

Calcolo combinatorio



Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio può essere enunciato così:

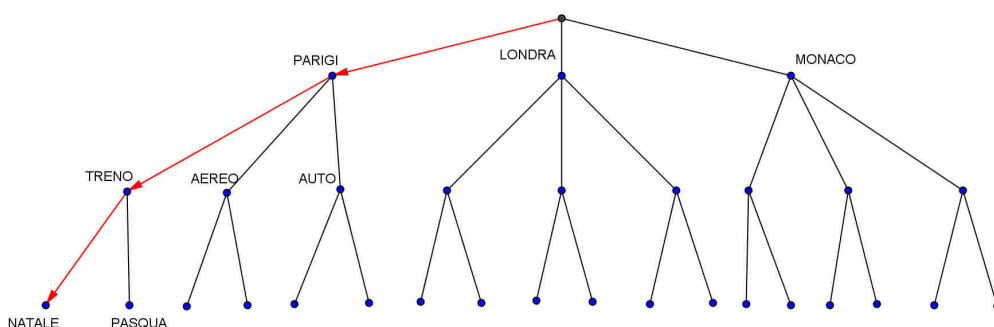
“Se dobbiamo fare N scelte e la prima scelta può essere fatta in n_1 modi, la seconda scelta in n_2 modi e così via fino all’ N -esima scelta che può essere fatta in n_N modi, allora la successione delle N scelte può essere fatta in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_N$ modi diversi.”

Facciamo un esempio: supponiamo di voler organizzare una vacanza e di poter scegliere

- la meta tra Parigi, Londra e Monaco
- il mezzo di trasporto tra treno, aereo e auto
- il periodo tra vacanze di Natale e vacanze di Pasqua

In quanti modi diversi possiamo organizzare la nostra vacanza?

Possiamo rappresentare la situazione con un “grafo ad albero”:



Ci accorgiamo che percorrendo i vari “rami” dell’albero abbiamo vacanze diverse: per esempio seguendo le frecce in figura abbiamo Parigi, in treno, a Natale.

Quindi, poiché ogni percorso-vacanza termina nell’ultimo livello, per sapere quante vacanze diverse possiamo organizzare basta contare le “terminazioni” dell’albero, che sono 18.

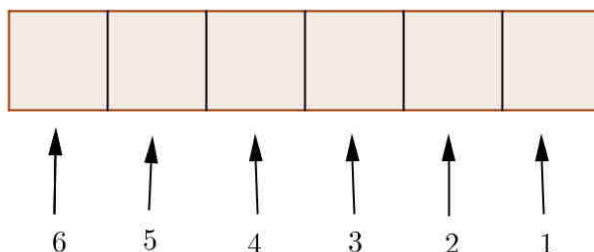
E’ chiaro anche che il numero delle “terminazioni” si ottiene moltiplicando 3 (possibilità per la prima scelta) * 3 (possibilità per la seconda scelta)*2 (possibilità per la terza scelta) secondo il principio fondamentale del calcolo combinatorio che abbiamo enunciato.

Permutazioni

Se abbiamo n oggetti distinti e dobbiamo metterli in “fila”(quindi l’ordine è importante) **quante “file” (permutazioni) diverse possiamo fare?**

Consideriamo per esempio la parola *scuola*: **quanti anagrammi si possono fare?**

Gli oggetti in questo caso sono le sei lettere della parola *s,c,u,o,l,a* e sono tutte distinte. Immaginiamo di riempire in successione sei caselle (per formare l’anagramma cioè la nostra “fila”): per riempire la prima casella ho 6 possibili scelte (posso usare una delle sei lettere), per riempire la seconda casella però ho solo 5 possibili scelte perché una lettera l’ho già usata e non posso ripeterla e così via fino al riempimento dell’ultima casella per la quale ho solo 1 scelta.



Quindi **per il principio fondamentale del calcolo combinatorio** avremo

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

possibili “file” cioè permutazioni dei 6 oggetti distinti (le lettere *s,c,u,o,l,a*).

