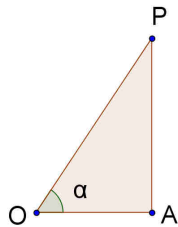


Triangolo rettangolo

Dato il triangolo rettangolo $\triangle OPA$ sappiamo che:



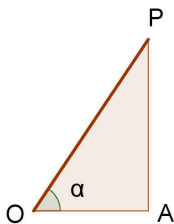
$$\text{sen}\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{cateto adiacente ad } \alpha}$$

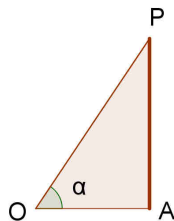
Possiamo perciò utilizzare $\text{sen}\alpha$, $\text{cos}\alpha$, $\text{tg}\alpha$ per determinare gli elementi del triangolo (lati ed angoli).

a) Conoscendo l'ipotenusa \overline{OP} e l'angolo α (cioè $\text{sen}\alpha$, $\text{cos}\alpha$, $\text{tg}\alpha$)



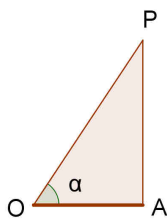
$$\begin{aligned} \text{cateto opposto ad } \alpha &= \overline{PA} = \text{ipotenusa} \cdot \text{sen}\alpha \\ \text{cateto adiacente ad } \alpha &= \overline{OA} = \text{ipotenusa} \cdot \text{cos}\alpha \end{aligned}$$

b) Conoscendo il cateto \overline{AP} e l'angolo opposto α



$$\begin{aligned} \text{ipotenusa} &= \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{sen}\alpha} \\ \text{cateto adiacente ad } \alpha &= \text{ipotenusa} \cdot \text{cos}\alpha \end{aligned}$$

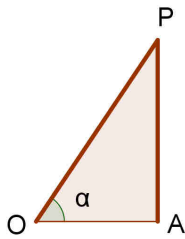
c) Conoscendo il cateto \overline{OA} e l'angolo adiacente α



$$\begin{aligned} \text{ipotenusa} &= \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{cos}\alpha} \\ \text{cateto opposto ad } \alpha &= \text{ipotenusa} \cdot \text{sen}\alpha \end{aligned}$$

Triangolo rettangolo

d) Conoscendo il cateto \overline{PA} e l'ipotenusa \overline{OP} posso trovare



$$\sin \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}}$$

e quindi anche $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$

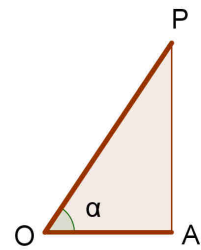
Dalla conoscenza di $\sin \alpha$ posso risalire all'angolo α (tasto di "inversione" della calcolatrice).

Per determinare \overline{OA} posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure $\cos \alpha$ poiché $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha$

e) Conoscendo il cateto \overline{OA} e l'ipotenusa \overline{OP} abbiamo

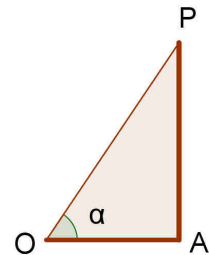
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \alpha$$

\overline{AP} con il teorema di Pitagora oppure $\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \sin \alpha$



f) Conoscendo i due cateti \overline{PA} e \overline{OA} possiamo determinare

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \alpha$$



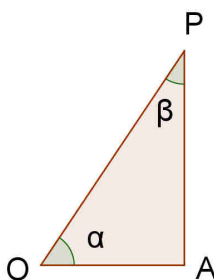
Possiamo determinare \overline{OP} applicando il teorema di Pitagora oppure con la relazione $\overline{OP} = \frac{\overline{PA}}{\sin \alpha}$

Nota: naturalmente in tutti questi esempi dalla conoscenza di α si può ricavare anche $\hat{OPA} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

In conclusione, dalla conoscenza di 2 elementi di un triangolo rettangolo, che però non siano due angoli, posso determinare tutti gli altri (si dice **"risolvere"** il triangolo).

Conoscere α equivale a conoscere $\sin \alpha$ o $\cos \alpha$ o $\operatorname{tg} \alpha$.

