Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita è una funzione y(x) e in cui compaiono le derivate della funzione stessa.

Per esempio l'equazione $y' = 2y$ è un'equazione differenziale (del primo ordine perché compare solo la derivata prima di y).

Come si risolve un'equazione differenziale ?

Risolvere un'equazione differenziale è piuttosto complesso e quindi tratteremo solo alcuni casi: equazioni differenziali del primo ordine o particolari equazioni differenziali del secondo ordine (dove cioè compare anche la derivata seconda).

Ma perché si studiano le equazioni differenziali?

Le equazioni differenziali sono una parte della matematica molto importante per le scienze applicate quali la fisica e la biologia.

Infatti quando in un fenomeno c'è una variazione nel tempo di una quantità y(t) quale ad esempio il numero di individui di una popolazione, la quantità di carica sulle armature di un condensatore, la temperatura di un corpo, la velocità di un corpo, abbiamo una "**velocità di variazione"** di y(t) **cioè la derivata di y(t).**

Se possiamo determinare una relazione tra y(t) e y'(t) oppure y''(t) troviamo un'equazione differenziale che, risolta, ci permette di determinare y(t).

Cercheremo quindi di presentare alcuni esempi di fenomeni il cui studio porta a dover risolvere un'equazione differenziale.

Equazioni differenziali del primo ordine

Esempio 1: $y' = x + 2$

E' chiaro che in questo caso per trovare la funzione *y* basta integrare entrambi i membri (rispetto alla variabile x).

$$\int y'\,dx = \int (x+2)dx$$

$$(*)\quad y = \frac{x^2}{2} + 2x + c, \quad c \in \Re$$

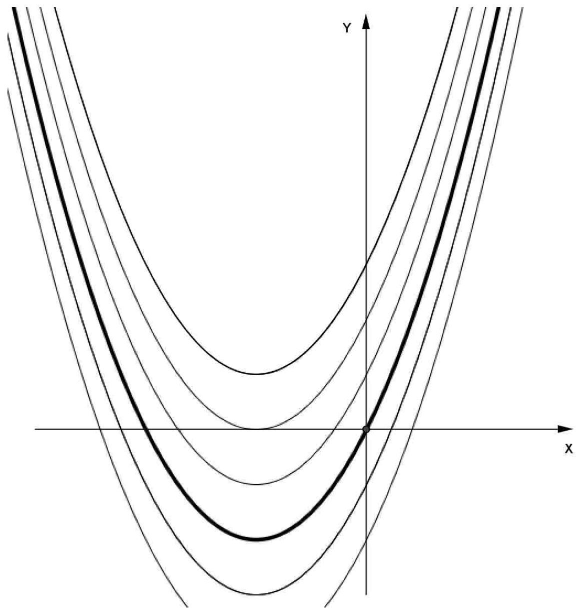
Abbiamo trovato quindi una famiglia di funzioni (le primitive di $a(x) = x + 2$).

Se poi conosciamo il valore che la funzione y deve avere in un dato punto (chiamata "condizione iniziale"), posso determinare una soluzione particolare dell'equazione.

Se per esempio nel nostro caso avessi anche la condizione

$$y(0) = 0$$

sostituendo nella (*) abbiamo $y(0) = c$, e quindi confrontando con la condizione iniziale troviamo $c = 0$ e la soluzione particolare risulta $y = \frac{x^2}{2} + 2x$.



Esempio 2: $y' = 2 \cdot y$

Scriviamo la derivata come $\frac{dy}{dx}$ e **"separiamo" le variabili x e y** spostando a sinistra la y e a destra dx (supponiamo quindi $y \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \cdot dx$$

Integrando entrambi i membri abbiamo:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2 \cdot dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + c \Rightarrow |y| = e^{2x+c} \Rightarrow y = \pm e^c \cdot e^{2x}$$

Poiché $\pm e^c$ rappresenta un qualsiasi numero reale diverso da zero, possiamo scrivere :

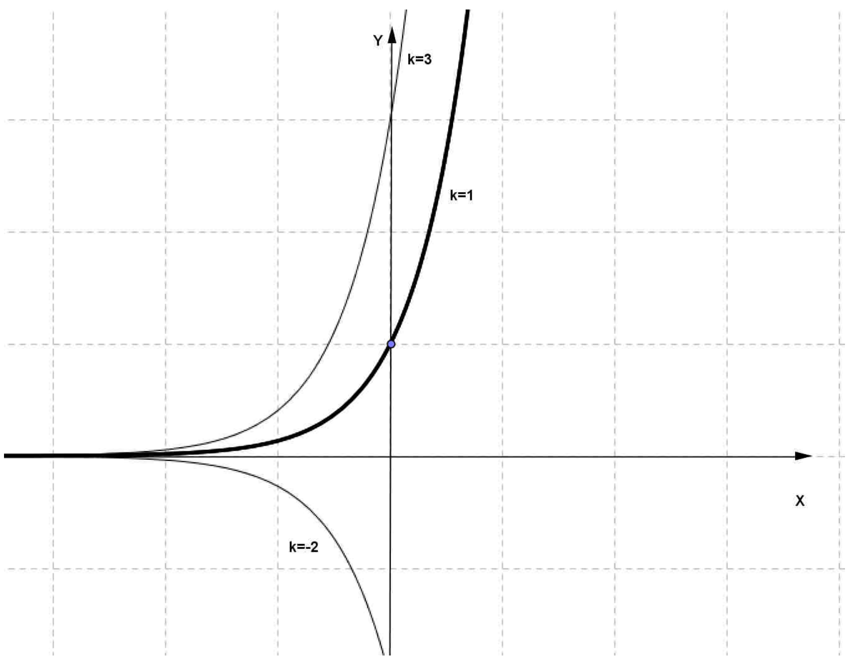
$$y = k \cdot e^{2x} \text{ con } k \neq 0$$

