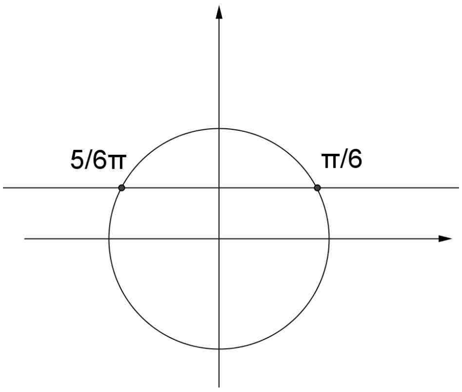
Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari

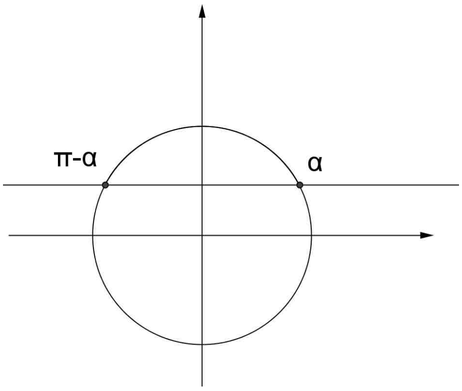
a) Consideriamo per esempio l' equazione "elementare" $senx = \frac{1}{2}$.



Le soluzioni saranno:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $senx = k$ con $-1 < k < 1$ avremo:

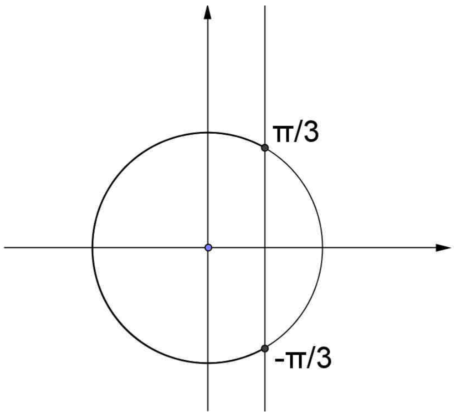


$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Se considero $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

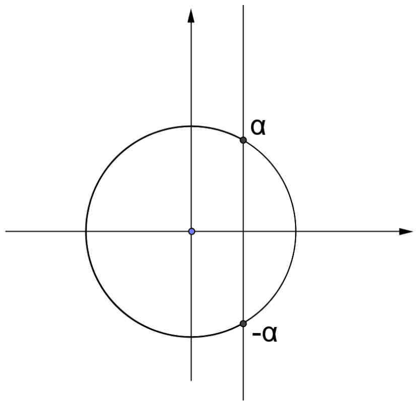
$$senx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

b) Consideriamo l'equazione elementare $\cos x = \frac{1}{2}$.



$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

In generale se abbiamo $\cos x = k$ con $-1 < k < 1$ avremo come soluzioni

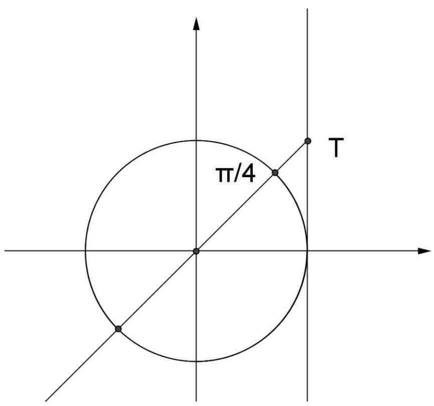


$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = -\alpha + 2k\pi$$

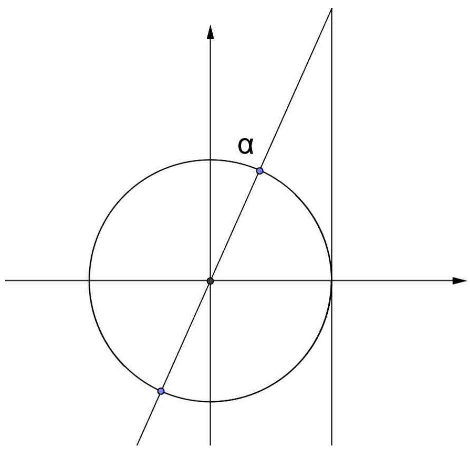
Se $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

c) Consideriamo l'equazione elementare $tgx = 1$.



$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$



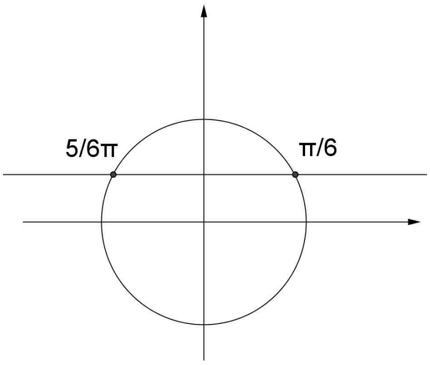
In generale quindi $tgx = k \Rightarrow x = \alpha + k\pi$

Equazioni goniometriche “riconducibili” ad equazioni elementari

1) Vediamo i seguenti esempi:

a) $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

In questo caso non conviene sviluppare con la formula di sottrazione! Consideriamo $x-\frac{\pi}{4}$ come un unico angolo. Per quello che abbiamo già visto:

