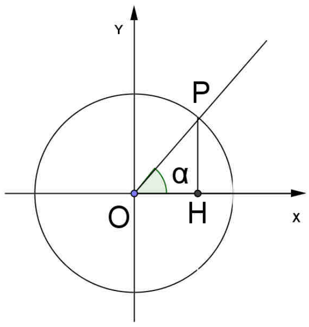
Complementi di trigonometria

Breve storia delle funzioni goniometriche

Lo studio della trigonometria nasce con gli **astronomi della scuola di Alessandria di Egitto** ed infatti la prima ad essere sviluppata fu la trigonometria sferica cioè lo studio dei triangoli sferici (tracciati sulla superficie di una sfera e i cui lati sono archi di cerchio).

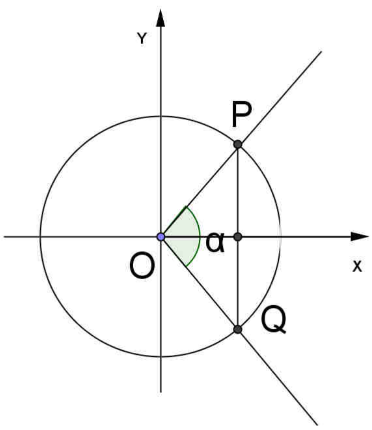
Il fondatore della trigonometria è considerato **Ipparco da Rodi** (II sec a.C.) che visse ad Alessandria ma la maggior parte delle notizie sui metodi trigonometrici alessandrini ci vengono dal massimo astronomo dell'antichità, **Tolomeo** (II sec d.C.) che scrisse "Composizione matematica" mutata poi in "Grande Composizione" e chiamata infine *Almagesto* (nome arabo che deriva dal greco $\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\eta$, il massimo) in cui pose le basi della teoria astronomica.

La differenza fondamentale tra la trigonometria antica e quella moderna è che al posto della definizione



$$sen\alpha = y_P$$

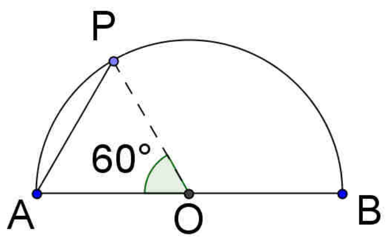
la trigonometria alessandrina usava questa definizione



$c(\alpha) = \overline{PQ}$ (**corda sottesa dall'angolo α**)

(praticamente $\overline{PQ} = 2\ sen\dfrac{\alpha}{2}$)

Seguendo la tradizione babilonese, gli alessandrini dividevano la semicirconferenza in 180 parti uguali, i gradi, e il suo diametro in 120 e così per esempio la corda di un angolo di 60° è 60.



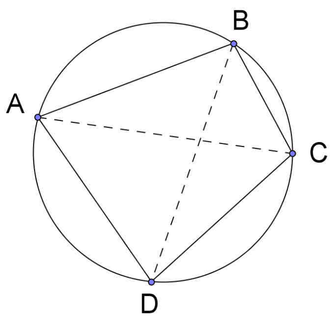
$\overline{AB} = 120$

$c(60°) = \overline{AP} = 60$ $\qquad (\overline{AP} = \overline{AO} = \overline{OP})$

E' chiaro che così facendo l'unità di misura degli archi è diversa dall'unità di misura delle corde perché se $\overline{AB} = 120$ dovremmo avere $\overset{\frown}{AB} = \pi \cdot 60$ e quindi avremo la stessa unità di misura solo se consideriamo $\pi = 3$.

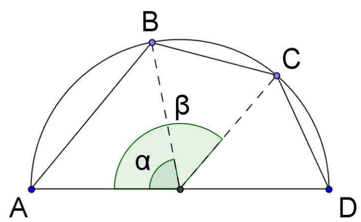
Nel primo libro dell'Almagesto di Tolomeo troviamo una "tavola delle corde" che procede di mezzo grado in mezzo grado da 1° a 180°. Per ottenerla Tolomeo ricavò il cosiddetto "teorema di Tolomeo"* da cui dedusse la relazione per trovare la corda dell'angolo differenza $\alpha - \beta$ e la corda dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$: in questo modo dalla corda di 60° e 72° trova per differenza la corda di 12° e poi, per successivi dimezzamenti c(6°), c(3°), c($1°30'$) e poi ottiene un'approssimazione della corda di 1°.