Considerando però l'equazione iniziale è chiaro che anche $y = 0$ è una soluzione e quindi possiamo dire che le soluzioni dell'equazione differenziale sono in conclusione

$$y = k \cdot e^{2x},\ k \in \Re$$

Nota
Possiamo **verificare** che le soluzioni sono quelle trovate calcolando la derivata:
abbiamo $y' = 2k \cdot e^{2x}$ e sostituendo nell'equazione differenziale iniziale otteniamo un'identità.

Naturalmente anche in questo caso se abbiamo una condizione iniziale, per esempio $y(0) = 1$, otteniamo $k = 1$ e quindi la soluzione particolare $y = e^{2x}$.



E' chiaro quindi che, con passaggi analoghi all'esempio, in generale l'equazione differenziale

$$\boxed{y' = a \cdot y, \quad a \in \Re}$$

ha come soluzione generale

$$y = k \cdot e^{ax}, \quad k \in \Re$$

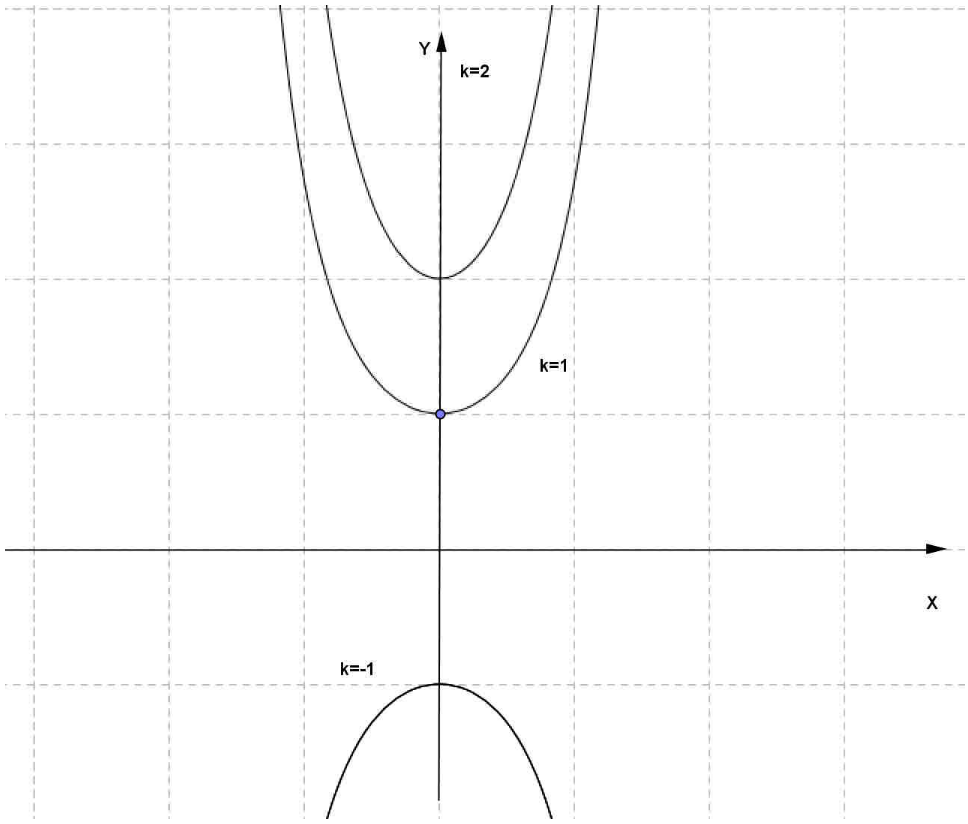
Esempio 3: $y' = 2x \cdot y$

Procediamo come abbiamo fatto nel caso precedente separando le variabili:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x \cdot dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + c \Rightarrow |y| = e^{x^2+c} \Rightarrow$$

$$y = \pm e^c \cdot e^{x^2} \Rightarrow y = k \cdot e^{x^2}, \quad k \in \Re$$

(sempre osservando che nel procedimento si suppone $y \neq 0$ ma anche $y = 0$ è soluzione e quindi si può considerare $k \in \Re$).



Anche in questo caso possiamo, se vogliamo, verificare che le soluzioni trovate soddisfano l'equazione differenziale assegnata.

Se poi abbiamo anche una condizione "iniziale", per esempio $y(0) = 1$, otteniamo $k = 1$ e quindi la soluzione particolare è $y = e^{x^2}$.