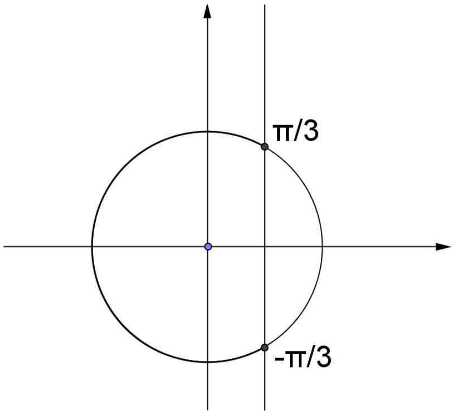


$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5}{12}\pi+2k\pi$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}\pi+2k\pi=\frac{13}{12}\pi+2k\pi$$

b) $\cos(2x)=\frac{1}{2}$

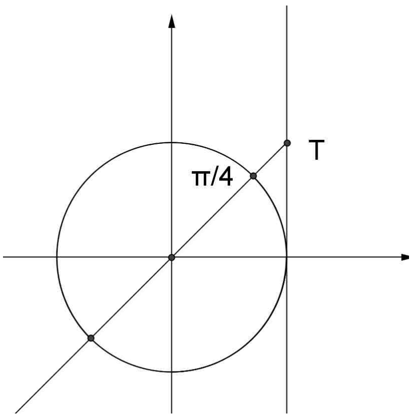
Anche in questo caso non conviene sviluppare con la formula di duplicazione ma considerare $2x$ come un unico angolo e per quello che abbiamo già visto avremo:



$$2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

c) $tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$



Considerando $3x-\frac{\pi}{6}$ come un angolo avremo:

$$3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow 3x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k\pi$$

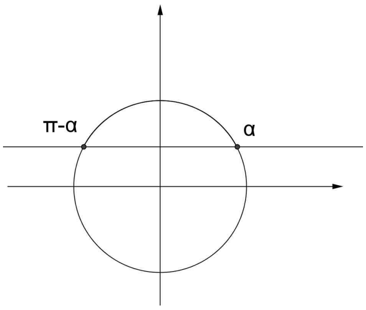
$$3x=\frac{5}{12}+k\pi$$

$$x=\frac{5}{36}\pi+k\frac{\pi}{3}$$

2) Consideriamo i seguenti esempi:

a) $sen \cdot 2x = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso seno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure se sono supplementari. Quindi:



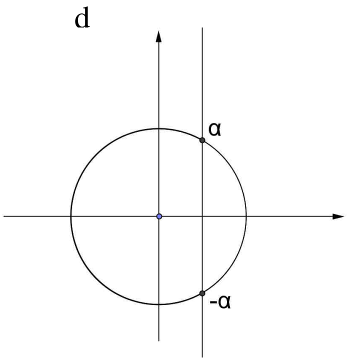
$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

b) $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli hanno lo stesso coseno se sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica oppure sono opposti. Quindi:

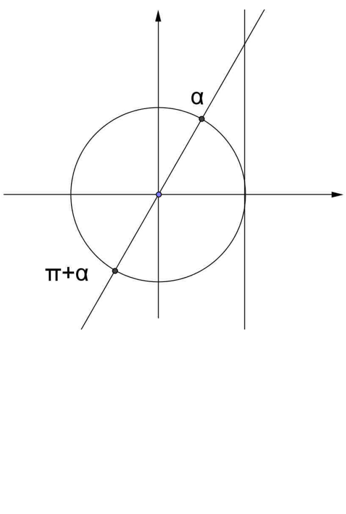


$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \to x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \to 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \to x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

c) $tg\, 2x = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2 angoli (diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi$) hanno la stessa tangente quando sono associati allo stesso punto della circonferenza goniometrica o differiscono di π, quindi potremo semplicemente scrivere:



$$2x = x - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

3) Vediamo infine i seguenti esempi:

a) $\boxed{sen^2 x + senx - 2 = 0}$

Consideriamola come un'equazione di 2° grado e ricaviamo:

$$senx_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow senx_1 = 1 \cup senx_2 = -2$$

Quindi $senx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$senx = -2$ nessuna soluzione

b) $\boxed{2\cos^2 x + \cos x = 0}$

Possiamo semplicemente mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (2\cos x + 1) = 0$$

e quindi avremo:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

c) $\boxed{tg^2 x + tgx = 0}$

$$tgx(tgx + 1) = 0$$

$$tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

d) $\boxed{\cos^2 x + senx = 0}$

In questo caso dobbiamo utilizzare la prima relazione fondamentale e sostituire $1 - sen^2 x$ a $\cos^2 x$.

$$1 - sen^2 x + senx = 0$$
$$sen^2 x - senx - 1 = 0$$
$$senx_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$senx = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ nessuna soluzione

$senx = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ utilizzando la calcolatrice abbiamo

$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

con $\alpha \cong -38°$

e) $\boxed{sen2x + \cos x = 0}$

In questo caso gli argomenti del seno e del coseno sono diversi: possiamo riportarci all'angolo x utilizzando la formula di duplicazione.