In generale il numero delle permutazioni di n elementi distinti sarà dato dal prodotto

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

che viene indicato con il simbolo

$$n!$$

e si legge **n fattoriale**.

Il numero delle **permutazioni di n elementi distinti** viene in genere indicato con P_n e quindi abbiamo:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Osservazioni

$n!$ cresce molto rapidamente: per esempio $5!=120$, $6!=720$, $7!=5040$ ecc.

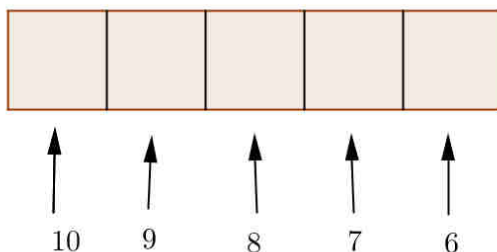
Si ha inoltre che $n! = n \cdot (n - 1)!$

Per convenzione si pone $0!=1$

Disposizioni semplici

Consideriamo adesso questo problema: *quanti diversi codici di 5 cifre distinte si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*

E' chiaro che anche in questo caso l'ordine è importante: si tratta di scegliere come riempire 5 caselle potendo scegliere tra un insieme di 10 elementi e quindi, ragionando come nell'esempio precedente, avremo 10 possibilità di scelta per la cifra da mettere nella prima casella, 9 (perché le cifre devono essere distinte) possibilità di scelta per la seconda casella e così via...



In conclusione possiamo comporre

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

codici diversi con cifre distinte.

In questo caso si parla di disposizioni di ordine 5 su 10 oggetti distinti e il loro numero si indica con il simbolo $D_{10,5}$.

Generalizzando **il numero delle disposizioni semplici cioè senza ripetizioni di k elementi scelti tra n elementi distinti è**

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Note

E' chiaro che $k \leq n$ e che nel caso in cui $k = n$ si ritrova il numero delle permutazioni P_n .

L'ultimo fattore risulta $n - k + 1 = n - (k - 1)$ perché quando si riempie l'ultima casella (la k -esima) abbiamo già scelto $k-1$ elementi e quindi abbiamo ancora solo $n-(k-1)$ possibilità.

Osservazione

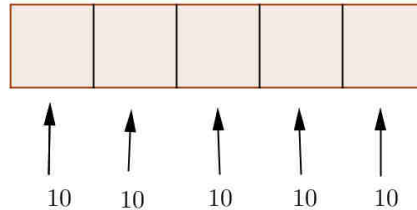
Possiamo esprimere il numero delle disposizioni $D_{n,k}$ anche utilizzando i fattoriali: se moltiplichiamo e dividiamo per $(n-k)!$ abbiamo :

$$D_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione

Riprendiamo l'esempio precedente: *quanti sono i codici di 5 cifre anche ripetute che si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ?*

Se in questo caso posso ripetere le cifre per ogni casella da riempire avrò sempre 10 possibilità.



Quindi avrò $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ codici diversi.

In generale **il numero delle disposizioni con ripetizione** (possono ripetere gli elementi) **di ordine k su n oggetti distinti** si indica con $D_{n,k}^{rip}$ e risulta

$$D_{n,k}^{rip} = n^k$$

Nota 1

Mentre se consideriamo le disposizioni semplici (senza ripetizione) $D_{n,k}$ è chiaro che dovrà essere $k \leq n$, nel caso delle disposizioni con ripetizione $D_{n,k}^{rip}$ si può avere anche $k > n$.

Per esempio se consideriamo la schedina del totocalcio in cui ci sono 13 caselle (corrispondenti alle varie partite di campionato di una data domenica) che si possono riempire con i simboli 1,2,X (1=vittoria della squadra che gioca in casa; 2=vittoria della squadra che gioca fuori casa; X= pareggio) le possibili schedine sono $D_{3,13}^{rip} = 3^{13}$ e in questo caso $k=13$ e $n=3$.