Esempio 4: $y' = y + x$

In questo caso non possiamo separare le variabili e procediamo nel seguente modo (metodo di Lagrange o della "**variazione della costante**"):

- risolviamo l'equazione $y' = y$ che ci dà come soluzioni $y = k \cdot e^x$;
- **consideriamo *k*** non come una costante ma **come una variabile** , indichiamola con *k(x)* e imponiamo che $y = k(x) \cdot e^x$ sia soluzione dell'equazione differenziale assegnata cioè calcoliamo

$$y' = k'(x) \cdot e^x + k(x) \cdot e^x$$

e sostituendola nell'equazione differenziale ricaviamo $k'(x)$

$$k'(x) \cdot e^x + k(x) \cdot e^x = k(x) \cdot e^x + x \quad \Rightarrow \quad k'(x) \cdot e^x = x \quad \Rightarrow \quad k'(x) = x \cdot e^{-x}$$

Infine ricaviamo *k(x)* :

$$k(x) = \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x} \cdot (x+1) + c$$

Quindi la soluzione dell'equazione differenziale risulta:

$$y = [-e^{-x}(x+1) + c] \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = -(x+1) + c \cdot e^x$$

NOTA

Non sempre è necessario applicare il metodo della variazione della costante per ricavare la soluzione .

Se per esempio abbiamo $y' = y - 1$ possiamo usare il metodo della "separazione" delle variabili:

$$\frac{dy}{dx} = y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y-1} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y-1} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y-1| = x + c \quad \Rightarrow \quad |y-1| = e^{x+c}$$

$$y - 1 = \pm e^c \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = 1 + k \cdot e^x$$

Esempio 5

Consideriamo per esempio l'equazione $y' = x \cdot (1 + y^2)$

Procediamo così:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (1 + y^2) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{1 + y^2} = x \cdot dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x \cdot dx \quad \rightarrow \quad arctgy = \frac{x^2}{2} + c$$

e quindi in conclusione $\qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

Nota
Le equazioni del tipo $y' = a(x) \cdot b(y)$ sono dette a "**variabili separabili**" perché per risolverle si procede "separando" le variabili.

Quando dividiamo per $b(y)$ dobbiamo porlo diverso da zero e poi considerare a parte le soluzioni dell'equazione differenziale nel caso in cui sia $b(y) = 0$.
Nel nostro esempio poiché $b(y) = 1 + y^2 \neq 0$ non ci sono problemi e non dobbiamo aggiungere nessuna soluzione alla soluzione generale trovata.

Esempio 6

Consideriamo l'equazione a variabili separabili $y' = x \cdot y^2$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x \cdot dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int x \cdot dx \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + k}$$

In questo caso poiché per poter dividere per y^2 supponiamo $y \neq 0$ dobbiamo poi controllare se $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale: in questo caso si verifica che $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale e quindi va aggiunta alle soluzioni.

In conclusione allora le soluzioni dell'equazione differenziale sono

$$y = -\frac{2}{x^2 + k} \cup y = 0$$

Equazioni differenziali del secondo ordine

Studieremo solo equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti ed omogenee cioè un'equazione del tipo:

$$\boxed{ay''+by'+cy=0}$$

Per risolverla supponiamo che $y=e^{zx}$ $(z\in\Re)$ sia soluzione: per determinare z calcoliamo y' e y'' e sostituiamo nell'equazione differenziale.

$$y'=z\cdot e^{zx} \quad ; \quad y''=z^2\cdot e^{zx} \quad \Rightarrow a\cdot z^2\cdot e^{zx}+b\cdot z\cdot e^{zx}+c\cdot e^{zx}=0 \quad \Rightarrow \quad a\cdot z^2+b\cdot z+c=0$$

L'equazione $a\cdot z^2+b\cdot z+c=0$ (detta **equazione "caratteristica**" associata all'equazione differenziale) può avere:

- $\Delta>0$ e quindi due soluzioni reali distinte z_1, z_2 e in questo caso si può verificare che la soluzione dell'equazione differenziale è:
$$y=c_1\cdot e^{z_1x}+c_2\cdot e^{z_2x} \qquad con \quad c_1,c_2\in\Re$$
- $\Delta=0$ e quindi due soluzioni reali coincidenti $z_1=z_2$ e in questo caso si può verificare che la soluzione dell'equazione differenziale è:
$$y=e^{z_1x}\cdot(c_1+c_2\cdot x) \qquad con \quad c_1,c_2\in\Re$$
- $\Delta<0$ e quindi due soluzioni complesse coniugate $z_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ e in questo caso si può verificare che la soluzione dell'equazione differenziale è:
$$y=e^{\alpha x}\cdot(c_1\cdot\cos\beta x+c_2\cdot sen\beta x) \qquad con \quad c_1,c_2\in\Re$$

Esempi

1) $y''-5y'+6y=0$

L'equazione caratteristica è in questo caso: $z^2-5z+6=0\rightarrow z_1=2,\quad z_2=3$

Quindi la soluzione è $\quad y=c_1\cdot e^{3x}+c_2\cdot e^{2x}, \quad (c_1,c_2\in\Re)$

2) $y''-4y'+4y=0$

L'equazione caratteristica è : $z^2-4z+4=0\rightarrow(z-2)^2=0\rightarrow z_1=z_2=2$