$$2senx \cdot \cos x + \cos x = 0$$
$$\cos x \cdot (2senx + 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$senx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi \\ x = \dfrac{11}{6}\pi + 2k\pi \end{matrix}$$

f) $\boxed{sen^2 \frac{x}{2} + \cos x = 0}$

Utilizzando la formula di bisezione avremo:

$$\frac{1-\cos x}{2} + \cos x = 0$$
$$1 - \cos x + 2\cos x = 0$$
$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

Equazioni goniometriche di primo grado in seno e coseno

Consideriamo la seguente equazione:

$$\boxed{senx - \cos x - 1 = 0}$$

Per determinare x cerchiamo il punto P associato all'angolo x sulla circonferenza goniometrica. Ricordando che

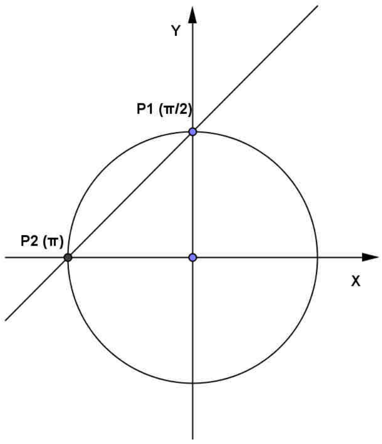
$$senx = y_P$$
$$\cos x = x_P$$

Risolvere l'equazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_P - x_P - 1 = 0 \rightarrow y_P = x_P + 1 \\ {x_P}^2 + {y_P}^2 = 1 \end{cases}$$

Per non confondere x (angolo) con x_P (ascissa del punto P) possiamo indicare x_P con X e y_P con Y. Quindi abbiamo l'intersezione tra una retta e la circonferenza goniometrica:

$$\begin{cases} Y = X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Troviamo $P_1(0;1) \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$P_2(-1;0) \rightarrow x = \pi + 2k\pi$

Osservazione: non sempre occorre utilizzare questo "metodo grafico".

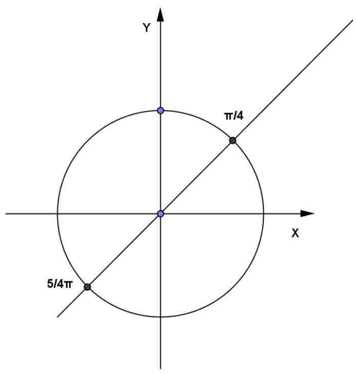
Esempio: $\boxed{senx - \cos x = 0}$

Possiamo dividere per $\cos x$ (possiamo supporre $\cos x \neq 0$ perché le soluzioni di $\cos x = 0$,cioè $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, non sono soluzioni dell'equazione) e otteniamo:

$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Con il metodo grafico avremmo ottenuto lo stesso risultato:

$$\begin{cases} Y - X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$



Equazioni goniometriche di secondo grado in seno e coseno

Esempio 1: $\boxed{senx \cdot \cos x + \cos^2 x = 0}$

Basta mettere in evidenza:

$$\cos x \cdot (senx + \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$senx + \cos x = 0 \Rightarrow tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 2: $\boxed{sen^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right) senx \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0}$

Proviamo a dividere per $\cos^2 x$ ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non è soluzione dell'equazione):

$$tg^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right) tgx - \sqrt{3} = 0$$

$$tgx_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2}$$

$$tgx = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Esempio 3: $\boxed{\left(3 + \sqrt{3}\right) sen^2 x + 2\cos^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) senx \cdot \cos x = 3}$

Possiamo moltiplicare il termine noto per $sen^2 x + \cos^2 x$ poiché $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ e avremo:

$$\left(3 + \sqrt{3}\right) sen^2 x + 2\cos^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) senx \cdot \cos x = 3 \cdot \left(sen^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$\sqrt{3} sen^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) senx \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

Dividendo per $\cos^2 x$:

$$\sqrt{3} tg^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right) tgx - 1 = 0$$

$$tgx_{1,2} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2\sqrt{3}}$$

$$tgx = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$tgx = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

ESERCIZI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche elementari:

a) $senx = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tgx = \sqrt{3}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

f) $senx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi\right]$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7}{12}\pi + k\pi\right]$

c) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ $\left[x = \frac{\pi}{12} + k\pi\right]$

d) $sen \cdot 2x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

e) $\cos \cdot 3x = -1$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

f) $tg \cdot 4x = -\sqrt{3}$ $\left[x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}\right]$

3) Ricordando le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli associati, risolvi le seguenti equazioni:

a) $sen \cdot 2x = senx$ $\left[x = 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right]$

b) $\cos \cdot 3x = \cos 2x$ $\left[x = 2k\pi; x = \frac{2}{5}k\pi\right]$

c) $tg \cdot 3x = tg\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ $\left[x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}\right]$

