Teoremi sulle funzioni derivabili

Iniziamo con la definizione di punto di massimo o minimo relativo di una funzione.

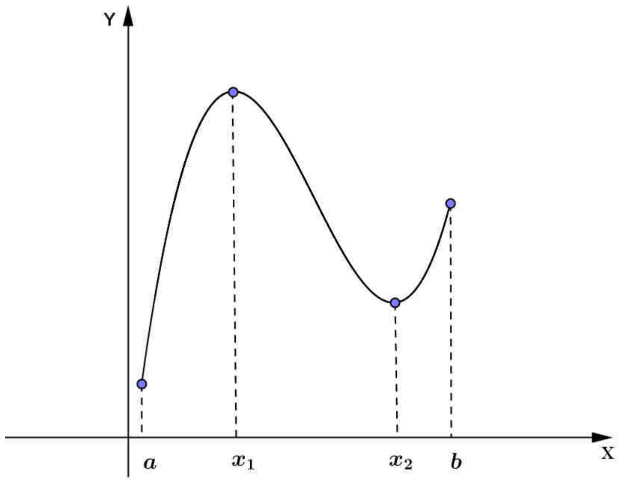
Definizione: $x_0 \in D_f$ è un punto di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Definizione: $x_0 \in D_f$ è un punto di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} tale che :

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

NOTA : Un punto di massimo (minimo) assoluto è anche un punto di massimo (minimo) relativo ma il viceversa non è vero.



a e x_2 sono punti di minimo relativo ; a è punto di minimo assoluto.

x_1 e b sono punti di massimo relativo e x_1 è punto di massimo assoluto.

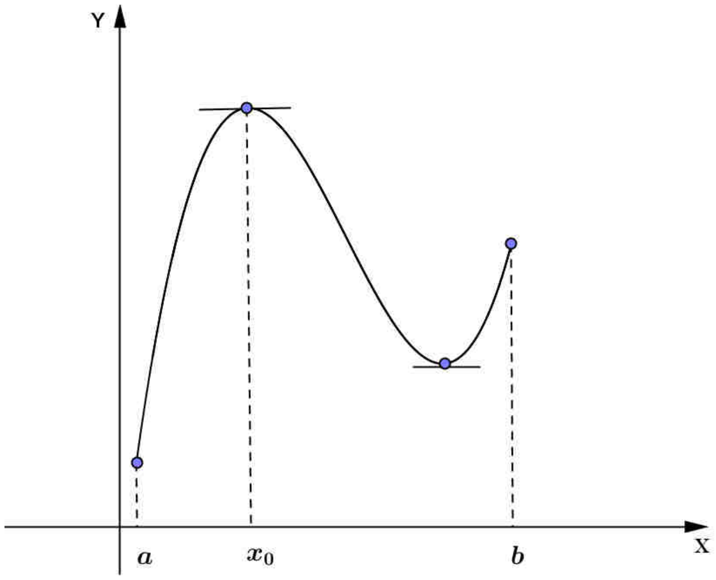
Per studiare il grafico di una funzione è fondamentale la ricerca di punti di massimo (minimo) relativi.

Per capire come possano essere individuati vediamo alcuni teoremi riguardanti le funzioni derivabili.

Partiremo da un teorema riguardante i massimi (minimi) relativi **interni** al dominio (per es. x_1 e x_2 nel grafico dell'esempio precedente) in cui la funzione è derivabile e poi dimostreremo tre teoremi (Rolle, Cauchy, Lagrange) che ci permetteranno di dimostrare il legame tra l'"andamento" di una funzione (funzione crescente, decrescente) e il **segno della sua derivata**.

Teorema sui punti di massimo (minimo) relativo interni al dominio

Sia $f:[a,b]\to\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
Se x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo interno al dominio $\Rightarrow f'(x_0)=0$ (cioè la tangente al grafico è parallela all'asse x)



Dimostrazione

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo interno al dominio (vedi figura).
Allora $\exists \quad I_{x_o} : f(x_0)\geq f(x) \quad \forall x\in I_{x_0}$ e quindi $f(x)-f(x_0)\leq 0 \quad \forall x\in I_{x_0}$

Calcoliamo $f'(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \text{ perché } f(x)-f(x_0)\leq 0 \text{ e } x-x_0>0$$

mentre $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ perché $f(x)-f(x_0)\leq 0$ e $x-x_0<0$

Ma se $f(x)$ è derivabile in x_0 i due limiti devono coincidere e quindi l'unica possibilità è che siano entrambi uguali a 0 $\Rightarrow f'(x_0)=0$.

Osservazione: è importante che se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo ma non è interno al dominio (per es. a e b nella figura) non è detto che in x_0 la derivata sia nulla (vedi figura).

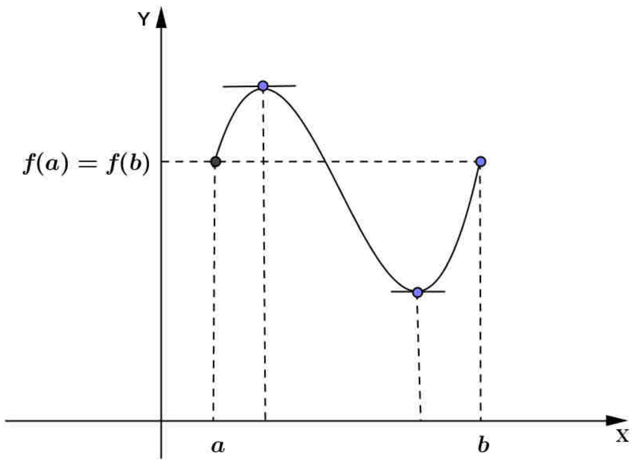
NOTA : il viceversa del teorema non è vero perché se in x_0 si ha $f'(x_0)=0$ significa che la tangente al grafico è orizzontale e x_0 potrebbe anche essere un punto di flesso a tangente orizzontale.

Teorema di Rolle (*matematico francese*)

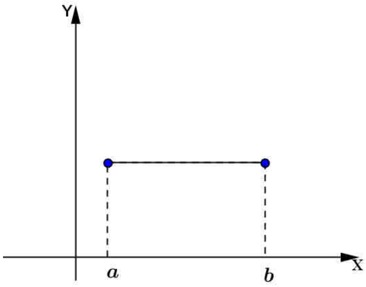
Sia $f:[a,b]\to\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e se

$$f(a)=f(b)\Rightarrow \exists x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$$

cioè esiste **almeno** un punto $x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$.