Nota 2

Abbiamo sempre considerato che gli elementi (di cui consideriamo le permutazioni o le disposizioni) siano distinti (cioè diversi tra loro): **ma se alcuni degli n elementi coincidono?**

Come facciamo per esempio se dobbiamo calcolare quanti anagrammi si possono formare con la parola *classe* in cui due lettere sono uguali?

Possiamo considerare all'inizio gli oggetti (le lettere) come se fossero tutti diversi (per esempio pensando di associare alle due s due colori diversi) e quindi avremo 6! permutazioni.

Ma poiché in realtà due lettere coincidono permutandole tra loro ho sempre lo stesso anagramma: per esempio *classe* e *classe* rappresentano lo stesso anagramma e così per ciascuna altra coppia

tipo *lcasse* *lcasse* in conclusione avrò solo $\frac{6!}{2!}$ permutazioni.

In generale quindi se n_1 elementi coincidono tra loro, n_2 elementi sono uguali tra loro ecc. dovremo dividere $n!$ per $n_1!$, $n_2!$ ecc.

Per esempio gli anagrammi della parola *mamma* saranno $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$.

Combinazioni semplici

Cominciamo con il seguente problema.

"Nel gioco del poker ad ogni giocatore vengono distribuite 5 carte da un mazzo di 32. In quanti modi diversi può essere servito un giocatore?"

Osserviamo subito che due gruppi di cinque carte sono diversi solo se differiscono per almeno una carta mentre non è importante in quale ordine sono arrivate le cinque carte.

I modi possibili in cui ciascun giocatore può essere servito è quindi inferiori al numero delle disposizioni semplici di 32 elementi a gruppi di 5: più precisamente ogni mano corrisponde a 5! disposizioni diverse.

Quindi il numero dei gruppi di cinque carte diverse sarà dato da:

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 201376$$

Generalizzando viene data la seguente definizione:

Si chiama combinazione semplice di ordine k su n elementi distinti ($k \leq n$) un gruppo (non mi interessa l'ordine) di k elementi scelti tra gli n elementi.

Se indichiamo con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni di ordine k su n elementi per quanto osservato in precedenza si ha

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Il numero delle combinazioni $C_{n,k}$ si indica anche con il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge "n su k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)!$ si ottiene

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Occorre inoltre osservare che avendo posto $0! = 1$ segue che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Proprietà

Prima proprietà

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Infatti abbiamo

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Questa proprietà può essere facilmente spiegata osservando che ad ogni k-sottoinsieme in un insieme di n elementi corrisponde un (n-k)-sottoinsieme (sottoinsieme complementare).

Seconda proprietà

Per $1 \leq k \leq n-1$ vale

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Possiamo dimostrare questa proprietà algebricamente (utilizzando la formula per calcolare il coefficiente binomiale e sviluppando), oppure facendo un esempio.

Supponiamo di estrarre tre carte da un mazzo di 40 carte: in quanti modi diversi posso farlo?

E' chiaro che ci sono $\binom{40}{3}$ combinazioni.

Ma in quante di queste compare il "settebello" (sette di quadri)? Saranno le combinazioni di ordine 2 su 39 elementi cioè $\binom{39}{2}$ dal momento che mi rimangono solo da scegliere due carte su 39 carte perché poi aggiungo il "settebello".

E in quante combinazioni il "settebello" non c'è? Questa volta saranno le combinazioni di ordine 3 su 39 elementi cioè $\binom{39}{3}$ poiché devo scegliere tre carte solo tra 39 carte (tolgo il settebello).

Ma il numero totale delle combinazioni iniziali sarà dato dalla somma del numero delle combinazioni dove c'è il "settebello" con il numero delle combinazioni dove il "settebello" non c'è e quindi dovrà essere

$$\binom{40}{3} = \binom{39}{2} + \binom{39}{3}$$

Combinazioni e coefficienti della potenza di un binomio

Il numero delle combinazioni $C_{n,k}$ si ritrova anche sviluppando la potenza di un binomio. Consideriamo infatti

$$(a+b)^n \quad \text{con } n \in \mathbf{N} \quad \text{e} \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Poiché per definizione

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) \quad n \text{ volte}$$

i termini dello sviluppo sono tutti di grado n e del tipo

$$a^{n-k} b^k \quad (0 \leq k \leq n)$$

cioè ottenuti prendendo a in $(n-k)$ tra gli n fattori $(a+b)$ e, di conseguenza, b fra i k rimanenti.

