

# Geometria euclidea dello spazio



## Rette e piani nello spazio

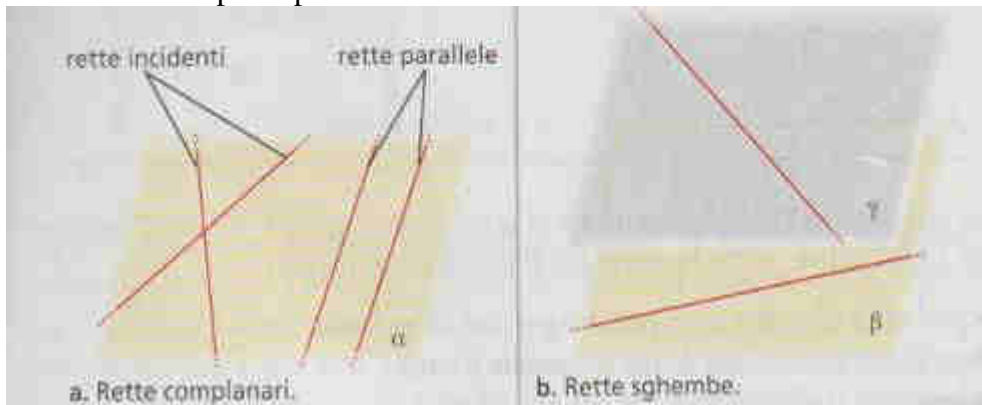
Una **retta** è individuata in modo univoco da due punti.

Un **piano** può essere individuato in modo univoco da:

- tre punti non allineati
- una retta e un punto esterno ad essa
- due rette incidenti
- due rette parallele

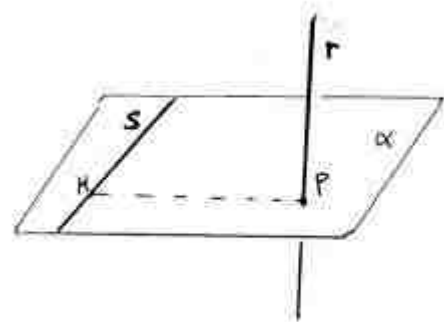
## Posizione reciproca di due rette nello spazio

Due rette nello spazio possono essere:



- **parallele:** sono due rette **complanari** che non hanno punti in comune
- **incidenti:** sono due rette **complanari** che hanno un punto in comune
- **sghembe:** sono rette che **non sono complanari**  
(e che perciò non hanno nessun punto in comune)

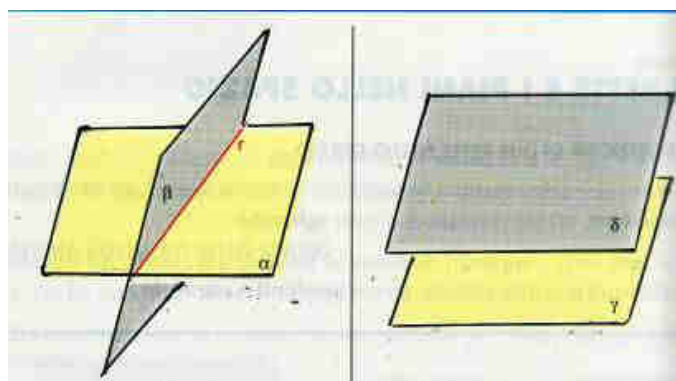
Date due rette sghembe  $r$  e  $s$  la **distanza** tra  $r$  e  $s$  è l'unico segmento perpendicolare ad entrambe. Tale segmento può essere determinato tracciando il piano  $\alpha$  passante per  $s$  e perpendicolare a  $r$  e, detto  $P$  il punto di intersezione di  $r$  con  $\alpha$ , calcolando la distanza  $PH$  tra  $P$  e  $s$ .



## Posizione reciproca di due piani nello spazio

Due piani nello spazio possono essere:

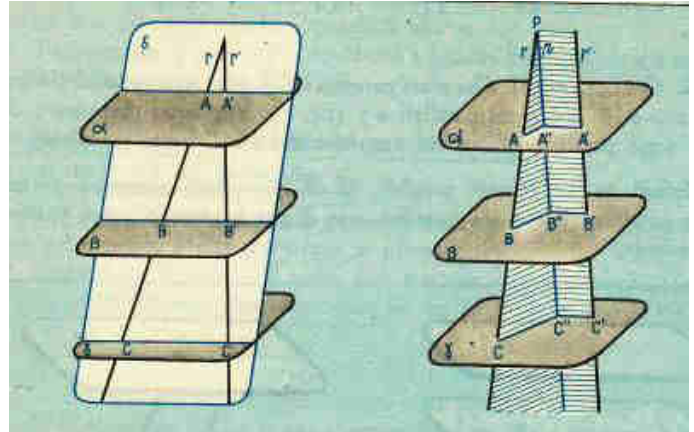
- **paralleli:** sono due piani che non hanno punti in comune
- **incidenti:** sono due piani che hanno una retta in comune