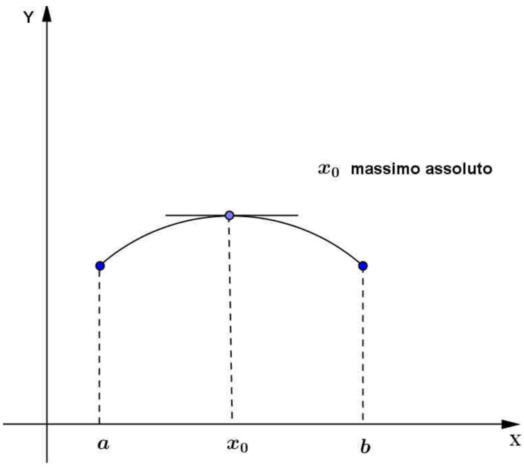


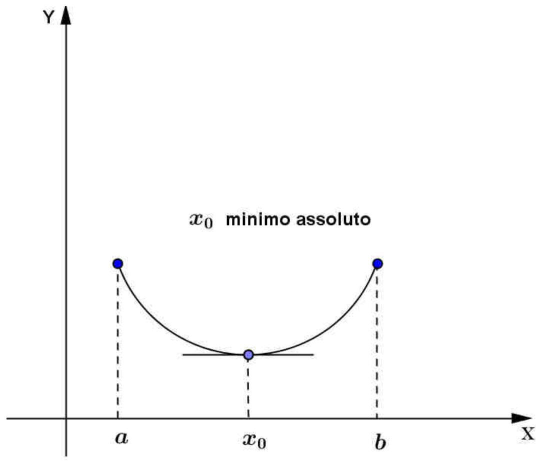
Dimostrazione



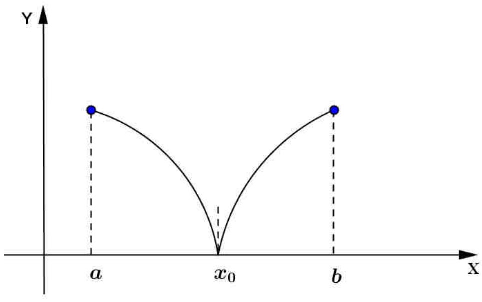
Se $f(x)$ è costante allora $\forall x\in(a,b)\quad f'(x)=0$.

Se $f(x)$ non è costante, per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo assoluti. Poiché però $f(a)=f(b)$ il massimo e il minimo assoluti non possono essere assunti entrambi negli estremi dell'intervallo e quindi **almeno uno deve essere interno** al dominio $\Rightarrow$(per il teorema precedente) $\exists x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$





NOTA : se la funzione non fosse derivabile in (a,b) il teorema non sarebbe vero.
Consideriamo per esempio il caso in figura: $f(a)=f(b)$ ma non c'è nessun punto x_0 con tangente al grafico parallela all'asse x (cioè con derivata nulla)



In x_0 $f(x)$ non è derivabile.

Esempi

1) Considera $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

- Verifica le ipotesi del teorema di Rolle in $I=[-2,2]$?

$f(x)$ ha come dominio $4-x^2\geq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow$ $f(x)$ è continua in $[-2,2]$.

Calcoliamo $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Quindi f(x) non è derivabile in $x=\pm 2$ (punti a tangente verticale) ma nelle ipotesi del teorema non si richiede la derivabilità negli estremi dell'intervallo.

Verifichiamo infine se $f(a)=f(b)$ cioè $f(-2)=f(2)$

$f(-2)=0$ $\quad$ $f(2)=0$ e quindi anche questa ipotesi è verificata.

Quindi $f(x)$ verifica tutte le ipotesi del teorema di Rolle in $[-2,2]$

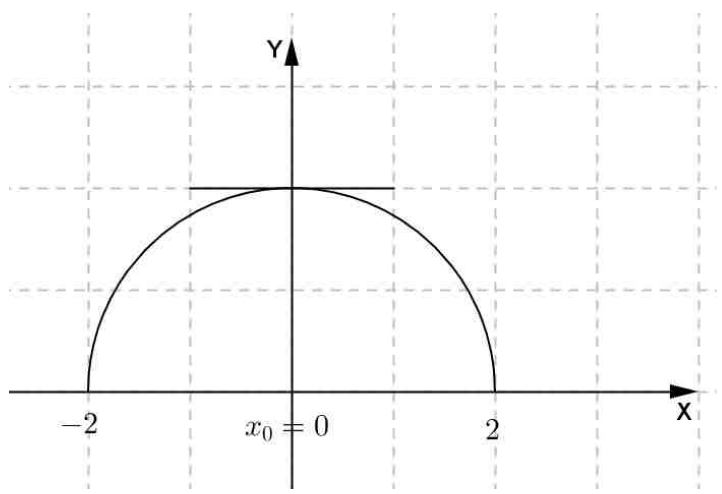
- Qual è (o quali sono) il punto $x_0 : f'(x_0)=0$?

Basta porre $f'(x)=0$ e risolvere l'equazione.

Abbiamo $$\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow x=0$$

Quindi $x_0=0$

Del resto disegnando il grafico di $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (elevando al quadrato $\Rightarrow x^2+y^2=4 \Rightarrow$ semicirconferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2) si osserva che in $x_0=0$ si ha la tangente orizzontale.



2) Considera $f(x) = \left|2x - x^2\right|$ nell'intervallo $I = [1-\sqrt{2}, 1]$.

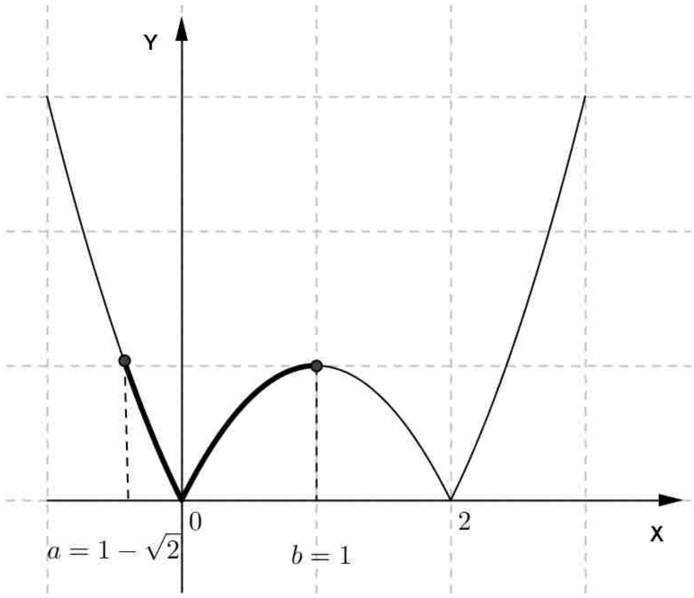
La funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle?

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \textit{quando} \quad 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -(2x - x^2) & \textit{quando} \quad 2x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \cup x \geq 2 \end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & 0 < x < 2 \\ -(2 - 2x) & x < 0 \cup x > 2 \end{cases}$$

Disegnando il grafico abbiamo:



Consideriamo l'intervallo assegnato $I = [1-\sqrt{2}, 1]$: in questo intervallo la funzione è continua e $f(a) = f(b)$ (si verifica facilmente) ma in $x = 0$ (interno a I) non è derivabile perché

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2 \text{ mentre } \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

Quindi le ipotesi del teorema di Rolle non sono verificate ed infatti osservando il grafico nessun punto interno a I ha derivata nulla.

3) Per quali valori di a e b la funzione

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & -1\le x\le 0 \\ \frac{1}{2}x^2+b & 0<x\le\sqrt{2} \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $I=\left[-1;\sqrt{2}\right]$? Qual è il valore x_0 per cui $f'(x_0)=0$? Disegna il grafico di f(x).