Osserviamo che si ha



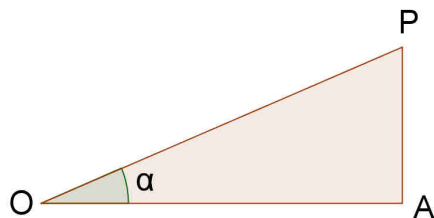
$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{cateto adiacente a } \beta}{\text{ipotenusa}} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{cateto opposto a } \beta}{\text{ipotenusa}} = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

Esempi

- a) Nel triangolo rettangolo $\hat{O}PA$ sia l'ipotenusa $\overline{OP} = 2$ e $\text{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ ($\alpha = \hat{POA}$). Determinare gli altri elementi del triangolo.



$$\overline{OP} = 2$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \text{sen}\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Per determinare \overline{OA} posso anche utilizzare il teorema di Pitagora oppure ricavo

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Se $\beta = \hat{OPA} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ abbiamo

$$\text{sen}\beta = \cos\alpha$$

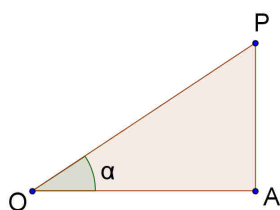
$$\cos\beta = \text{sen}\alpha$$

Per avere un'idea della misura degli angoli α e β possiamo utilizzare la calcolatrice premendo, per esempio, il tasto SIN^{-1} che permette di risalire all'angolo che ha come valore del seno il numero indicato.

Prendendo $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ otteniamo $\alpha \cong 19,47^\circ$.

Infine $\beta = 90^\circ - \alpha \cong (70,53)^\circ$

b)



$$\overline{AP} = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Se $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ abbiamo $\text{sen}\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

Triangolo rettangolo

Quindi $\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{\frac{3}{5}} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$

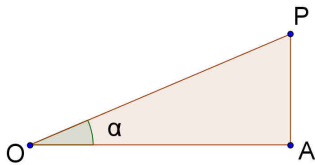
e $\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$ (oppure con il teorema di Pitagora)

Per ricavare α utilizzando per esempio il tasto \cos^{-1} della calcolatrice abbiamo

$$\cos^{-1} \frac{4}{5} \cong (36,86)^\circ$$

e quindi $\beta = \hat{OPA} = 90^\circ - \alpha \cong (53,14)^\circ$

c)



$$\overline{OA} = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ posso ricavare $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$ dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

oppure ricordare che $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ e $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$

Si ottiene, in ogni caso, che $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ da cui

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OA}}{\cos \alpha} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{e } \overline{AP} = \overline{OP} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizzando la calcolatrice $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{4} \cong (19,47)^\circ$ e $\beta = 90^\circ - \alpha$

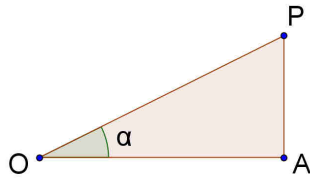
Nota: il problema poteva essere risolto anche così

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \overline{AP} = \overline{OA} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e \overline{OP} si può trovare con il teorema di Pitagora.

Triangolo rettangolo

d)

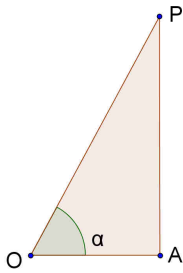


$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 8 \\ \overline{AP} &= 5\end{aligned}$$

Posso determinare $\text{sen}\alpha = \frac{5}{8}$ e con la calcolatrice $\alpha \cong (38,68)^\circ$ e per determinare \overline{OA} posso utilizzare il teorema di Pitagora oppure calcolare $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$ e

$$\overline{OA} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \sqrt{39}$$

e)



$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 10 \\ \overline{OA} &= 4\end{aligned}$$

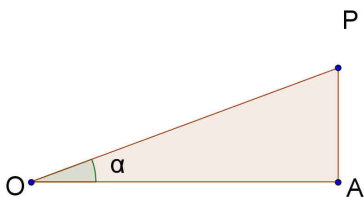
Determino $\cos\alpha = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (66,42)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare \overline{AP} , basterà calcolare

$$\overline{AP} = \overline{OP} \cdot \text{sen}\alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 2\sqrt{21}$$

$$\text{sen}\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ eavrò}$$

f)



$$\begin{aligned}\overline{AP} &= 2 \\ \overline{OA} &= 2\sqrt{15}\end{aligned}$$

Posso determinare $\text{tg}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{2}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ (con la calcolatrice $\alpha \cong (14,47)^\circ$).

