ [*as.v.* $x=0$; *as.obl.* $y=x-1$; $M(-1;-e)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = 0$]

2) $y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$ [*as.v.* $x=0$; *as.or.* $y=0$ per $x \rightarrow -\infty$
as.or. $y=2$ per $x \rightarrow +\infty$]

3) $y = x^2 \cdot e^{-x}$ [*as.or.* $y=0$ per $x \rightarrow +\infty$; $m(0;0)$
 $M(2;4e^{-2})$; $F_1(2-\sqrt{2};\dots)$; $F_2(2+\sqrt{2};\dots)$ *flessi tg obl.*]

4) $y = x - \ln x$ [*as.v.* $x=0$; $m(1;1)$]

5) $y = \ln \sqrt{x^2 - 4}$ [*as.v.* $x = \pm 2$]

6) $y = x \cdot \ln x$ [$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$ $m(e^{-1}; -e^{-1})$]

7) $y = \frac{1 - 2 \ln x}{x^2}$ [*as.v.* $x=0$; *as.or.* $y=0$; $m\left(e; -\frac{1}{e^2}\right)$
 $F\left(e^{\frac{4}{3}}; f\left(e^{\frac{4}{3}}\right)\right)$ *flesso tg obl.*]

8) $y = \ln x \cdot (\ln x + 1)$ [*as.v.* $x=0$; $m\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{1}{4}\right)$; $F\left(\sqrt{e}; \frac{3}{4}\right)$ *flesso tg obl.*]