Svolgimento
Perché la funzione sia continua anche in x = 0 occorre che il limite sinistro e destro di f(x) in x=0 siano uguali:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} ax^2+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x^2+b=b$$

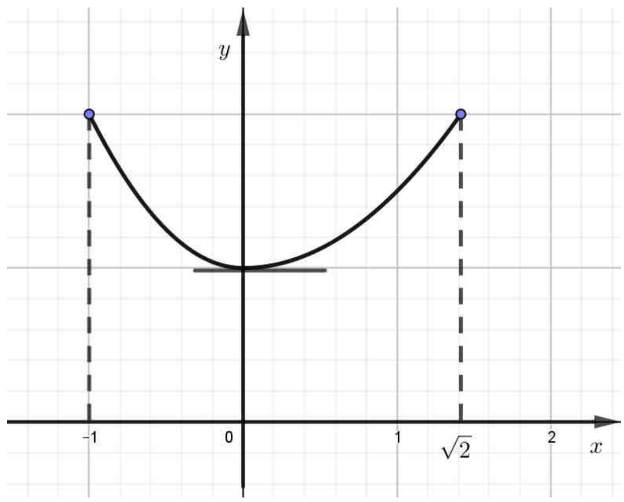
Quindi si dovrà avere $b=1$.
La derivabilità è verificata anche per $x = 0$ poiché essendo

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax & -1\le x<0 \\ x & 0<x\le\sqrt{2} \end{cases}$$

abbiamo che $\lim_{x\to 0^-} y'=\lim_{x\to 0^+} y'=0$.
Quindi, perché siano verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, basta che $f(-1)=f\left(\sqrt{2}\right)$.
Abbiamo:

$$f(-1)=a+1$$
$$f\left(\sqrt{2}\right)=2$$

e quindi dovrà essere $a+1=2\Rightarrow a=1$.
In conclusione abbiamo $a=1$, $b=1$ e il grafico risulta quello in figura.
Il punto x_0 in cui si annulla la derivata è $x_0=0$.



ESERCIZI
TEOREMA DI ROLLE

1) Considera la funzione $f(x)=|2-x|$
Si può applicare il teorema di Rolle in $I=[0,4]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché …]

2) Considera $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I=[-1,1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0=0$]

3) Considera $f(x)=\left|\frac{1-x}{x}\right|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I=\left[\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché …]

4) Considera $f(x)=|arctgx|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I=[-1,1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[no, perché …]

5) Considera $f(x)=e^{-x^2}$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I=[-1,1]$?

[si; $x_0=0$]

6) Considera $f(x)=|x^3|$. Si può applicare il teorema di Rolle in $I=[-1,1]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0=0$]

Teorema di Cauchy (*matematico francese*)

Siano $f:[a,b]\to\Re$ e $g:[a,b]\to\Re$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b) e inoltre sia $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

$$\Rightarrow \exists \quad x_0\in(a,b): \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dimostrazione

Osserviamo innanzitutto che $g(a)\neq g(b)$ perché se fosse $g(a)=g(b)$ per il teorema di Rolle

$\exists \quad x_0\in(a,b): g'(x_0)=0$ e questo è contrario all'ipotesi che $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

Consideriamo la funzione $F(x)$ così definita:

$$F(x)=\big(g(b)-g(a)\big)\cdot f(x)-\big(f(b)-f(a)\big)\cdot g(x)$$

Poiché $F(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e, come si può verificare facilmente,

$$F(a)=F(b)$$

per il teorema di Rolle $\exists \quad x_0\in(a,b): F'(x_0)=0$

Ma $F'(x)=\big(g(b)-g(a)\big)\cdot f'(x)-\big(f(b)-f(a)\big)\cdot g'(x)$

e quindi $\quad F'(x_0)=\big(g(b)-g(a)\big)\cdot f'(x_0)-\big(f(b)-f(a)\big)\cdot g'(x_0)=0$ e quindi $\exists \quad x_0\in(a,b):$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

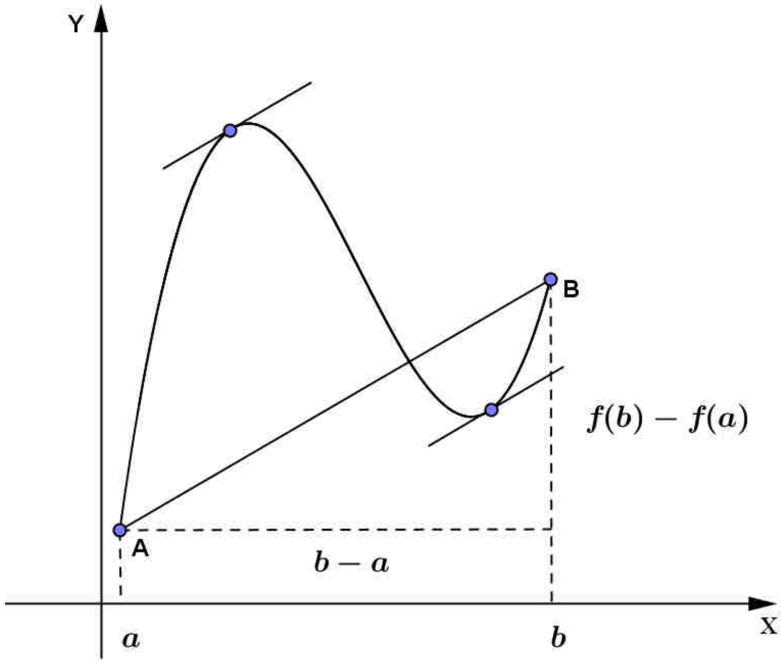
Dal teorema di Cauchy segue subito il seguente teorema di Lagrange (matematico torinese).

Teorema di Lagrange

Se $f:[a,b]\to\Re$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

$$\Rightarrow \exists \quad x_0 \in (a,b): \quad f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interpretazione geometrica: poiché $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è l'inclinazione della retta passante per gli estremi del grafico, il teorema afferma che esiste almeno un punto $P\left(x_0, f(x_0)\right)$ in cui la tangente al grafico è parallela alla retta passante per gli estremi del grafico.



Dimostrazione

Basta considerare come seconda funzione $g(x)=x$ (continua, derivabile e con $g'(x)\neq 0$) ed applicare il teorema di Cauchy.

Infatti poiché $g'(x)=1 \quad \forall x\in (a,b)$ e $g(b)=b, \quad g(a)=a$ avremo che

$$\exists \quad x_0 \in (a,b): \frac{f'(x_0)}{1}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cioè quello che volevamo dimostrare.

Esempi

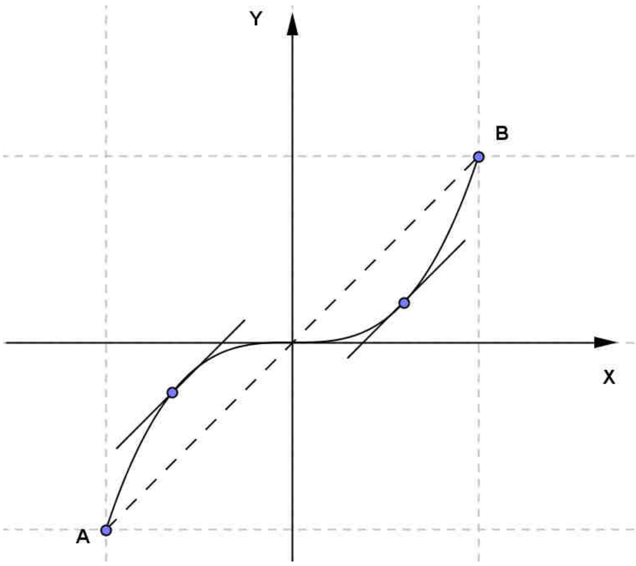
1) Consideriamo $f(x) = x^3$ nell'intervallo $I = [-1,1]$.

- Verifica le ipotesi del teorema di Lagrange?
  Poiché $f(x)$ è continua e derivabile in $\Re$ lo è sicuramente anche in *I* e quindi verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
- Determina il punto x_0 (o i punti) : $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
  Nel nostro caso $f(-1) = -1 \quad f(1) = 1$ e quindi, essendo $f'(x) = 3x^2$ devo risolvere:

$$3x^2 = \frac{1 - (-1)}{2}$$

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

I valori sono interni all'intervallo *I* e quindi entrambi accettabili.
Graficamente infatti si verifica che esistono due punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta per $A(-1,-1)$ e $B(1,1)$



2) Consideriamo $f(x) = \left|1 - x^2\right|$ in $I = [0,2]$. Si può applicare il teorema di Lagrange?