4) Risolvi le seguenti equazioni riconducibili ad equazioni elementari:

a) $sen^2 x - senx = 0$ $\quad [\, x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ $\quad [\, x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

c) $\sqrt{3} tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$ $\quad [\, x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$

d) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ $\quad [\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

e) $2sen^2 x + senx = 0$ $\quad [\, x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

f) $2sen^2 x - 3senx + 1 = 0$ $\quad [\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$

g) $tg^2 x + tgx = 0$ $\quad [\, x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$

h) $\sqrt{3} tg^2 x + tgx = 0$ $\quad [\, x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$

i) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ $\quad [\, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

l) $3tg^2 x + 2\sqrt{3} tgx - 3 = 0$ $\quad [\, x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

5) Risolvi le seguenti equazioni:

a) $sen^2 x - \cos^2 x = \cos x$ $\quad [\, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = \pi + 2k\pi]$

b) $2\cos^2 x - senx = 1$ $\quad [\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

c) $tgx \cdot senx = \sqrt{3} senx$ $\quad [\, x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$

d) $senx = tgx$ $\quad [\, x = k\pi]$

e) $2senx \cdot \cos x + 2\cos x = 1 + senx$ $\quad [\, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

f) $sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + sen\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ $\quad [\, x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi]$

g) $tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2 + 3tgx$ $\quad [\, x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi]$

h) $\cos 2x + sen^2 x = 0$ $\quad [\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$

i) $2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$ $\quad [\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$

l) $senx = \cos\frac{x}{2}$ $\quad [\, x = \pi + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi; x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi]$

6) Risolvi le seguenti equazioni lineari:

a) $senx + \cos x = 1$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = 2k\pi]$

b) $senx + \cos x = \sqrt{2}$ $[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$

c) $\cos x + \sqrt{3}senx = \sqrt{3}$ $[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

d) $\sqrt{3}\cos x - senx + \sqrt{3} = 0$ $[x = \pi + 2k\pi; x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

e) $2\cos x + 2senx = \sqrt{3} + 1$ $[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

f) $senx + \cos x = -2$ [impossibile]

7) Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado in seno e coseno:

a) $3sen^2 x - \cos^2 x = 0$ $[x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi]$

b) $sen^2 x - senx \cdot \cos x = 0$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi]$

c) $\sqrt{3}\cos^2 x + \cos x \cdot senx = 0$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi]$

d) $2sen^2 x - \sqrt{3}senx \cdot \cos x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ $[x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi]$

e) $4sen^2 x - \sqrt{3}senx \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$ $[x = k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k\pi]$

f) $2sen^2 x + \sqrt{3}senx \cdot \cos x - \cos^2 x = 2$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi]$

8) Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

a) $2\cos^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}sen^2 x$ $[x = \frac{\pi}{2} + k\pi]$

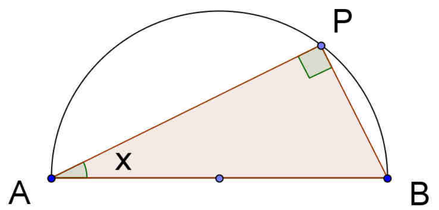
b) $(senx + \cos x)^2 = \cos 2x$ $[x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi]$

c) $tg2x - 3tgx = 0$ $[x = k\pi; x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi]$

Problemi risolubili con equazioni goniometriche

Esempio 1

Consideriamo questo problema: data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, determina su di essa un punto P tale che l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABP}$ risulti uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2} r^2$



Posso individuare il punto P appartenente alla semicirconferenza con l'angolo $x = B\hat{A}P$.

Limiti di x: il valore di x potrà variare da 0 (quando $P \equiv B$) a $\frac{\pi}{2}$ (quando $P \equiv A$).

Poiché il triangolo $\overset{\Delta}{ABP}$ è retto in P avremo:

$$\overline{AP} = 2r \cdot \cos x$$
$$\overline{PB} = 2r \cdot senx$$
$$Area\left(\overset{\Delta}{ABP}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2r\cos x \cdot 2rsenx = 2r^2 senx\cos x$$

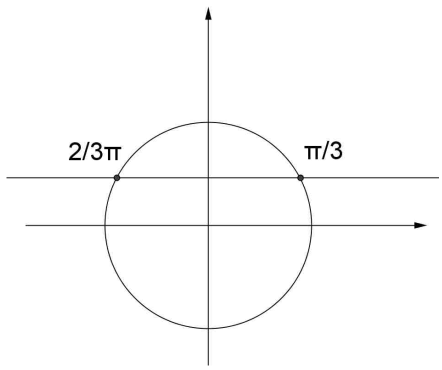
Quindi dovrò risolvere l'equazione

$$2r^2 senx\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

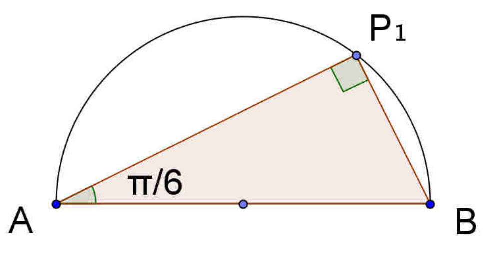
$$sen2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

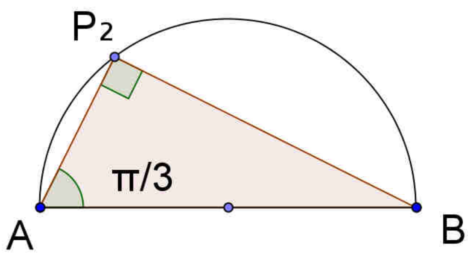
Poiché $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le 2x \le \pi$ e quindi

$$2x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$
$$2x = \frac{2}{3}\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$



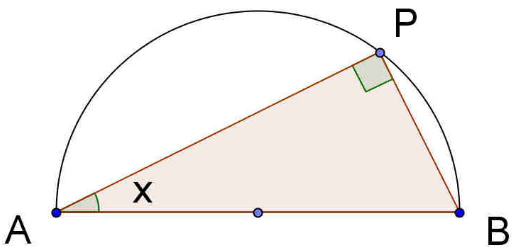
Il problema ha quindi 2 soluzioni, corrispondenti a triangoli uguali.