Quindi la soluzione è $\quad y=e^{2x}\cdot(c_1+c_2\cdot x), \quad (c_1,c_2\in\Re)$

3) $y''+9y=0$

L'equazione caratteristica è: $z^2+9=0\rightarrow z_{1,2}=\pm 3i$

Quindi la soluzione è $\quad y=c_1\cdot\cos 3x+c_2\cdot sen 3x, \quad c_1,c_2\in\Re$

PROBLEMI

Problema 1

Consideriamo una popolazione che vive in un ambiente isolato (non ci sono predatori), con risorse illimitate e per la quale perciò si suppone che, indicando con N(t) il numero degli individui della popolazione al tempo t e considerando un intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$ si abbia:

$$N(t+\Delta t)-N(t)=n°nati-n°morti$$

Se supponiamo che il numero degli individui nati nell'intervallo di tempo Δt sia proporzionale a $N(t)\cdot\Delta t$ secondo una costante α e che il numero degli individui morti nello stesso intervallo di tempo sia proporzionale a $N(t)\cdot\Delta t$ secondo una costante β possiamo scrivere, ponendo $a=\alpha-\beta$,

$$N(t+\Delta t)-N(t)=a\cdot N(t)\cdot\Delta t \quad\Rightarrow\quad \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=a\cdot N(t) \quad\overset{\Delta t\to 0}{\Rightarrow}\quad N'(t)=a\cdot N(t)$$

Abbiamo quindi ottenuto un'equazione differenziale in cui la funzione da determinare è N(t) (funzione del tempo) e per quello che abbiamo visto avremo quindi che

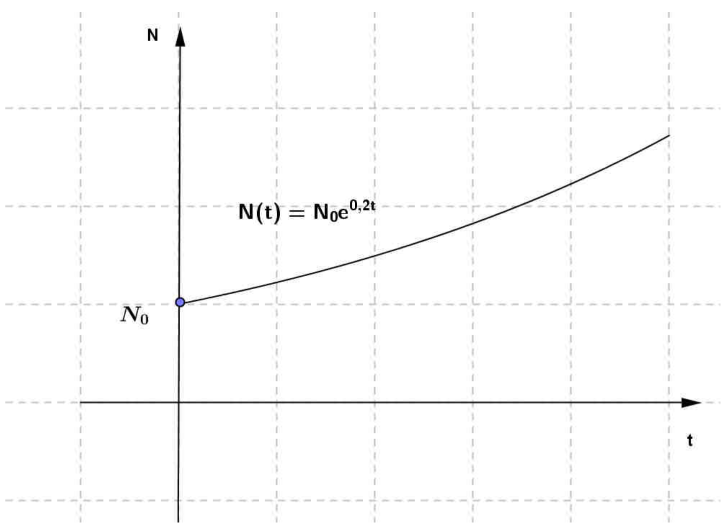
$$N(t)=k\cdot e^{at}$$

cioè la crescita (nel caso che $\alpha>\beta$ e quindi $a>0$) o la decrescita (se $\alpha<\beta$ e quindi $a<0$) della popolazione sarà di tipo "esponenziale".

Se conosciamo una condizione "iniziale", per esempio il numero degli individui della popolazione al tempo t=0 (inizio dell'osservazione), possiamo ricavare la costante k: se per esempio $N(0)=N_0$ avremo $k=N_0$ e quindi

$$N(t)=N_0\cdot e^{at}$$

Se per esempio consideriamo $a=0,2$ abbiamo un grafico del tipo seguente($t\geq 0$):



Nota

Questo modello di sviluppo di una popolazione non tiene conto del fatto che il numero degli individui della popolazione dipende anche da vincoli esterni quali il cibo fornito dall'ambiente (e che generalmente non è illimitato). Questi fattori esterni frenano quindi la crescita.

Si può dimostrare che l'equazione differenziale che riflette una crescita più realistica è

$$(*)\ N'(t) = a \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{b}\right)$$

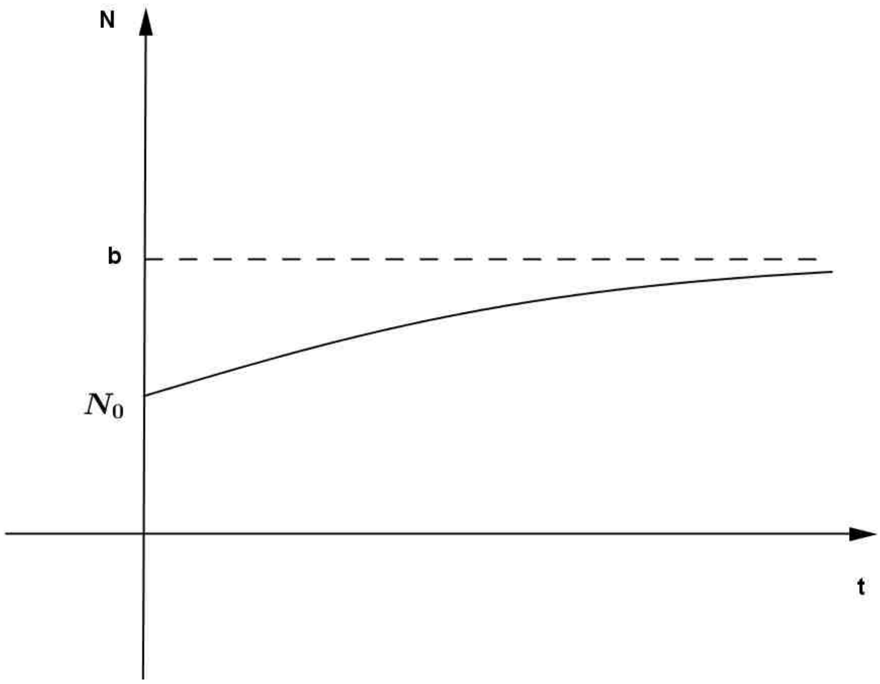
in cui b rappresenta la "capacità" dell'ambiente.