Per i piani paralleli vale il

**Teorema di Talete nello spazio**

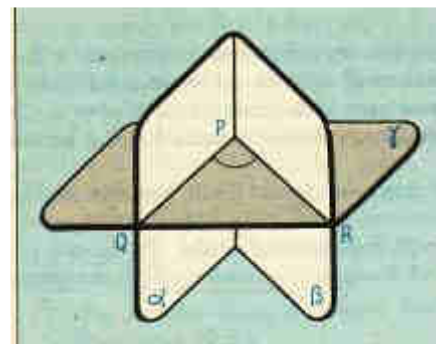
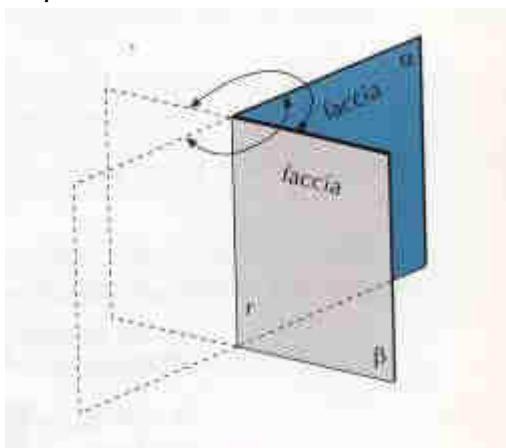
*Un fascio di piani paralleli intersecati da due trasversali intercetta su di esse segmenti corrispondenti proporzionali.*



**Diedro**

Due piani incidenti, hanno invece una retta in comune e dividono lo spazio in quattro parti chiamati **diedri** o angoli diedri. La retta comune ai due piani è detta **spigolo** del diedro.

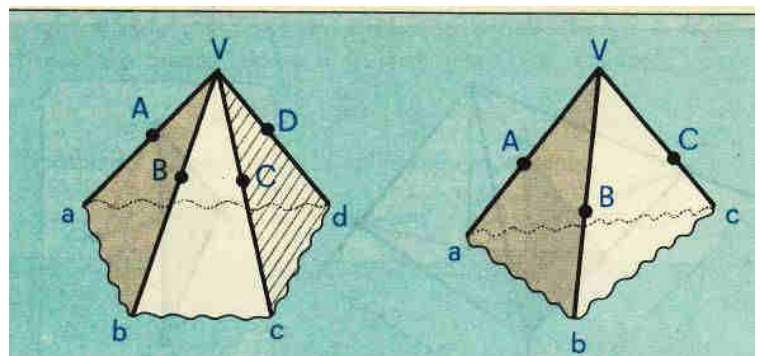
Dato un diedro, le sezioni del diedro ottenute con piani perpendicolari allo spigolo sono angoli tutti congruenti. La misura di una qualunque sezione normale di un diedro è la misura dell'ampiezza del diedro stesso, perciò se la sezione normale del diedro  $\alpha\beta$  è  $60^\circ$ , diremo che il diedro  $\alpha\beta$  misura  $60^\circ$ .



**Angoloide**

L'**angoloide** è la parte di spazio individuata da  $n$  ( $n \geq 3$ ) semirette aventi origine comune, a tre a tre non complanari e tali che il piano individuato da due semirette successive lasci tutte le altre dalla stessa parte.

Le semirette sono dette **spigoli** dell'angoloide, la loro origine comune è il **vertice** e gli angoli formati da due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide.



Un angoloide con tre spigoli o facce è detto angoloide **triedro** o semplicemente triedro, con quattro facce abbiamo un angoloide **tetraedro**.