Esempio 2

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, determina su di essa un punto P tale che $2p\left(\overset{\Delta}{ABP}\right) = 2r\left(1+\sqrt{2}\right)$.



$x = B\hat{A}P$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\overline{AP} = 2r\cos x$

$\overline{BP} = 2rsenx$

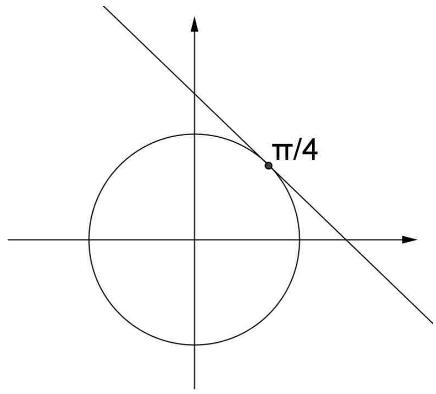
$$2r\cos x + 2rsenx + 2r = 2r\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$2r\cos x + 2rsenx = 2r\sqrt{2}$$

$$\cos x + senx = \sqrt{2}$$

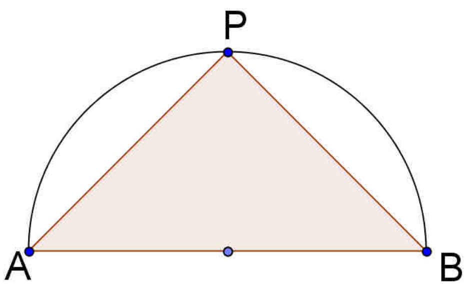
$$\begin{cases} X + Y = \sqrt{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{2} - Y \\ 2 - 2\sqrt{2} + Y^2 + Y^2 = 1 \ldots\ldots \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$



$x = \frac{\pi}{4}$ è l'unica soluzione del problema

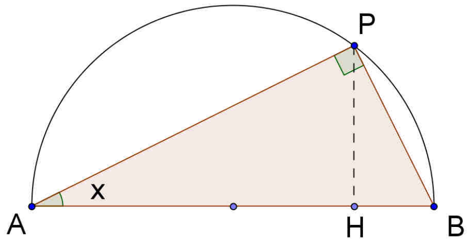
Infatti: $\overline{AP} = \overline{BP} = r\sqrt{2}$ $\quad 2p\left(\overset{\Delta}{ABP}\right) = 2r + 2r\sqrt{2} = 2r\left(1+\sqrt{2}\right)$



Problemi di massimo e minimo

Esempio 1

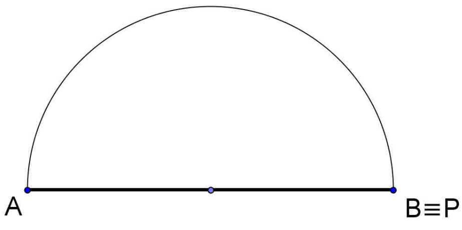
Riprendiamo l'esempio 1 e consideriamolo da un altro punto di vista: *quali valori può assumere l'area del triangolo* $\overset{\Delta}{BAP}$ *?*



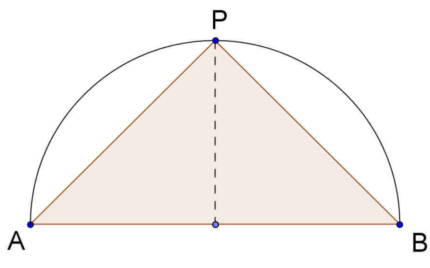
Qual è il valore di x per cui si ottiene l'area massima o l'area minima?

E' chiaro che, dal momento che l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABP}$ può essere calcolata come $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PH}$ essendo la base AB fissa e variando l'altezza PH, l'area massima si avrà quando PH è massima e quindi per $\overline{PH}=r$ cioè quando $x=\frac{\pi}{4}$ e il triangolo è un triangolo rettangolo isoscele e che l'area minima si avrà quando PH è minima cioè $\overline{PH}=0$ e $x=0(P\equiv B) \quad \cup \quad x=\frac{\pi}{2}(P\equiv A)$.

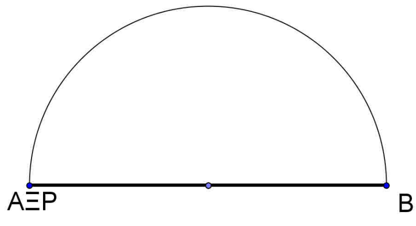
Quindi l'area varia da un minimo di 0 ad un massimo di $\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot r=r^2$.