Poiché $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x \le 1 \\ -(1 - x^2) & x \le -1 \ \vee \ x \ge 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 1 \\ 2x & x < -1 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -2$ e $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2$ si ha che f(x) non è derivabile in $x = 1$ (interno a I) e quindi il teorema di Lagrange non si può applicare.

3) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x^2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi di Lagrange nell'intervallo $I = [-1;1]$? Se la risposta è affermativa qual è il punto x_0 (o i punti) previsto dal teorema? Traccia il grafico di f(x).

Svolgimento
La funzione è continua anche in $x = 0$ poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 - x^2 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + x^2 = 1$$

Per la derivabilità poiché abbiamo:

$$f^{'}(x) = \begin{cases} -2x & -1 \leq x < 0 \\ 2x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

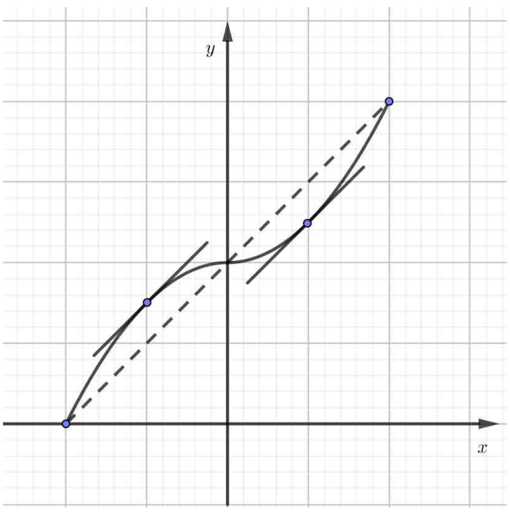
la funzione è derivabile anche per x = 0 poiché limite sinistro e destro di y' per $x \to 0$ sono uguali (entrambi zero).
Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di Lagrange.
Calcoliamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Quindi per determinare x_0 tale che $y'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ poniamo:

$$-2x = 1 \to x = -\frac{1}{2}$$
$$2x = 1 \to x = \frac{1}{2}$$

Abbiamo quindi due valori di x_0 (vedi grafico).



ESERCIZI
TEOREMA DI LAGRANGE

1) Considera $f(x)=x^3-8$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I=[0,2]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0=+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$]

2) Considera $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & 1\le x\le 2 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\sqrt{2}$]

3) Considera $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ x+1 & x\ge 0 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I=[-1,1]$?

[si; $x_0=\ln\left(1-\dfrac{1}{2e}\right)$]

4) Considera $f(x)=\begin{cases} 1-x-x^2 & -1\le x\le 0 \\ e^{-x} & 0\le x\le 1 \end{cases}$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I=[-1,1]$?

[si; $x_0=-\dfrac{1+e}{4e}$]

5) Considera

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 & x>0 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I=[-1,2]$?

[si; $x_0=\dfrac{1}{3}$]

6) Considera $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,2]$?

[si; $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$]

7) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$]

8) Considera $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [1,3]$?
Disegna il grafico di $f(x)$.

[si; $x_0 = 2\sqrt{2} - 1$]

9) Considera $f(x) = \sqrt{x}$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [4,9]$?

[si; $x_0 = \frac{25}{4}$]

10) Considera $f(x) = \ln x$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [1,e]$?

[si; $x_0 = e - 1$]

11) Considera $f(x) = x^2 + |x|$. Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [-1,2]$?

[no, perché …]

12) Considera

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \le x < 1 \\ \ln x & x \ge 1 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$?

[si; $x_0 = \frac{2}{\ln 2 + 1}$]

13) Considera

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ \frac{2 - x}{x} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Si può applicare il teorema di Lagrange in $I = [0,2]$? [si; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$]

Teorema di De l'Hospital

(senza dimostrazione)

Se $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ e se esiste $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito)

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (la dimostrazione si basa sul teorema di Cauchy)

NOTA : se $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si presenta ancora in forma indeterminata possiamo cercare di calcolare

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ eccetera…

Esempi

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

3) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

In generale se $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = 0$

Si dice che la funzione $y = \ln x$ **è un "infinito" di ordine inferiore rispetto alla funzione** $y = x^\alpha \quad (\alpha > 0)$**, quando** $x \to +\infty$**.**

4) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\overset{H}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

In generale se $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = ... = +\infty$

Si dice che la funzione $y = e^x$ **è un "infinito" di ordine superiore rispetto alla funzione** $y = x^\alpha \quad (\alpha > 0)$**, quando** $x \to +\infty$**.**

5) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+senx}{x+\cos x}$$

Derivando troviamo $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1-senx}$: questo limite non esiste e quindi non possiamo applicare il teorema di De l'Hospital.

In questo caso il limite dato può essere calcolato dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+senx}{x+\cos x}=\frac{1+\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\left(\frac{senx}{x}\right)}}{1+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\left(\frac{\cos x}{x}\right)}}=1$$

6) Il teorema di De l'Hospital può essere utilizzato anche per determinare limiti che si presentano nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ del prodotto ma solo dopo aver scritto il prodotto come un quoziente "opportuno".

Per esempio:

$\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^x$ si presenta in forma indeterminata $\infty\cdot 0$

Se scriviamo $\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\overset{H}{\downarrow}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$

Attenzione: se avessimo scritto $x\cdot e^x=\frac{e^x}{\frac{1}{x}}$ non saremmo riusciti a calcolare il limite con l'Hospital perché derivando la forma sarebbe rimasta indeterminata:

$\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}\overset{\overset{H}{\downarrow}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{0}$ che è ancora una forma indeterminata…

Occorre quindi fare attenzione a come si trasforma il prodotto.

ESERCIZI
TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Calcola i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln x}$ [$+\infty$]

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$ [0]

3) $\lim_{x\to0^+} x\cdot\ln x$ [0]

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{x^2}$ [0]

5) $\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x$ [0]

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$ [1]

7) $\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(arctgx-\frac{\pi}{2}\right)$ [-1]

8) $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-x}$ [0]

9) $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\cot gx}$ [0]

10) $\lim_{x\to0^+} x^2\cdot\ln x$ [0]

11) $\lim_{x\to0} \frac{sen3x}{2x+tgx}$ [1]

12) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ [1]

13) $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ [$+\infty$]

14) $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ [2]

Corollari del teorema di Lagrange

1) Se $f:[a,b]\to\Re$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b)
e $f'(x)=0 \ \ \forall x\in(a,b) \ \Rightarrow \ f(x)=k$ cioè $f(x)$ è una funzione costante.

Dimostrazione

Sia $x\in(a,b)$: poiché $f(x)$ è continua anche in $[a,x]$ e derivabile in (a,x) , posso applicare il teorema di Lagrange a questo intervallo.

$$\Rightarrow \exists x_0\in(a,x): \ \ f'(x_0)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ma $f'(x_0)=0$ e quindi $f(x)-f(a)=0 \ \Rightarrow \ f(x)=f(a)$

Poiché questo accade comunque si scelga $x\in(a,b)$ si è dimostrato che $f(x)=k$ (cioè la funzione è costante).