Pertanto i termini di questo tipo sono tanti quante sono le combinazioni di ordine k su n elementi, cioè il coefficiente di $a^{n-k} b^k$ è $\binom{n}{k}$.

Quindi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Per questo il numero di combinazioni $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ viene anche chiamato **coefficiente binomiale**.

I coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^0$ $(a+b)^1$ $(a+b)^2$... $(a+b)^n$ si possono scrivere in modo da formare un triangolo chiamato **triangolo di Tartaglia** :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Osservando il triangolo di Tartaglia si possono fare alcune considerazioni:

1. I primi e gli ultimi termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia sono uguali a 1 e questo coincide con il fatto che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. In ogni riga i termini equidistanti dagli estremi sono uguali, in accordo con la prima proprietà che abbiamo visto per le combinazioni.
3. Ogni termine intermedio di una riga si ottiene, in accordo con la seconda proprietà che abbiamo visto per le combinazioni, sommando nella riga precedente il termine di ugual posto con quello che lo precede.
4. *La somma dei termini di ogni riga del triangolo di Tartaglia è una potenza di 2 e precisamente:*

1						$=2^0$
1	1					$=2^1$
1	2	1				$=2^2$
1	3	3	1			$=2^3$
1	4	6	4	1		$=2^4$
1	5	10	10	5	1	$=2^5$

cioè in generale

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Nota

Quindi il numero totale di tutti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi (sottoinsiemi con 0,1,2, ...,n elementi) è uguale a 2^n .

SCHEMA DI LAVORO
I cavalieri della tavola rotonda

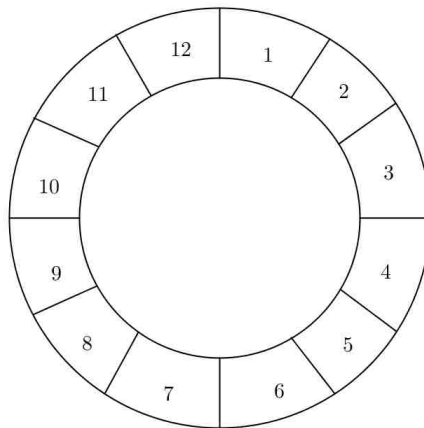
In quanti modi diversi possono sedersi attorno alla tavola rotonda i 12 cavalieri?

Indichiamo i cavalieri con i numeri da 1 a 12.

E' chiaro che se la tavola fosse "diritta" la risposta sarebbe 12! (numero delle permutazioni di 12 elementi distinti) ma ci accorgiamo che le 12 permutazioni del tipo

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2
.....
.....

danno origine alla stessa "permutazione circolare".



Quindi i modi diversi in cui i 12 cavalieri potranno sedersi attorno alla tavola rotonda saranno soltanto

.....

In generale quindi avremo che il numero delle "permutazioni circolari" di n oggetti distinti sar :

.....

PROBLEMI
CALCOLO COMBINATORIO

1. Con le cifre 1,2,3,4,5,6,7,8,9 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare? [504]
2. Dei numeri dell'esercizio precedente quanti sono dispari ? Quanti sono pari ? Quanti terminano con la cifra 9 ? Quanti sono maggiori di 700 ? [280; 224; 56; 168]
3. Quanti anagrammi si possono formare con la parola "studente"? [10080]
4. Con le cifre 1,2,3,5,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono fare? Quanti sono pari? Quanti sono divisibili per 5? E se si possono ripetere le cifre? [a. 60 ; 24 ;12 b. 125; 50 ; 25]
5. Consideriamo sul piano 6 punti tali che a tre a tre non siano allineati. Quanti triangoli si possono disegnare scegliendo come vertici i sei punti? [20]
6. Quante sono le diagonali di un poligono convesso di n lati? [$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$]
7. Quanti incontri singolari si possono organizzare con 6 giocatori di tennis ? [15]
8. Quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto ? [4005]
9. Quante formazioni diverse si possono formare con 11 giocatori facendo giocare tutti i giocatori in tutti i ruoli ? [11!]
10. Quanti sono gli anagrammi della parola liceo ? [5!]
11. Quanti sono gli anagrammi della parola babbo ? [20]
12. Dati 10 punti distinti del piano a tre a tre non allineati, quante rette si ottengono congiungendoli due a due ? [45]