$area(\overset{\Delta}{ABP})=0$



$area(\overset{\Delta}{ABP})=r^2$

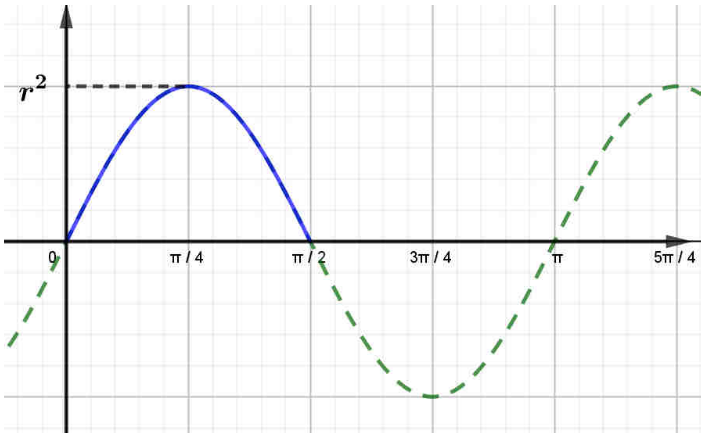


$area(\overset{\Delta}{ABP})=0$

Possiamo anche considerare l'area come una funzione dell'angolo x e scrivere:

$$A(x) = 2r^2 senx\cos x \rightarrow A(x) = r^2 sen2x$$

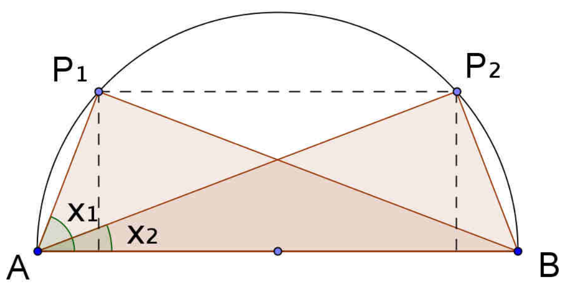
Proviamo a disegnare il grafico di A(x): si tratta di una funzione sinusoidale di ampiezza r^2 e periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Inoltre abbiamo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Il grafico risulta quindi il seguente:



Nota

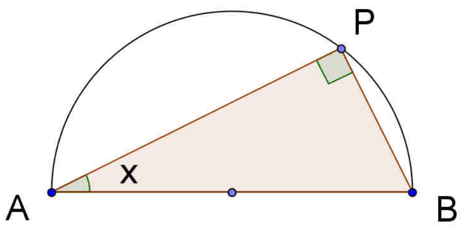
Osservando il grafico ritroviamo che per $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ l'area vale 0 e che per $x = \frac{\pi}{4}$ si ha il massimo valore dell'area (r^2).

Inoltre ci sono sempre 2 triangoli uguali in corrispondenza di un certo valore dell'area (cioè due valori diversi di x che danno lo stesso valore dell'area): infatti, come si può osservare dal la figura, per un dato valore di PH si trovano due punti sulla semicirconferenza.



Esempio 2

Riprendiamo il 2° esempio. Questa volta possiamo chiederci: *quali valori può assumere il perimetro del triangolo ABP ?*



$\overline{AP} = 2r\cos x$

$\overline{PB} = 2rsenx$

$$2p(x) = 2r + 2r\cos x + 2rsenx \rightarrow 2p(x) = 2r(1 + \cos x + senx)$$

Osserviamo che si ha il minimo perimetro di $\overset{\Delta}{ABP}$ quando $P \equiv B(x = 0)$ oppure $P \equiv A\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ perché in questi casi il triangolo degenera in 2 diametri sovrapposti e il perimetro vale *4r*.

Per determinare il massimo perimetro come possiamo disegnare il grafico della funzione *2p(x)?*

Poniamo per semplicità r=1 e consideriamo l'equazione $y = 2 + 2(senx + \cos x)$.

Per disegnare il grafico di questa funzione basterà traslare di 2 verso l'alto il grafico di $y = 2(senx + \cos x)$. *Ma come possiamo disegnare la funzione* $y = 2(senx + \cos x)$ **?**

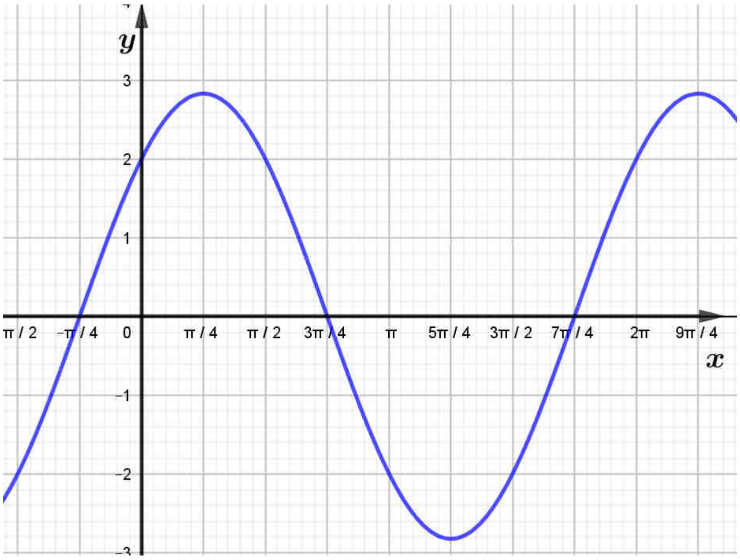
Nota
Vediamo come le funzioni del tipo $\boxed{y = a \cdot senx + b \cdot \cos x}$ possano essere sempre ricondotte ad una scrittura del tipo $\boxed{y = A \cdot sen(x + \varphi)}$.