Infatti se $N(t)$ è piccolo $1 - \frac{N(t)}{b} \approx 1$ e la crescita è inizialmente simile a quella esponenziale, ma quando $N(t) \to b \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{N(t)}{b} \to 0 \quad \Rightarrow \quad N'(t) \to 0$ cioè la crescita si arresta.

E' piuttosto difficile arrivare alla soluzione di questa equazione differenziale, ma possiamo "verificare" che la soluzione è la seguente:

$$N(t) = \frac{b}{1 + k \cdot e^{-at}}$$

e l'andamento sarà :



Problema 2

Consideriamo un paracadutista in caduta libera (prima che apra il paracadute): su di esso agisce la forza peso *mg* (*m* la massa del paracadutista e dell'attrezzatura) ma anche una forza dovuta alla resistenza dell'aria, opposta alla forza peso e direttamente proporzionale alla velocità.

Poiché $F_R = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad mg - k_a \cdot v = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad mg - k_a \cdot v = m \cdot v'$

Abbiamo quindi trovato un'equazione differenziale in cui la funzione da determinare è la velocità in funzione del tempo *v(t)*.

Possiamo risolverla "separando" le variabili:

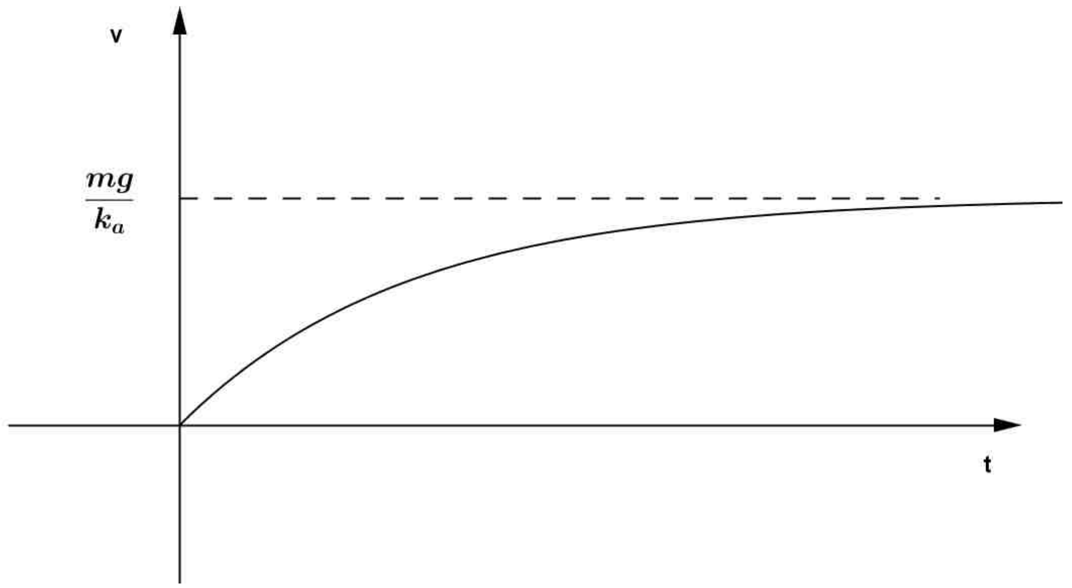
$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - k_a v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{g - \frac{k_a}{m} v} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{g - \frac{k_a}{m} v} = \int dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{k} \ln\left| g - \frac{k_a}{m} v \right| = t + c$$

Dopo alcuni passaggi otteniamo:

$$v(t) = \frac{mg}{k_a} + c \cdot e^{-\frac{k_a}{m}t}, \quad c \in \Re$$

Se poniamo che $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{mg}{k_a} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{k_a}\left(1 - e^{-\frac{k_a}{m}t}\right)$.

L'andamento della velocità è il seguente



Quando $t \to \infty \qquad v \to \frac{mg}{k_a}$ (velocità limite)

Problema 3

Consideriamo un corpo di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k (e massa trascurabile) che oscilla senza attrito su un piano orizzontale per effetto della forza elastica

$$\vec{F} = -k\,\vec{x}$$

dove *x(t)* indica la posizione del corpo all'istante t rispetto ad un sistema di riferimento lungo la direzione del moto.