***Teorema di Tolomeo**: in un quadrilatero iscritto in un cerchio il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.



$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

Se applichiamo questo teorema quando AD è un diametro abbiamo che (ponendo $\overset{\frown}{AB} = \alpha$ e $\overset{\frown}{AC} = \beta$)

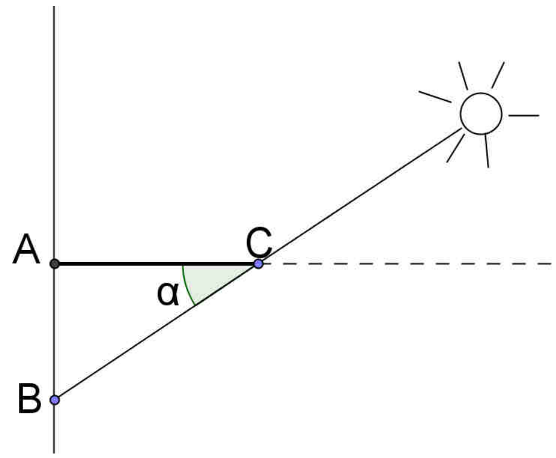


$$c(\beta) \cdot c(180 - \alpha) = c(\alpha) \cdot c(180 - \beta) + 120 \cdot c(\beta - \alpha)$$

da cui si ricava $c(\beta - \alpha)$

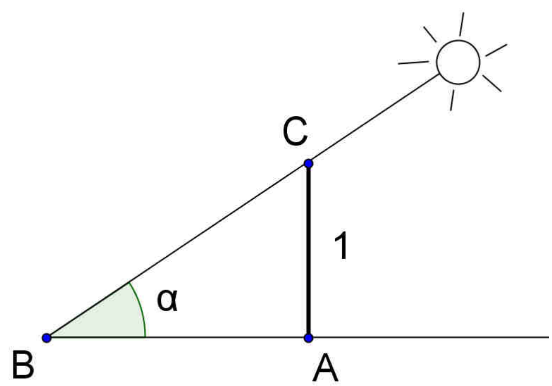
Il **seno come lo definiamo attualmente** fu introdotto in **India** e furono calcolati i seni degli angoli (tavola dei seni) intorno al V sec. d.C.

Inoltre gli astronomi indiani introdussero anche il **coseno** definito come seno dell'angolo complementare e la **tangente** definita come l'ombra che un'asta infissa perpendicolarmente su un muro verticale (gnomone) e di lunghezza 1, proietta sul muro per una data altezza del sole sull'orizzonte (angolo α) (si tradusse in latino con "umbra versa"*). Il termine tangente fu introdotto solo nel 1600.



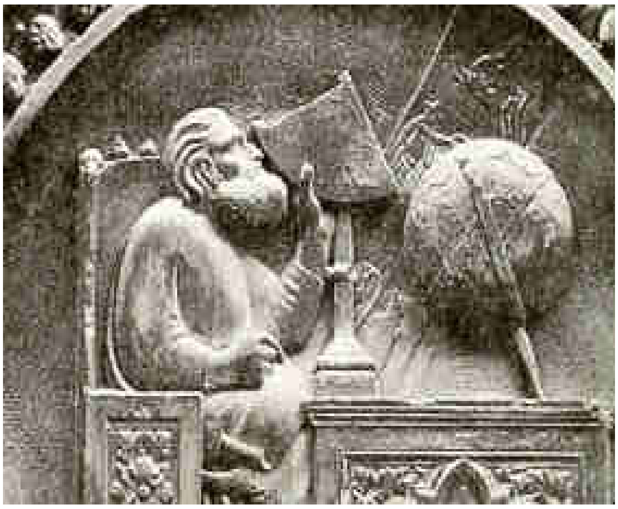
$$\overline{AC} = 1$$
$$\overline{AB} = tg\alpha$$