Infatti se sviluppiamo $sen(x + \varphi)$ abbiamo:

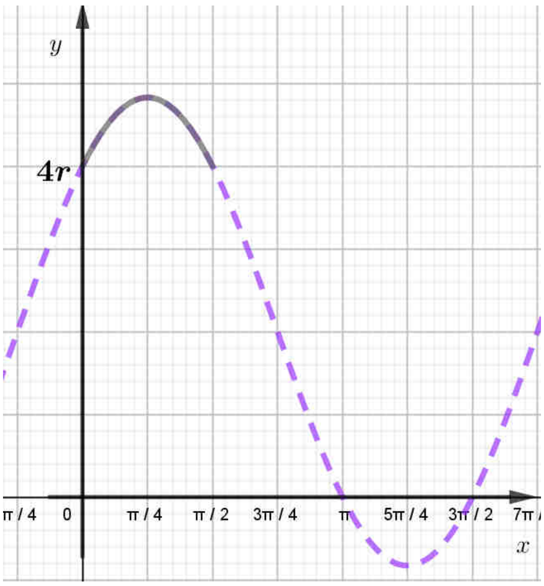
$$A \cdot (senx \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot sen\varphi) = 2(senx + \cos x) \rightarrow A \cdot \cos\varphi \cdot senx + A \cdot sen\varphi \cdot \cos x = 2senx + 2\cos x \rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot \cos\varphi = 2 \\ A \cdot sen\varphi = 2 \end{cases} \rightarrow \frac{A \cdot sen\varphi}{A \cdot \cos\varphi} = \frac{2}{2} \rightarrow tg\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \quad e \quad A = \frac{2}{sen\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Quindi abbiamo che $y = 2(senx + \cos x)$ corrisponde a $y = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ che risulta una funzione sinusoidale di ampiezza $2 \cdot \sqrt{2}$, periodo 2π e traslata orizzontalmente di $\frac{\pi}{4}$ verso sinistra:



In conclusione, inserendo di nuovo *r*, il grafico di $y = 2r + 2r(senx + \cos x)$ corrisponderà a quello di $y = 2r + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e , disegnato solo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, risulterà il seguente



Quindi si ha il massimo perimetro di $\overset{\Delta}{ABP}$ quando $x = \frac{\pi}{4}$ e sostituendo si trova che risulta

$$2p\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2r\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2r\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Anche in questo caso, fissato un valore del perimetro compreso tra 4r e $2r\left(1 + \sqrt{2}\right)$, si avranno sempre due valori di x corrispondenti (cioè due triangoli congruenti che hanno quel dato perimetro).

PROBLEMI
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) Si consideri una semicirconferenza di diametro AB= 2r e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $B\hat{A}P = x$. Determina per quale x si ha $area(ACBP) = (\sqrt{3}+1)r^2$.

$[x = \frac{\pi}{4}]$

2) Data una semicirconferenza di diametro AB= 2r si consideri il trapezio isoscele ABCD inscritto nella semicirconferenza e si ponga $B\hat{A}D = x$. Determinare per quale x si ha $2p(ABCD) = 5r$.

$[x = \frac{\pi}{3}]$

3) Si consideri una semicirconferenza di diametro AB = 2r e un trapezio isoscele CDEF circoscritto alla semicirconferenza. Posto $D\hat{C}F = x$ determina x per il quale si ha $area(CDEF) = \sqrt{3}r^2$.

$[x = \frac{\pi}{3}]$

4) Considera una semicirconferenza di diametro AB = 2r e un punto P su di essa. Costruisci il quadrato PBRQ esternamente alla semicirconferenza. Determina la posizione di P in modo che si abbia $area(ABRQ) = 3r^2$. Poni $B\hat{A}P = x$.

$[x = \frac{\pi}{4}]$

5) Considera una semicirconferenza di diametro AB = 2r e un punto P su di essa. Costruisci il triangolo equilatero PBD esternamente alla semicirconferenza e determina P per cui si abbia $area(ABDP) = \sqrt{3}r^2$. Poni $P\hat{A}B = x$.

$[x = \frac{\pi}{2}, x = arctg\frac{\sqrt{3}}{2}]$

7) Considera una semicirconferenza di diametro AB = 2r una corda PQ parallela ad AB. Posto $A\hat{O}P = x$ e costruito il triangolo equilatero PQR, con R esterno alla semicirconferenza, determina x in modo che si abbia $area(POQR) = \sqrt{3}r^2$.