2) Se $f:[a,b]\to\Re$ e $g:[a,b]\to\Re$ sono continue in $[a,b]$, derivabili in (a,b) e se

$$f'(x)=g'(x) \ \ \forall x\in(a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)-g(x)=k \ \ \forall x\in[a,b]$$

Dimostrazione

Consideriamo $F(x)=f(x)-g(x)$

Poiché $F'(x)=f'(x)-g'(x)=0 \ \ \forall x\in(a,b)$ applicando il primo corollario si ha $F(x)=k$ e quindi $f(x)-g(x)=k$ cioè le due funzioni differiscono per una costante.

3) Ma la conseguenza più interessante del teorema di Lagrange è rappresentata dal seguente teorema:

Teorema

Relazione tra il segno della derivata f'(x) e "andamento" della funzione

Data $f:[a,b]\to\Re$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) abbiamo che:

se $f'(x)>0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow\ f(x)$ è crescente in (a,b)

se $f'(x)<0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow\ f(x)$ è decrescente in (a,b)

Dimostrazione

Consideriamo $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$.

Poiché $f(x)$ è continua in $[x_1,x_2]$ e derivabile in (x_1,x_2) applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1,x_2]$

$$\exists x_0\ con \qquad x_1 < x_0 < x_2 :\ \ f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Ma $f'(x_0)>0$ per ipotesi e $x_2-x_1>0\ \Rightarrow\ f(x_2)-f(x_1)>0\ \Rightarrow\ f(x_2)>f(x_1)$

Quindi, poiché questo vale comunque scelga $x_1 < x_2$, abbiamo dimostrato che la funzione è crescente.

Analogamente si dimostra che se $f'(x)<0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow\ f(x)$ è decrescente.

NOTA

Osserviamo che se $f(x)$ è crescente in $[a,b]\ \Rightarrow f'(x)\geq 0$ poiché può esserci anche un flesso a tangente orizzontale.

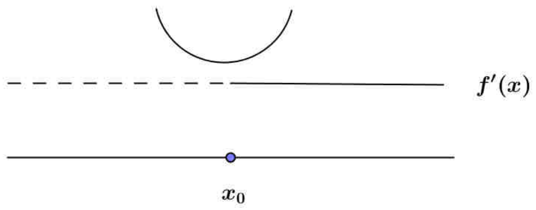
Questo teorema è fondamentale per lo studio del grafico di una funzione poiché, come vedremo, ci permette di individuare i punti di massimo, minimo e flesso a tangente orizzontale.

Ricerca dei punti di massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale

Consideriamo un punto $x_0 \in D_f$ in cui $f'(x_0) = 0$, cioè un punto in cui la tangente è parallela all'asse x.
Potrebbe essere un punto di massimo o un punto di minimo o un punto di flesso a tangente orizzontale.

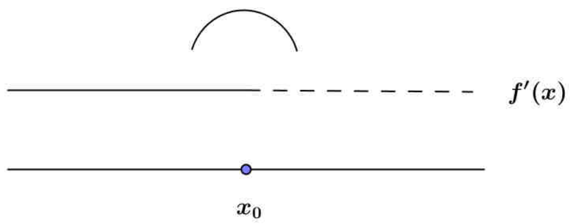
Per capirlo studiamo il segno di $f'(x)$.

1) Se il segno della derivata ha questo andamento



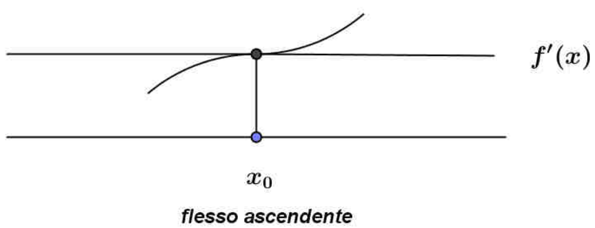
cioè negativo e poi positivo, poiché la $f(x)$ prima di x_0 decresce e poi cresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **MINIMO**.

2) Se il segno della derivata ha questo andamento

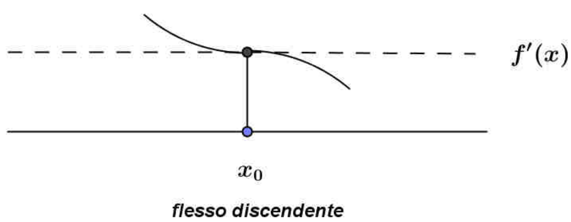


la funzione prima di x_0 cresce e poi decresce $\Rightarrow x_0$ è un punto di **MASSIMO**.

3) Se $f'(x)$ non cambia segno in $x_0 \Rightarrow x_0$ è un punto di **FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE** (ascendente o discendente)



Flesso ascendente



Flesso discendente

Studio del grafico di una funzione

Esempio 1

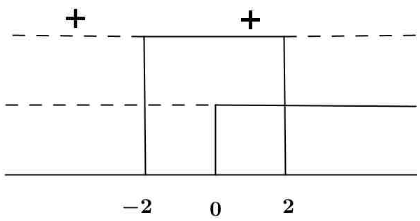
Proviamo a studiare il grafico di $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$

1) Per prima cosa determiniamo il dominio: $D_f=\Re\setminus\{\pm 2\}$

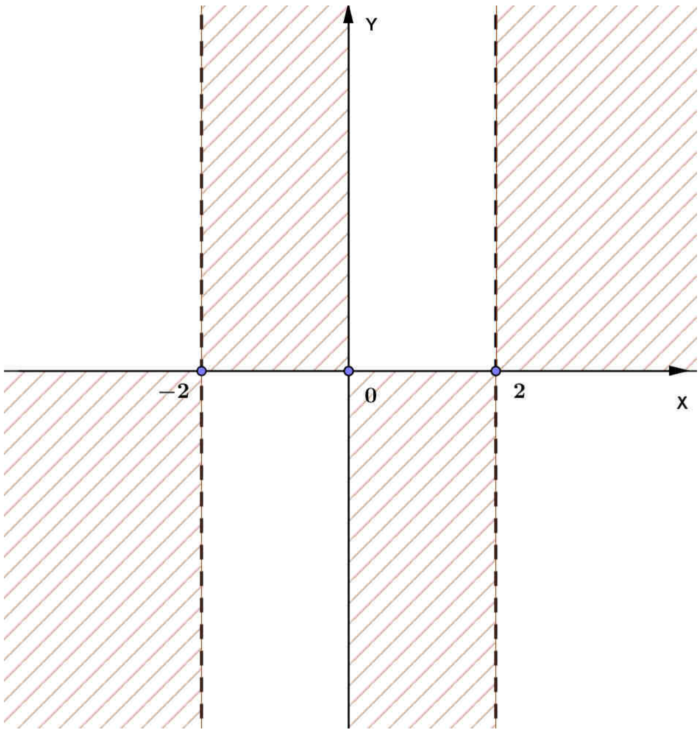
- Studiamo il segno della funzione per capire quando il grafico si trova sopra all'asse x e quando si trova sotto all'asse x.

  Studiamo: $\dfrac{x^3}{4-x^2}>0$

  Quindi $f(x)>0 \quad x<-2 \;\cup\; 0<x<2$



  Cominciamo ad eliminare con un leggero tratteggio le zone dove non si trova il grafico:



- Determiniamo le eventuali intersezioni con gli assi ponendo $x=0$ (se è nel dominio) e $y=0$.

  Nel nostro caso troviamo solo $(0;0)$

- Verifichiamo se la funzione è pari o dispari, cioè calcoliamo

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{4-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{4-x^2}=-f(x)\Rightarrow$ la funzione è dispari cioè il grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine.