Poiché $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ e $a(t) = x''(t)$ abbiamo l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$x''(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t) \quad \rightarrow \quad x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Consideriamo l'equazione caratteristica $z^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$

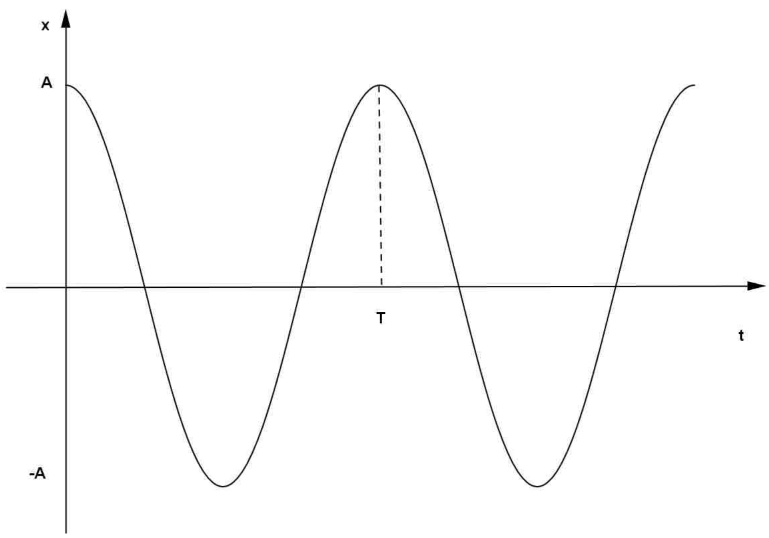
Quindi, ponendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, avremo che la soluzione generale dell'equazione è:

$$x(t) = c_1 \cdot \cos \omega t + c_2 \cdot sen\omega t$$

Nota: osserviamo che la soluzione $x(t) = c_1 \cdot \cos \omega t + c_2 \cdot sen\omega t$ è equivalente a $x(t) = k \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ equazione del moto armonico di un punto materiale.

Se conosciamo le condizioni "iniziali", per esempio se $x(0) = A$ e $x'(0) = 0$ (il corpo all'istante iniziale si trova alla massima distanza dal centro di oscillazione ed ha velocità nulla) , otteniamo: $c_1 = A, \quad c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = A \cdot \cos \omega t$

Abbiamo quindi un moto armonico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e ampiezza A come in figura:



Problema 4

Se il corpo dell'esempio precedente è soggetto anche ad una forza di attrito viscoso proporzionale, secondo una costante h , alla velocità $v(t) = x'(t)$ del corpo allora abbiamo la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) - h \cdot x'(t) \qquad \rightarrow \qquad x''(t) + \frac{h}{m} \cdot x'(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

Se per esempio

$$m = 1Kg \,, \quad k = 5\frac{N}{m}, \quad h = 2\frac{kg}{s}$$

abbiamo $x''(t) + 2 \cdot x'(t) + 5 \cdot x(t) = 0$

Se risolviamo l'equazione caratteristica associata $z^2 + 2z + 5 = 0$ troviamo:

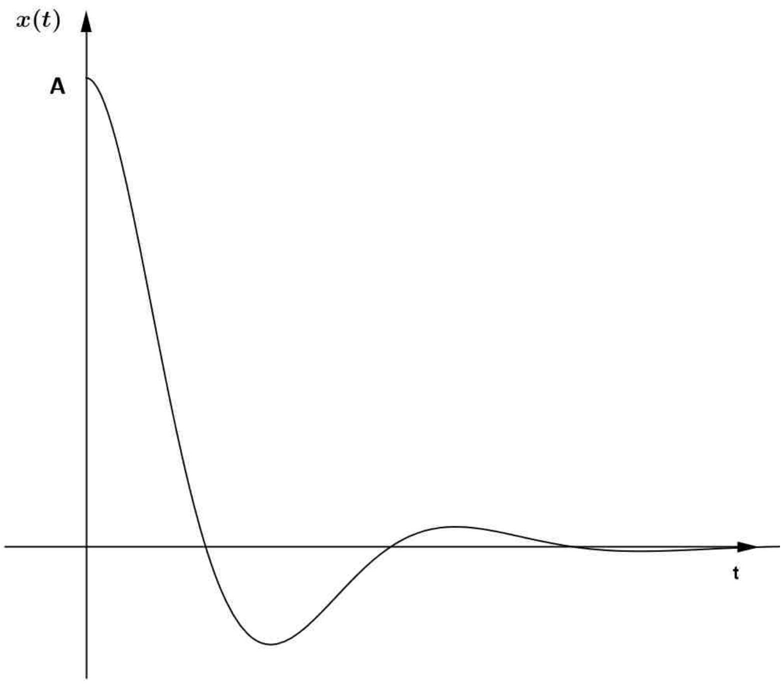
$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

Quindi la soluzione generale sarà: $x(t) = e^{-t} \cdot \left(c_1 \cdot \cos 2t + c_2 \cdot sen 2t\right)$

Se le condizioni iniziali sono $x(0) = A, \quad x'(0) = 0$ si trova

$c_1 = A, \quad c_2 = \dfrac{A}{2}$ e quindi $x(t) = A \cdot e^{-t}\left(\cos 2t + 0{,}5 sen 2t\right)$

che risulta avere un andamento come quello in figura (moto armonico smorzato).