$[x = 0, x = \frac{\pi}{6}]$

8) Dato un triangolo isoscele ABC avente base AB e altezza $\overline{CH} = 2a$, posto $A\hat{C}H = x$, considera il punto D, punto medio dell' altezza CH, e traccia le sue proiezioni ortogonali M e N rispettivamente su AC e CB. Determina x in modo che $2p(CMDN) = 2a\sqrt{2}$.

$[x = \frac{\pi}{4}]$

9) Considera una circonferenza di diametro AB = 2r e la corda $\overline{AC} = r$. Sia P un punto appartenente alla semicirconferenza non contenente C e poni $P\hat{A}B = x$. Determina x in modo che si abbia $area(APC) = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$.

$[x = 0, x = \frac{\pi}{6}]$

10) Sia ABO un settore circolare con $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e $\overline{AO} = \overline{OB} = r$. Si consideri un punto P appartenente all' arco AB e si ponga $A\hat{O}P = x$ .Si consideri la proiezione ortogonale H del punto P su AO , il segmento PP' parallelo ad AO e sia K la proiezione ortogonale di P' su AO. Determina x in modo che $area(HPP'K) = \frac{r^2}{2\sqrt{3}}$.

$[x = \frac{\pi}{6}]$

11) Considera una circonferenza di raggio r e le corde $\overline{AB} = r$ e $\overline{BC} = r\sqrt{3}$. Considera un punto P appartenente alla semicirconferenza AC non contenente B. Determina P in modo che $2p(ABCP) = 2r(1+\sqrt{3})$. Poni $P\hat{A}C = x$.

$[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}]$

12) Si consideri una semicirconferenza di diametro AB= 2r e si costruisca il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $B\hat{A}P = x$. Studia la funzione $A(x) = area(ACBP)$.

$$\left[A(x) = r^2\left(sen2x + \sqrt{3}\right),\quad \max = r^2\left(1+\sqrt{3}\right) per \quad x = \frac{\pi}{4};\quad \min = \sqrt{3}r^2\ per \quad x = 0,\quad x = \frac{\pi}{2}\right]$$

SCHEDA DI VERIFICA
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche

1. $sen(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$ $\quad [x=\frac{17}{12}\pi+2k\pi\,;x=\frac{25}{12}\pi+2k\pi]$
2. $tg^2(3x-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{3}$ $\quad [x=\frac{2}{9}\pi+k\frac{\pi}{3}\,;x=\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3}]$
3. $\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$ $\quad [x=-\frac{7}{12}\pi+2k\pi\,;x=\frac{\pi}{36}+2k\frac{\pi}{3}]$
4. $2sen^2x-2=sen^2x+\cos^2x+5\cos x+1$ $\quad [x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi]$
5. $senx=\cos x-\sqrt{2}$ $\quad [x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi]$
6. $\cos x+sen(x-\frac{\pi}{6})=1$ $\quad [x=\frac{\pi}{3}+2k\pi]$
7. $2sen^2x-(\sqrt{3}+1)senx\cos x+(\sqrt{3}+1)\cos^2x=1$

   $[x=\frac{\pi}{3}+k\pi\,;x=\frac{\pi}{4}+k\pi]$
8. $\sqrt{3}\cos 2x+1=sen2x$ $\quad [x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,;x=\frac{7}{12}\pi+k\pi]$

Problema 1
Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$ = 2r e sia P un punto su di essa. Disegna il triangolo equilatero ABC esternamente alla semicirconferenza e determina x = $P\hat{A}B$ in modo che $2p(ACBP)=2(2+\sqrt{2})r$.

$[x=\frac{\pi}{4}]$

Problema 2
Considera una circonferenza di diametro $\overline{AB}$ =2r e traccia la corda $\overline{AC}$ $=r\sqrt{3}$. Determina un punto P (poni $B\hat{A}P=x$) appartenente alla semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$ non contenente C tale che l'area del quadrilatero ACBP sia uguale a $\sqrt{3}r^2$.

$[x=\frac{\pi}{6}\,;x=\frac{\pi}{3}]$

Problema 3
Si consideri una semicirconferenza di diametro AB= 2r e si costruisca il quadrato ACDB esternamente alla semicirconferenza. Sia P un punto sulla semicirconferenza e poni $B\hat{A}P=x$. Studia la funzione $A(x)=area(ACDBP)$.

$$\left[A(x)=r^2(sen2x+4),\quad \max=5r^2\ per\quad x=\frac{\pi}{4};\quad \min=4r^2\ per\quad x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}\right]$$

SCHEDA PER IL RECUPERO
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\left[x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

2) $senx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]$

3) $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

4) $sen2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \cup \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ $\left[x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right]$

6) $tg\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ $\left[x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}\right]$

7) $2sen^2 x - senx = 0$ $\left[x = k\pi \quad \cup \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$

8) $2\cos^2 x - 1 = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

9) $tg^2 x - tgx = 0$ $\left[x = k\pi \quad \cup \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

10) $\cos^2 x - sen^2 x = 0$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

11) $senx - \cos x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \pi + 2k\pi\right]$

12) $senx = \cos x - 1$ $\left[x = 2k\pi \quad \cup \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

13) $senx + \cos x = 0$ $\left[x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$