2) Passiamo allo studio dei limiti e alla ricerca degli asintoti (se ci sono).
Nel nostro caso abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow x=-2 \text{ asintoto verticale}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\rangle \Rightarrow x=2 \text{ asintoto verticale}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f(x)}{x}=-1 \quad (m) \\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x)+x=...=0 \quad (q)\end{array}\right\rangle \Rightarrow y=-x \text{ asintoto obliquo}$$

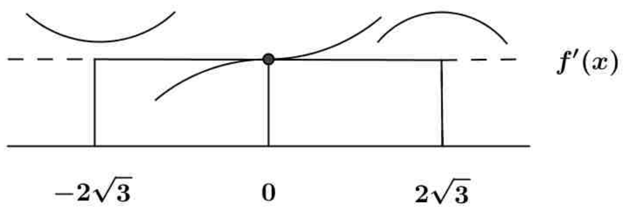
3) Calcoliamo adesso $f'(x)$, studiamo in quali punti si annulla e il suo segno:

$$f'(x)=\frac{3x^2(4-x^2)-x^3(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2}=\frac{x^2\cdot\left(12-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$$

Poniamo
$$\begin{array}{l}f'(x)=0 \\ x^2(12-x^2)=0\Rightarrow \quad x_1=0 \quad x_{2,3}=\pm 2\sqrt{3}\end{array}$$

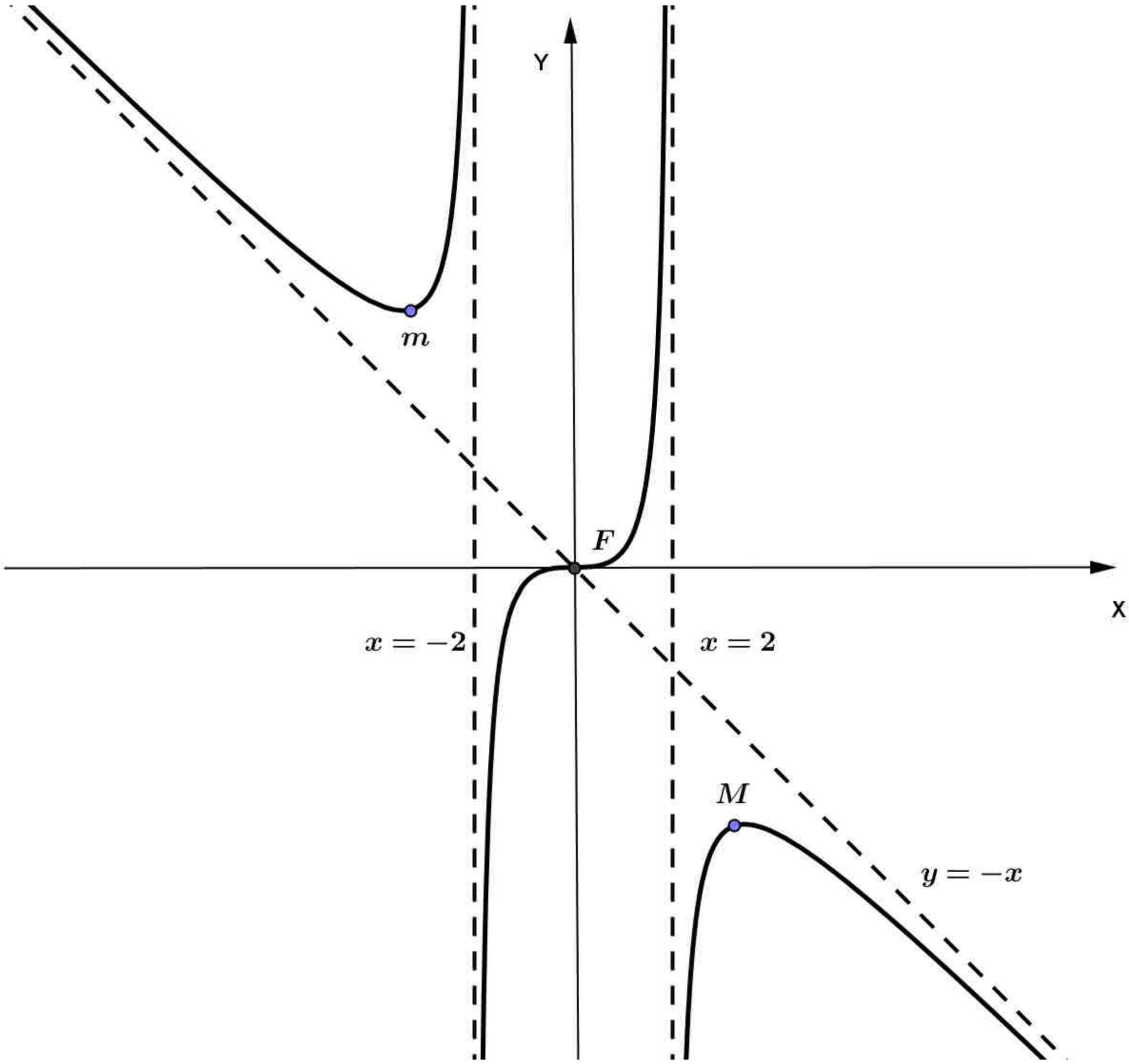
Studiamo

$$\begin{array}{l}f'(x)>0 \\ \dfrac{x^2(12-x^2)}{\left(4-x^2\right)^2}>0 \Leftrightarrow \quad 12-x^2>0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}\end{array}$$



$m\left(-2\sqrt{3}; f\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}\right)$
$M\left(2\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right)$
$F(0;0)$

Riportiamo i nostri risultati nel disegno: il grafico dovrà necessariamente avere il seguente andamento



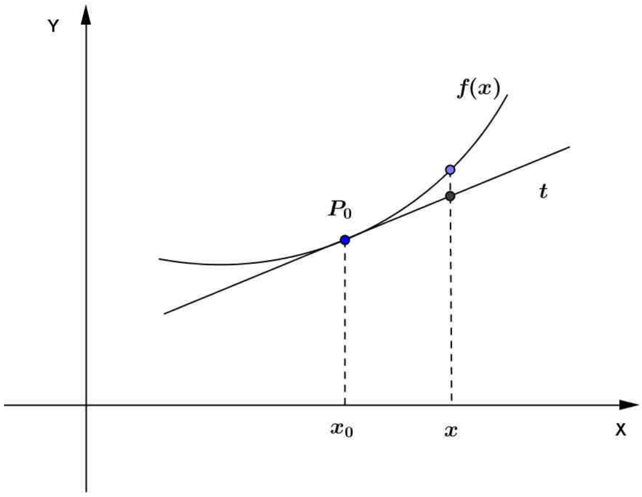
OSSERVAZIONI

Nello studio di un grafico è importante determinare anche la "concavità" del grafico e i punti in cui c'è un cambio di concavità (punti di flesso).

Per far questo dobbiamo dimostrare un teorema che lega la concavità al segno della derivata seconda di $f(x)$.