ESERCIZI
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. $y' = x^2 + x$ $\quad [y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c]$

2. $y' - 2x + senx = 0$ $\quad [y = x^2 + \cos x + c]$

3. $tgx + y' = 0$ $\quad [y = \ln|\cos x| + c]$

4. $\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\quad [y = 2 \cdot e^{3x}]$

5. $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad [y = e^{2x}]$

6. $\begin{cases} y' = x \cdot y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad [y = e^{\frac{x^2}{2}}]$

7. $\begin{cases} y' = x^2 \cdot y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\quad [y = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}}]$

8. $y' = \frac{3y}{x}$ $\quad [y = k \cdot x^3]$

9. $\begin{cases} y' = 3x - y \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\quad [y = 3 \cdot (x - 1) + e^{1-x}]$

10. $\begin{cases} y' = 1 - \frac{y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $\quad [y = \frac{x^2 - 1}{2x}]$

11. $y' = y + 6$ $\quad [y = c \cdot e^x - 6]$

12. $y' = 3y + 9$ $\quad [y = c \cdot e^{3x} - 3]$

13. $y' = 2xy + x$ $\quad [y = c \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}]$

14. $y' = \frac{2x - y}{x}$ $\quad [y = \frac{c}{x} + x]$

15. $y' = e^x + y$ $\quad [y = (c + x) \cdot e^x]$

16. $y' - e^{3x} = 2y$ $\quad [y = e^{3x} + c \cdot e^{2x}]$

17. $y' = senx \cdot (1 - y)$ $\quad [y = 1 - c \cdot e^{\cos x}]$

18. $y' = \frac{x^3}{y}$ $\quad [y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + c}]$

19. $y' = -y^2 \cdot senx$ $\quad [y = -\frac{1}{\cos x + c} \cup y = 0]$

20. $y' = \frac{y^2}{x^2 + 1}$ $\quad [y = \frac{1}{c - arctgx} \cup y = 0]$

21. $y' = e^{x+y}$ $\quad [y = -\log(c - e^x)]$

22. $y'' + 5y' - 6y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-6x}]$

23. $y'' + 2y' - 3y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-3x}]$

24. $y'' + 2y' = 0$ $\quad [y = c_1 + c_2 \cdot e^{-2x}]$

25. $y'' - 9y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-3x}]$

26. $y'' + 8y' + 16y = 0$ $\quad [y = e^{-4x} \cdot (c_1 + c_2 x)]$

27. $y'' - 6y' + 9y = 0$ $\quad [y = e^{3x} \cdot (c_1 + c_2 x)]$

28. $y'' + 4y' + 5y = 0$ $\quad [y = e^{-2x} \cdot (c_1 \cos x + c_2 senx)]$

29. $y'' + 2y' + 10y = 0$ $\quad [y = e^{-x} \cdot (c_1 \cos 3x + c_2 sen3x)]$

30. $\{y'' - 6y' + 5y = 0$ $\quad [y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{5x}]$

PROBLEMI
EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Una colonia di batteri cresce proporzionalmente al numero di batteri presenti nella colonia secondo una costante $k = 0{,}2/h$ (h sta per ora).

   Misurando il tempo t in ore e indicando con N(t) il numero di batteri presenti al tempo t, determina N(t) supponendo che al tempo t=0 nella colonia ci siano 100 batteri.
   Disegna il grafico di N(t).

   Dopo quanto tempo il numero dei batteri è raddoppiato?

   $$[N(t) = 100 \cdot e^{0,2 \cdot t}, \quad t \cong 3{,}5\,h]$$

2. La velocità di raffreddamento di un corpo è direttamente proporzionale, secondo una costante k, alla differenza di temperatura tra la temperatura dell'ambiente (supposta costante) e la temperatura del corpo T(t) al tempo t.

   Se supponiamo che $k = 0{,}5/h$ (h sta per ora) , la temperatura dell'ambiente 20°C, la temperatura iniziale del corpo 50°C, determina la temperatura T(t) del corpo (il tempo t misurato in ore) e disegnane l'andamento.

   $$[T(t) = 20 + 30 \cdot e^{-0,5 \cdot t}]$$

3. Il carbonio 14 (simbolo C^{14}) è presente in tutte le sostanze organiche ma decade, cioè si trasforma in un altro elemento, quando l'organismo muore.

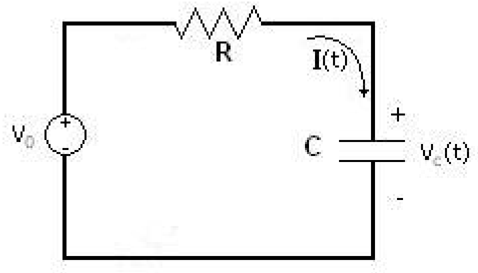
   La variazione del numero degli atomi di C^{14} è direttamente proporzionale al numero N(t) di atomi presenti al tempo t : se indichiamo con α la costante di proporzionalità possiamo quindi dire che $N'(t) = -\alpha \cdot N(t)$.
   Indicando con N_0 il numero degli atomi di C^{14} presenti al tempo t=0 in cui l'organismo è morto, determina N(t) e tracciane un grafico indicativo.