* La cotangente (tangente dell'angolo complementare) era definita come l'ombra proiettata da un orologio orizzontale ("umbra recta")



$$\overline{AB} = \text{cotg}\,\alpha$$

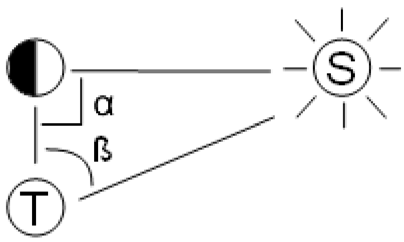
Trigonometria e astronomia



Confronto tra la distanza Terra-Sole e la distanza Terra-Luna

E' stato l'astronomo greco Aristarco a studiare questo problema: nell'unica sua opera a noi pervenuta, cioè il breve trattato *Sulle dimensioni e distanze del Sole e della Luna*, ha cercato di misurare il rapporto tra la distanza Terra-Luna e la distanza Terra-Sole.

Quando la luna è in quadratura, ossia è illuminata per metà, essa, con la Terra e il Sole, forma il triangolo rettangolo mostrato in figura ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). Misurando in tale condizione l'angolo β compreso tra la direzione Terra-Luna e la direzione Terra-Sole è possibile calcolare il rapporto tra il cateto e l'ipotenusa di un triangolo simile.



Terra, Luna e Sole durante una quadratura

Aristarco stimò l'angolo $\beta = 87°$ (di conseguenza $L\hat{S}T = 3°$) e stimò il rapporto tra la distanza Terra-Luna e Terra-Sole (il nostro sen3°) come compreso tra $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{18}$: quindi il Sole risultava circa 20 volte più lontano della Luna rispetto alla Terra.

In realtà l'angolo $\beta = 89°50'$ e quindi la distanza Terra-Sole è circa 400 volte la distanza Terra-Luna, ma il metodo di Aristarco è comunque uno dei primi esempi di un metodo trigonometrico applicato per la risoluzione di un problema astronomico.

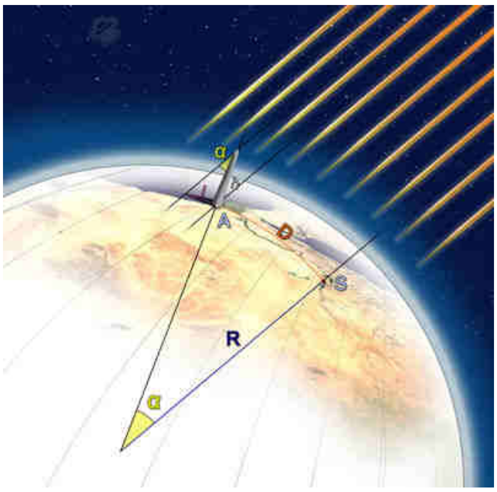
La misura del raggio terrestre

Il matematico, geografo ed astronomo Eratostene (III secolo a.C.), era direttore della grande biblioteca di Alessandria d'Egitto quando formulò il metodo per calcolare le dimensioni della Terra. Dai suoi studi, era venuto a conoscenza del fatto che a Syene (l'attuale Assuan), a mezzogiorno del solstizio d'estate, il Sole si trovava proprio sullo zenit, tanto che il fondo di un pozzo profondo ne veniva illuminato, perciò un bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante non avrebbe proiettato alcuna ombra in terra. Invece ad Alessandria questo non succedeva mai, gli obelischi proiettavano comunque la loro ombra sul terreno.

Eratostene perciò, per procedere con i suoi calcoli, ipotizzò la Terra perfettamente sferica ed il Sole sufficientemente distante da considerare paralleli i raggi che la investono. Inoltre assunse che Alessandria e Syene si trovassero sullo stesso meridiano.