Definiamo cosa si intende per “**concavità verso l’alto**” o “**verso il basso**” del grafico di una funzione in x_0:

Definizione: diciamo che in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l’alto quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sopra alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$



Poiché l’equazione della tangente risulta

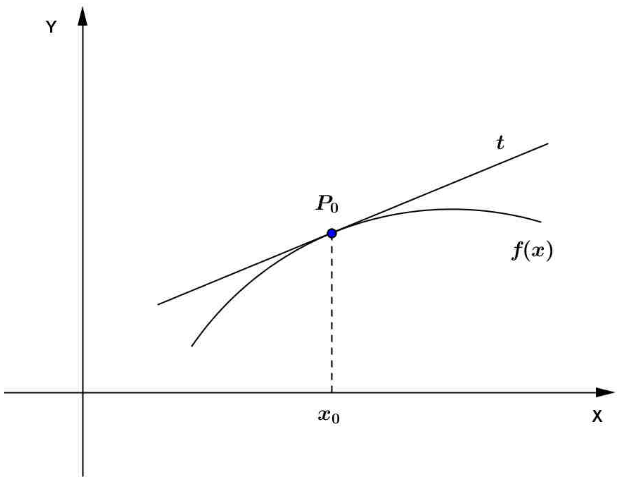
$$t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

possiamo anche dire che **in** x_0 **il grafico volge la concavità verso l’alto**

$$\text{se } \exists \ I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Definizione: diciamo che **in** x_0 **il grafico di** $f(x)$ **volge la concavità verso il basso** quando esiste un intorno di x_0 I_{x_0} in cui il grafico si trova sotto alla tangente in $P(x_0; f(x_0))$ cioè

$$\text{se } \exists \quad I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Per studiare la concavità utilizzeremo la derivata seconda. Infatti abbiamo il seguente teorema:

Teorema : sia $f(x)$ continua in I con $f'(x), f''(x)$ continue e $x_0 \in I$.

- Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto.
- Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ in x_0 il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso il basso.

Dimostrazione

Supponiamo che $f''(x_0) > 0$

Consideriamo $\varphi(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right]$

Osserviamo che $\varphi(x)$ rappresenta lo scarto funzione-tangente: per dimostrare che la concavità è rivolta verso l'alto basterà dimostrare che $\exists \ I_{x_0}$ in cui $\varphi(x) \geq 0$

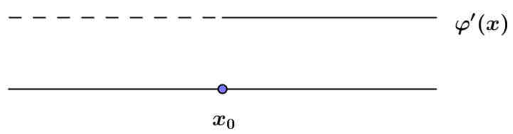
Determiniamo:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= f'(x) - f'(x_0) \\ \varphi''(x) &= f''(x) \end{aligned}$$

Poiché quindi $\varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0 \ \exists \ I_{x_0}$ in cui $\varphi''(x) > 0$ (per la continuità di $f''(x)$)

Possiamo scrivere $\varphi''(x) = D(\varphi'(x)) > 0$ e allora, avendo derivata positiva, $\varphi'(x)$ è una funzione crescente.

Ma sostituendo x_0 abbiamo $\varphi'(x_0) = 0$ e quindi il segno di $\varphi'(x)$ sarà il seguente (poiché $\varphi'(x)$ deve essere crescente):



Ma allora $\varphi(x)$ ha un minimo in x_0 cioè

$$\exists \ I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \qquad \varphi(x) \geq \varphi(x_0)$$

Ma sostituendo x_0 $\varphi(x_0) = 0$ e quindi

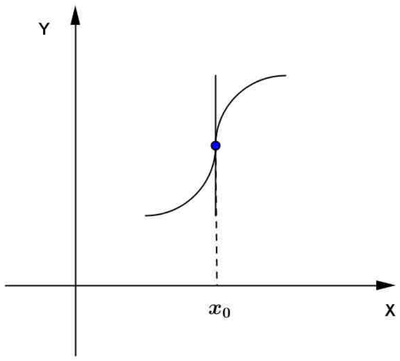
$$\exists \ I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \qquad \varphi(x) \geq 0$$

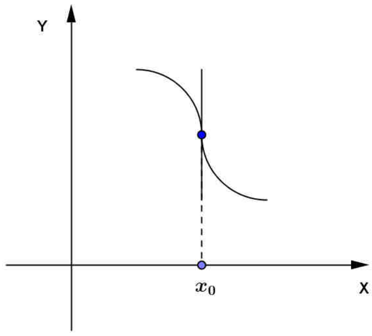
Cioè il grafico volge la concavità verso l'alto (in x_0).
La dimostrazione della seconda parte è analoga.

Flessi di una funzione

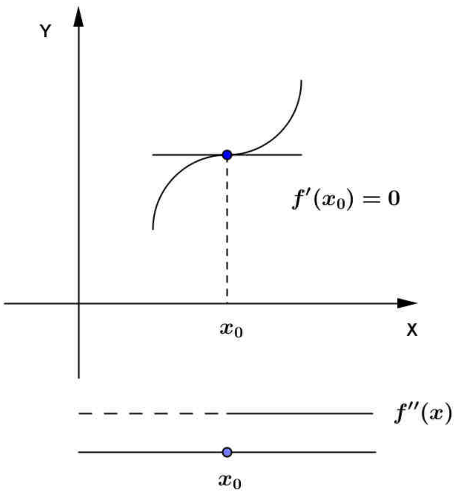
Definizione: x_0 si dice un punto di flesso per $f(x)$ se in x_0 il grafico della funzione **cambia concavità** e quindi il grafico "attraversa" la tangente in $P_0(x_0; f(x_0))$.
A seconda dell'inclinazione della tangente possiamo avere

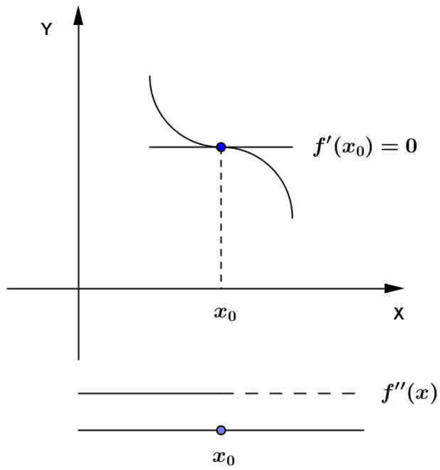
- **flesso a tangente verticale** : in questo caso $f(x)$ non è derivabile in x_0 e $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$



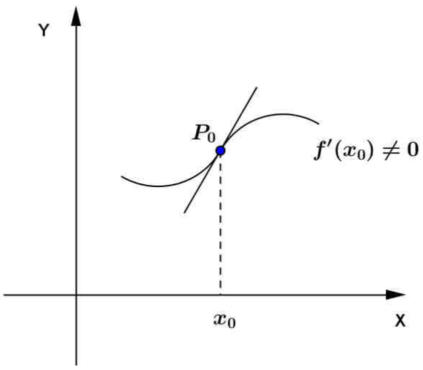


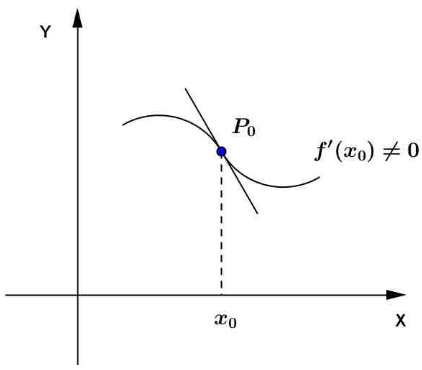
- **flesso a tangente orizzontale** : in x_0 $f'(x_0) = 0$ ma $f'(x)$ non cambia segno in x_0
  Cambia segno invece $f''(x)$ in x_0 (perché cambia la concavità) e $f''(x_0) = 0$.





- **flesso a tangente obliqua** : in x_0 $f'(x_0) \neq 0$ ma c'è un cambio di concavità e quindi $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ **cambia segno**.