13. Giocando a poker in quanti modi diversi si possono avere in mano 4 assi ?
[28]
14. In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte da un mazzo di 40 carte ?
[91390]
15. Quante partite si giocano in un campionato composto da 15 squadre ? (considera che c'è andata e ritorno).
[210]
16. Il codice di una cassaforte è composto da 5 lettere scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone. Se le lettere possono essere anche ripetute, quanti codici diversi si possono impostare ?
[11881376]
17. Le targhe automobilistiche sono costituite da due lettere seguite da tre cifre seguite a loro volta da due lettere. Se le lettere sono scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone, quante targhe diverse si possono comporre ?
[456976000]
18. L'ultimo giorno di scuola i 20 studenti della IV B si salutano e ognuno abbraccia tutti gli altri. Quanti abbracci si sono scambiati ?
[190]
19. Per effettuare una gita 9 amici hanno a disposizione una Panda e una Tipo : in quanti modi possono distribuirsi tra le due macchine supponendo che 4 salgano nella Panda e 5 nella Tipo ?
[126]
20. Considera la situazione del problema precedente: in quanti modi possono distribuirsi se i proprietari delle auto vogliono guidare (giustamente) ognuno la propria auto ?
[35]
21. In una scuola, che comprende un liceo classico e un liceo scientifico, la rappresentanza degli studenti al Consiglio di Istituto è formata da 4 studenti del liceo scientifico e da 2 studenti del classico. Se nelle liste sono presenti 10 studenti per lo scientifico e 4 per il classico, in quanti modi diversi può essere formata la rappresentanza degli studenti ?
[1260]
22. In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte di cuori da un mazzo di 40 carte ?
[210]
23. In quanti modi diversi si possono pescare 4 carte dello stesso seme da un mazzo di 40 ?
[840]

24. Quante sono le schedine del totocalcio diverse con 12 risultati esatti ? (in quanti modi diversi si può fare 12) [26]

25. Con le cifre 1,2,4,6,8 quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare? Quanti di questi sono pari?

[60; 48]

26. Quanti sono gli anagrammi della parola “matematica” ?

[151200]

27. In quanti modi diversi si possono pescare tre carte da un mazzo di 40 carte?

[9880]

28. 10 amici per fare una gita hanno a disposizione due auto e un motorino. Se su ogni auto salgono quattro persone e due persone sul motorino, in quanti modi diversi possono sistemarsi? E se i proprietari delle auto e del motorino vogliono guidare il proprio mezzo?

[3150; 140]

29. Quante sono le possibili schedine del totocalcio con 11 risultati esatti?

[312]

30. 12 amici, dopo una cena, si salutano ed ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?

[66]

31. In una classe di 22 studenti, di cui 12 femmine e 10 maschi, si deve formare un gruppo per una ricerca costituito da tre maschi e tre femmine. In quanti modi diversi si può formare il gruppo?

[26400]

32. Considera la situazione dell’esercizio precedente: se tra i maschi ci sono due gemelli, quanti sono i gruppi in cui i due gemelli non sono insieme?

[24640]

33. Nell’ippica è chiamata “corsa tris” una corsa in cui gli scommettitori devono indovinare i cavalli che arriveranno al 1°, 2°,3° posto. Se partono 10 cavalli, quali sono i possibili ordini di arrivo?

[720]

34. In una classe di 24 alunni si devono eleggere i due rappresentanti di classe. In quanti modi diversi si può fare questa scelta?

[276]