Durante il solstizio d'estate calcolò l'angolo di elevazione del Sole ad Alessandria, misurando l'ombra proiettata proprio da un bastone piantato in terra, ricavando approssimativamente un valore di 1/50 di circonferenza (cioè 7° 12'). La distanza tra le due città, basata sui trasferimenti delle carovane, era stimata in 5.000 *stadia* (circa 800 km, tuttavia il valore preciso dello *stadium*, usato a quell'epoca ad Alessandria, non è attualmente conosciuto).

Perciò la circonferenza della Terra doveva essere di 50 * 5.000 = 250.000 *stadia* (circa 40.000 km, valore straordinariamente vicino a quello ottenuto con metodi moderni: 40.075km).



Una volta stabilito un valore per essa, il raggio terrestre si ricavava dalla nota relazione che lega la circonferenza ed il suo raggio. Indicando con:

- h :lunghezza del palo
- l :lunghezza dell'ombra proiettata dal palo sul terreno
- α :angolo di elevazione del Sole

dalla misura di h e l Eratostene ricavò α e poiché

$$\frac{D}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360^o}$$

dove

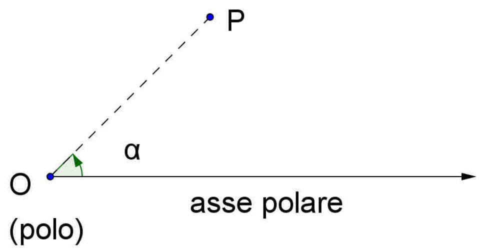
- D : distanza tra Alessandria (punto A) e Syene (punto S), situate sullo stesso meridiano
- R : raggio della Terra, per ipotesi una sfera perfetta

si può ottenere R.

I valori ricavati da Eratostene furono: circa 12629 km per il diametro terrestre ovvero un raggio pari a 6314,5 km (incredibilmente prossimo alla stima media condotta con mezzi attuali).

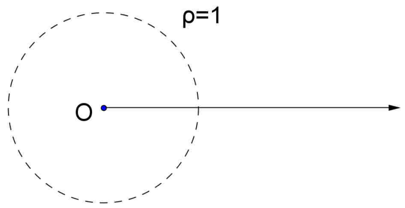
Coordinate polari

Se nel piano fissiamo una semiretta di origine O (orientata) possiamo individuare la posizione di un qualsiasi punto P indicando la sua distanza da O e l'angolo α formato tra la semiretta fissata e la semiretta OP.

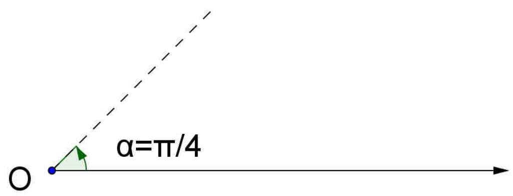


$$\overline{OP} = \rho$$
$$P(\rho, \alpha)$$
$$O \leq \alpha < 2\pi \quad \text{(angolo orientato)}$$

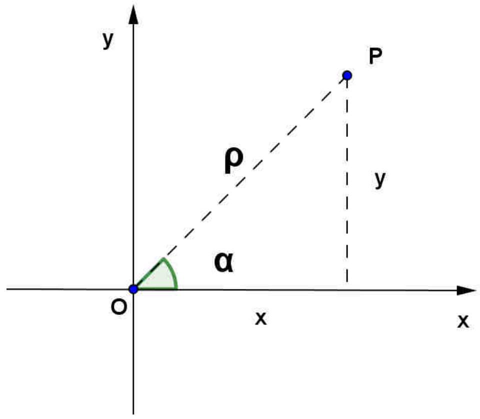
La semiretta si chiama asse polare, O si dice polo e si parla di sistema di riferimento polare.
(ρ, α) si dicono le coordinate polari di P: ρ si chiama modulo e α si chiama argomento.
Se scriviamo $\rho = 1$ questa risulta, in coordinate polari, l'equazione della circonferenza di centro il polo O e raggio $r = 1$ poiché tutti i suoi punti hanno distanza $\rho = 1$.



Se scriviamo $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ avremo la semiretta in figura:



Nota
Possiamo passare da coordinate polari a coordinate cartesiane osservando:



$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\alpha \\ y = \rho \cdot sen\alpha \end{cases}$$