   Se si indica con t_d il "tempo di dimezzamento" cioè il tempo impiegato dal C^{14} (come da qualsiasi altra sostanza radioattiva) a dimezzarsi, trova la relazione tra α e t_d.
   (Il tempo di dimezzamento per il C^{14} è di circa 5730 anni).

   Nota: misurando la quantità di C^{14} ancora presente in un fossile si può datare il fossile, cioè determinare quanto tempo è passato dalla morte dell'organismo.

   $$[N(t) = N_0 \cdot e^{-\alpha t}, \quad t_d = \frac{\ln 2}{\alpha}]$$

4. Considera un circuito in cui è inserito un generatore di f.e.m. costante $\Delta V = V_0$, una resistenza R e un condensatore di capacità C (vedi figura).



Alla chiusura dell'interruttore il generatore carica il condensatore: indica con q(t) la quantità di carica presente sulle armature del condensatore all'istante t ponendo t=0 l'istante di chiusura dell'interruttore (quindi q(0)=0) e con $q'((t) = i(t)$ la corrente che circola nel circuito.

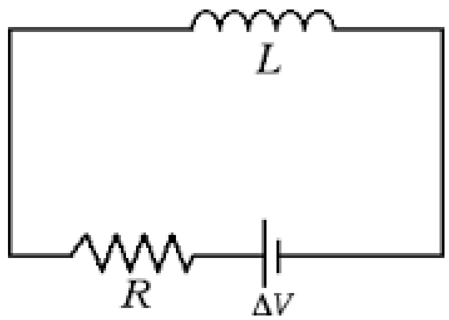
Poiché quando sulle armature c'è una carica q(t) tra le armature c'è una d.d.p. $V_C(t) = \dfrac{q(t)}{C}$ si ha:

$$V_0 = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Scrivi l'equazione differenziale corrispondente e determina q(t). Traccia il grafico di q(t).

$$[q(t) = V_0 \cdot C \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})]$$

5. Considera un circuito in cui è inserito un generatore di f.e.m. costante $\Delta V = V_0$, una bobina di resistenza R e induttanza L (vedi figura).



Alla chiusura dell'interruttore inizia a circolare corrente e si sviluppa nell'induttanza una f.e.m. autoindotta $L \cdot \dfrac{di}{dt}$. Quindi abbiamo:

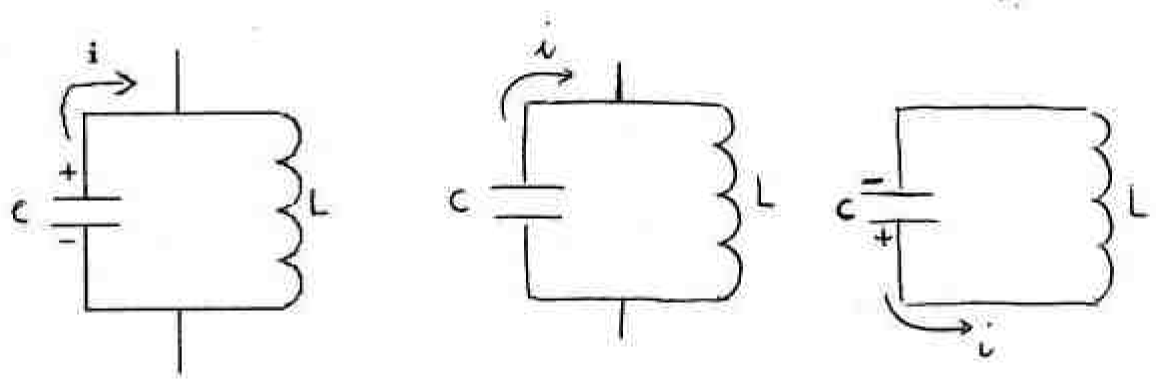
$$V_0 = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Risolvi l'equazione differenziale e ricava i(t) con la condizione iniziale che i(0)=0.
Traccia il grafico di i(t).

$$[i(t) = \frac{V_0}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t})]$$

6. Considera un circuito con una bobina di induttanza L (resistenza trascurabile) e un condensatore inizialmente carico di capacità C.

   Alla chiusura dell'interruttore il condensatore si scarica ma per il fenomeno dell'autoinduzione dovuto alla presenza dell'induttanza la corrente continua a circolare ricaricando di segno opposto le piastre del condensatore e il processo di scarica riprende ma con una corrente di verso opposto (si parla di circuito "oscillante" ed è analogo al sistema massa-molla).



S

Se indichiamo con q(t) la carica presente al tempo t sulle armature del condensatore avremo:

$$\frac{q(t)}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

Risolvi l'equazione differenziale corrispondente considerando come condizioni $q(0) = Q_0$ e $i(0) = q'(0) = 0$ e determina q(t).

Traccia il grafico corrispondente.

Come risulta la corrente che circola nel circuito? Qual è la sua frequenza?

Cosa accade se la resistenza non è trascurabile?

$$[q(t) = Q_0 \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t, \quad i(t) = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \cdot sen\frac{1}{\sqrt{LC}}t, \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}]$$