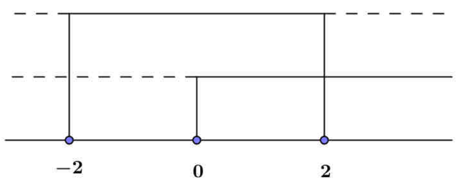
Possiamo finalmente studiare anche la concavità di un grafico e gli eventuali punti di flesso utilizzando $f''(x)$.

Riprendiamo il nostro esempio $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$.

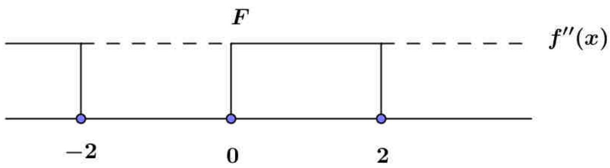
4) Calcoliamo $f''(x)=...=\dfrac{8x\cdot\left(x^2+12\right)}{\left(4-x^2\right)^3}$

Quindi $f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

e studiando $f''(x)>0$ abbiamo:



Quindi avremo il seguente andamento del segno di $f''(x)$:



e quindi il grafico volge la concavità verso l'alto per $x<-2 \quad e \quad 0<x<2$, verso il basso per $-2<x<0 \quad e \quad x>2$ e $F(0;0)$ è un flesso.

Naturalmente $x=\pm 2$ non sono punti di flesso perché non appartengono al dominio.

Osserviamo che $F(0;0)$ **è un flesso a tangente orizzontale poiché** $f'(0)=0$ ed infatti l'avevamo già individuato.

Lo studio di $f''(x)$ conferma quindi il nostro grafico.

NOTA

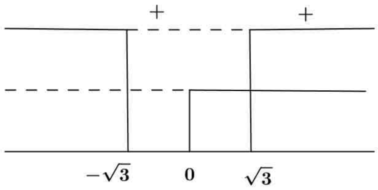
Lo studio di $f''(x)$ è indispensabile per individuare eventuali flessi a tangente obliqua mentre può essere omesso nei casi in cui , per la presenza di asintoti o per lo studio di $f'(x)$, sia chiaro come risulti il grafico (come nel nostro esempio).

Esempio 2

Studiamo il grafico di $f(x) = x^3 - 3x$

1) $D_f = \Re$

$f(x) > 0 \qquad x(x^2 - 3) > 0$



$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \end{cases} \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

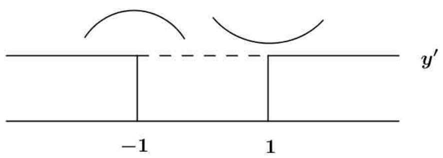
Quindi le intersezioni con gli assi sono $\left(-\sqrt{3};0\right)$ $(0;0)$ $\left(\sqrt{3};0\right)$.

Osserviamo che $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ e quindi la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine.

2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ma non ci sono asintoti obliqui $\left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \right)$

3) $y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \quad 3(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$



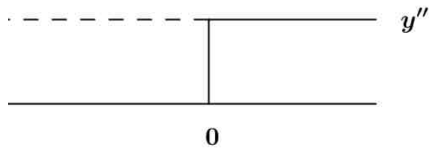
$y' > 0$

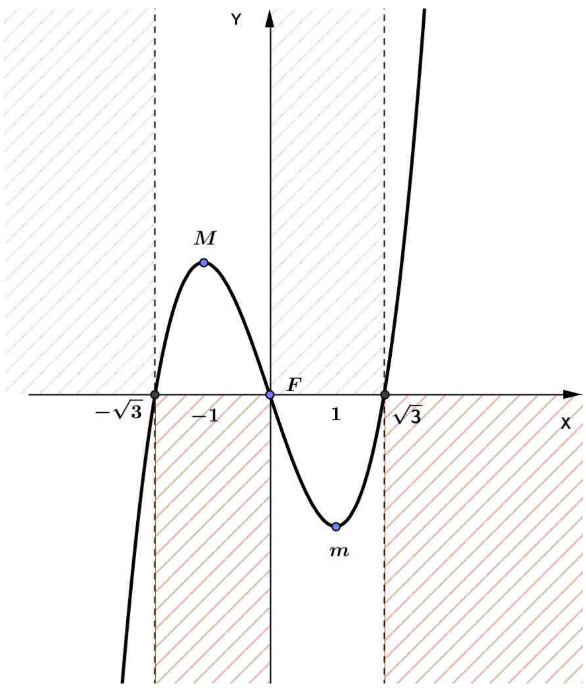
$M(-1;2) \qquad m(1;-2)$

4) $y'' = 6x \;,\; y'' = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;,$

$y'' > 0 \Leftrightarrow \quad x > 0$

$F(0;0)$ flesso a tangente obliqua

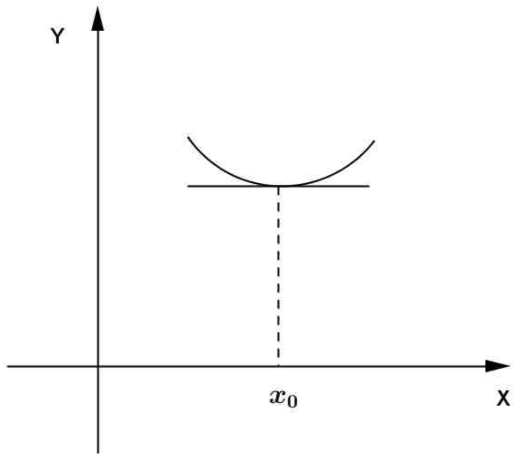




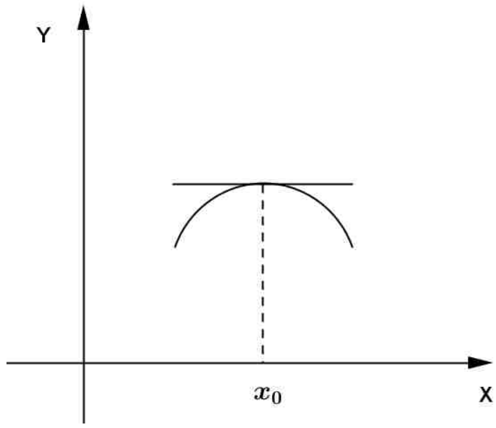
Massimi, minimi e flessi con lo studio di $f''(x_0)$

Per individuare massimi e minimi possiamo utilizzare lo studio di $f''(x)$ piuttosto dello studio del segno di $f'(x)$.

- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$ (concavità verso l'alto) $\Rightarrow x_0$ è un punto di MINIMO



- Se in x_0 abbiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$ (concavità verso il basso) $\Rightarrow x_0$ è un punto di MASSIMO



Se in x_0 $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=0$ dobbiamo studiare il segno di $f''(x)$: se cambia in x_0 allora x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.

Si può dimostrare che

1) Se in x_0 $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=f'''(x_0)=...=0$ e $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,cioè se la derivata n-esima è la prima derivata diversa da 0 in x_0:

se n è pari $\Rightarrow x_0$ è un punto di massimo se $f^{(n)}(x_0)<0$
è un punto di minimo se $f^{(n)}(x_0)>0$

se n è dispari $\Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale

2) Se in x_0 $f'(x_0)\neq 0$ ma $f''(x_0)=f'''(x_0)=...=0$ e $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,cioè la derivata n-esima è la prima derivata diversa da 0 in x_0:

se n è pari $\Rightarrow$ in x_0 il grafico volge la concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0)>0$
il grafico volge la concavità verso il basso se $f^{(n)}(x_0)<0$

se n è dispari $\Rightarrow x_0$ è un punto di flesso a tangente obliqua