Se non voglio utilizzare il teorema di Pitagora per determinare \overline{OP} basta ricavare $\text{sen}\alpha$ (o $\cos\alpha$) da $\text{tg}\alpha$. Risoluzione

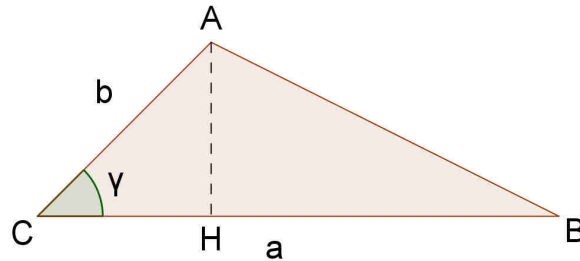
Per esempio

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + 1} = \frac{1}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\overline{OP} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen}\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

Area di un triangolo

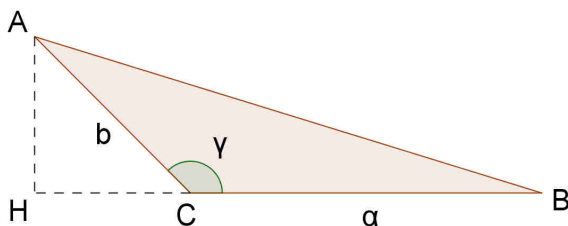
Supponiamo di conoscere due lati di un triangolo e l'angolo compreso: possiamo calcolare l'area?



Tracciamo l'altezza AH : $\overline{AH} = b \operatorname{sen} \gamma$

e quindi $\operatorname{area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma$.

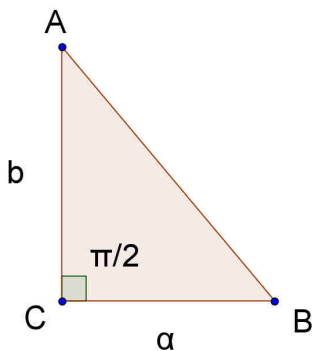
Osserviamo che se anche γ fosse ottuso avremo:



$$\overline{AH} = b \cdot \operatorname{sen}(\pi - \gamma) = b \cdot \operatorname{sen} \gamma$$

e quindi ancora $\operatorname{area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \gamma$.

Se, come caso particolare, avessi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ il triangolo sarebbe rettangolo in C e infatti:

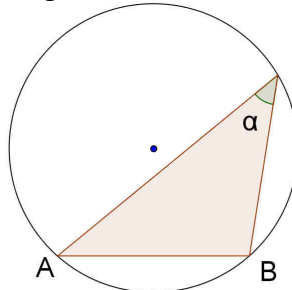


$$\operatorname{area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} ab$$

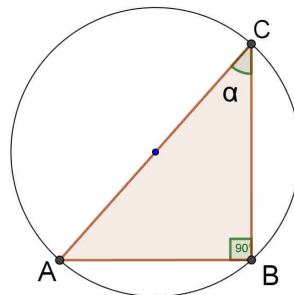
$$\operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

Lunghezza di una corda di una circonferenza

Consideriamo una corda AB in una circonferenza di raggio r : se conosciamo un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda possiamo trovare \overline{AB} ?



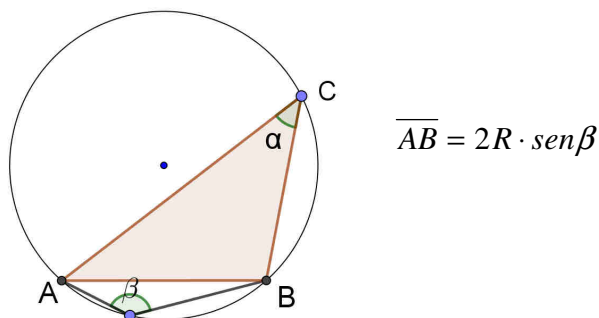
Sappiamo che tutti gli angoli che insistono su AB sono uguali: disegniamo allora quello che ha un lato passante per il centro della circonferenza.



Il triangolo $\triangle ABC$ è rettangolo in B e quindi, essendo $\overline{AC} = 2R$:

$$\overline{AB} = 2R \cdot \text{sen } \alpha$$

Osserviamo che questa relazione vale anche considerando un angolo β come in figura: infatti $\beta = \pi - \alpha$ (α e β sono angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza) e quindi $\text{sen } \beta = \text{sen } \alpha$



$$\overline{AB} = 2R \cdot \text{sen } \beta$$

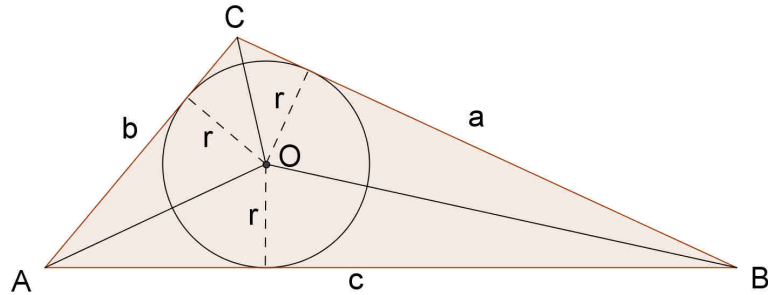
Quindi in generale abbiamo $\overline{AB} = 2R \cdot \text{sen } \theta$ (angolo alla circonferenza che insiste sulla corda AB)

Esercizio: ricava il lato del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritti in una circonferenza di raggio r .

Circonferenza inscritta e circoscritta ad un triangolo

Dato un triangolo $\triangle ABC$ come possiamo calcolare il raggio R della circonferenza circoscritta e il raggio r della circonferenza inscritta?

Cominciamo con la circonferenza inscritta.



L'area del triangolo $\triangle ABC$ è data dalla somma delle aree dei triangoli aventi base a, b, c e altezza r e quindi:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r \quad \text{ma } \frac{a+b+c}{2} = p(\text{semiperimetro})$$

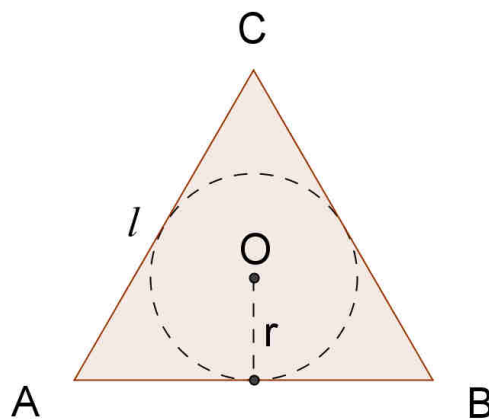
$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

e quindi $S = r \cdot p \Rightarrow r = \frac{S}{p}$

Quindi conoscendo l'area S e il semiperimetro possiamo calcolare il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo.

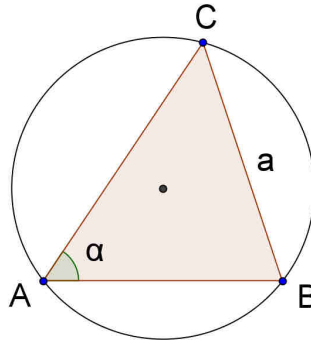
Esempio: in un triangolo equilatero $\triangle ABC$ di lato l abbiamo:

$$r = \left(\frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3} \right) \cdot \frac{1}{\left(3 \frac{l}{2} \right)} = \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2}\sqrt{3} \right)$$



Triangolo rettangolo

Consideriamo ora la circonferenza circoscritta al triangolo



Ricordando che la corda $\overline{BC} = \text{diametro} \cdot \text{sen}\alpha$

$$a = 2R \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow R = \frac{a}{2\text{sen}\alpha} \quad (1)$$

Naturalmente è anche $R = \frac{b}{2\text{sen}\beta} = \frac{c}{2\text{sen}\gamma}$

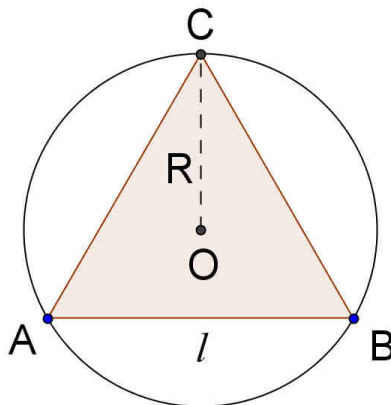
Possiamo anche scrivere, moltiplicando nella (1) per $b \cdot c$ numeratore e denominatore, e ricordando che $\frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}\alpha = \text{area}(\triangle ABC) = S$

$$R = \frac{a}{2\text{sen}\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2\text{sen}\alpha \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

Quindi conoscendo i lati del triangolo e l'area posso determinare R.

Esempio: in un triangolo equilatero $\triangle ABC$ di lato l abbiamo:

$$R = \frac{l \cdot l \cdot l}{4 \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2} \sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \left(= \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \sqrt{3} \right)$$



Triangolo rettangolo

PROBLEMI TRIANGOLO RETTANGOLO

1. In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{AB} = 2a$ e $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha = \hat{ABC}$). Determina perimetro e area del triangolo.

$$[2p = \frac{9}{2}a ; A = \frac{3}{4}a^2]$$

2. In un triangolo isoscele ABC di base AB , il lato obliquo $\overline{CB} = l$ e $\text{tg}\alpha = 2$ ($\alpha = \hat{ABC}$). Determina perimetro e area del triangolo ABC. Determina infine la misura dell'altezza AK relativa al lato obliquo.

$$[2p = \frac{2}{5}\sqrt{5}l + 2l ; A = \frac{2}{5}l^2 ; \overline{AK} = \frac{4}{5}l]$$

3. In un trapezio isoscele ABCD il lato obliquo e la base minore misurano a e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ dove α è uno degli angoli adiacenti alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = \frac{9}{2}a ; A = \frac{5\sqrt{15}}{16}a^2]$$

4. In un trapezio rettangolo ABCD la diagonale minore AC misura a , forma un angolo retto con il lato obliquo BC e $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ dove α è l'angolo acuto adiacente alla base maggiore. Determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = \frac{22}{5}a ; A = \frac{68}{75}a^2]$$

5. In un triangolo isoscele ABC di base AB il lato obliquo misura $2a$ e $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dove α è l'angolo alla base. Determina la misura delle altezze CH e AK del triangolo.

$$[\overline{CH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}a ; \overline{AK} = \frac{8}{5}a]$$

6. In un trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 20 e la base minore DC misura 10. Sapendo che $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, dove α è l'angolo ottuso adiacente alla base minore, determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = 68 ; A = 256]$$

Triangolo rettangolo

7. In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ si prolunga il diametro dalla parte di B e si considera un punto P tale che, tracciata da P la tangente t alla semicirconferenza e detto T il punto di tangenza, si abbia $\text{sen}(\hat{APT}) = \frac{3}{5}$. Tracciata la tangente t' alla semicirconferenza in A e detto Q il punto di intersezione tra t e t', determina perimetro e area del triangolo \hat{APQ} .

$$[2p = 8r ; A = \frac{8}{3}r^2]$$

8. Dato un trapezio rettangolo ABCD avente l'altezza $\overline{AD} = a$, $\text{sen}(\hat{BAC}) = \frac{3}{5}$ (AB base maggiore, AC diagonale minore), $\text{cos}(\hat{ABC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determina perimetro e area di ABCD.

$$[2p = \frac{17}{3}a + \sqrt{3}a ; A = \frac{8 + 3\sqrt{3}}{6}a^2]$$

9. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 2a$ si consideri il punto medio O di BC e si tracci la perpendicolare a BC per O, indicando con M l'intersezione di questa con il cateto AB. Sapendo che $\text{tg}(\hat{ABC}) = \frac{3}{4}$, determinare il perimetro del quadrilatero ACOM.

$$[2p = \frac{33}{10}a]$$

10. In un trapezio rettangolo ABCD, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Sapendo che $\overline{AD} = a$ e che $\text{tg}(\hat{ABC}) = \frac{3}{4}$, determina perimetro e area del trapezio.

$$[2p = \frac{11}{2}a ; A = \frac{17}{12}a^2]$$

11. L'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura a e l'angolo che essa forma con uno dei due cateti ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$. Calcola perimetro e area del triangolo.

$$[2p = 5a ; A = \frac{25}{24}a^2]$$

Triangolo rettangolo

12. In un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB, il raggio della circonferenza inscritta misura r e $\cos(\hat{A}BC) = \frac{1}{3}$. Determina i lati del triangolo.

$$[\overline{AB} = 2\sqrt{2}r; \overline{BC} = 3\sqrt{2}r]$$

13. In un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base AB, $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ e $\cos(\hat{A}BC) = \frac{1}{3}$. Determina perimetro e area del triangolo e l'altezza AK relativa a BC.

$$[2p = \frac{8}{3}a; A = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2; \overline{AK} = \frac{4}{9}\sqrt{2}a]$$

14. In un trapezio scaleno ABCD la base minore DC è uguale ad uno dei due lati obliqui e si ha $\overline{DC} = \overline{AD} = l$. Sapendo che $\hat{D}AB = \frac{\pi}{4}$ e che $tg(\hat{A}BC) = 2$, determina i lati del trapezio e le funzioni goniometriche di \hat{C} e \hat{D} .

$$[\overline{AB} = \left(\frac{3\sqrt{2} + 4}{4}\right)l; \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}l; \hat{C} = \pi - \alpha \dots; \hat{D} = \frac{3}{4}\pi]$$

15. Un trapezio isoscele di base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di raggio r e, indicato con α uno degli angoli alla base, si ha $sen\alpha = \frac{24}{25}$. Determina i lati del trapezio.

$$[\overline{AB} = \frac{8}{3}r; \overline{DC} = \frac{3}{2}r; \overline{CB} = \overline{AD} = \frac{25}{12}r]$$

16. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{BC} = 3a$ si ha $\cot g(\hat{A}BC) = 2$. Considera P su BC tale che $\overline{BP} = a$ e traccia da P la perpendicolare all'ipotenusa che incontra il cateto AB in Q. Determina l'area del quadrilatero AQPC.

$$\left[\frac{31}{20}a^2\right]$$