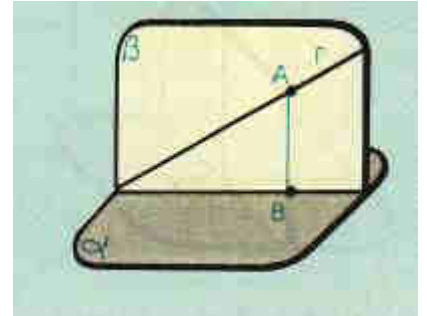
Vale la seguente proprietà: **in ogni angoloide di vertice V la somma degli angoli in V delle facce è minore di un angolo giro.**

## Posizione reciproca di una retta e di un piano nello spazio

Data una retta  $r$  ed un piano  $\alpha$

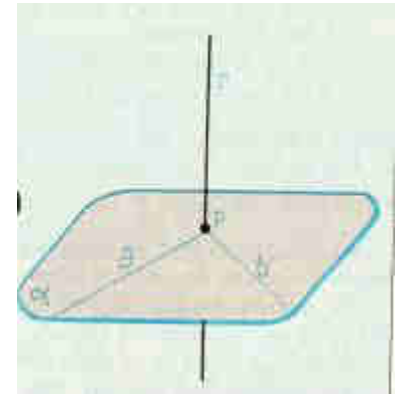
- $r$  è parallela ad  $\alpha$  se non hanno punti in comune
- $r$  appartiene ad  $\alpha$  se tutti i punti di  $r$  sono anche punti di  $\alpha$
- $r$  è incidente con  $\alpha$  se  $r$  e  $\alpha$  hanno un punto  $P$  in comune

In questo ultimo caso la retta  $r$  forma un **angolo** con il piano  $\alpha$ .  
Tale angolo si ottiene proiettando i punti di  $r$  su  $\alpha$  ed è minore dell'angolo che  $r$  forma con una qualunque altra retta di  $\alpha$  passante per il punto di intersezione  $P$ .



Un caso particolare del precedente si ha quando l'angolo che  $r$  forma con  $\alpha$  è  $90^\circ$ .

Diremo che  $r$  è perpendicolare al piano  $\alpha$  se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza  $P$ .



## Il teorema delle tre perpendicolari

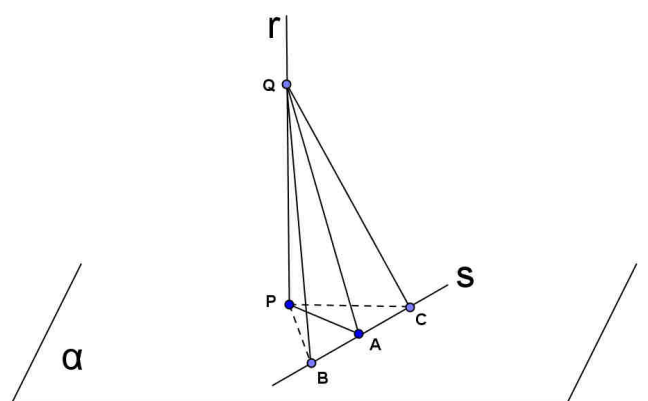
Se dal piede  $P$  di una retta  $r$  perpendicolare ad un piano  $\alpha$ , si traccia la perpendicolare  $AP$  ad una retta  $s$  del piano  $\alpha$ , se  $Q$  è un qualunque punto su  $r$ , allora  $QA$  è perpendicolare alla retta  $s$ .

Prendiamo i punti  $B$  e  $C$  sulla retta  $s$  in modo che  $\overline{BA} = \overline{AC}$ .

Si osserva che i triangoli  $\triangle PAB$  e  $\triangle PAC$  sono congruenti e quindi  $\overline{PB} = \overline{PC}$ .

Ma allora anche i triangoli  $\triangle QPB$  e  $\triangle QPC$  sono congruenti e quindi  $\overline{QB} = \overline{QC}$ .

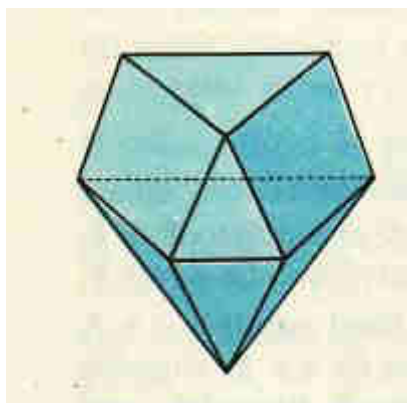
Allora il triangolo  $\triangle QBC$  è isoscele e poiché  $QA$  è mediana risulta anche altezza e quindi  $QA$  è perpendicolare alla retta  $s$ .



## Poliedri

### Definizione di poliedro

Si chiama **poliedro convesso** la porzione di spazio delimitata da poligoni a due a due non complanari tale che ogni lato dell'uno sia in comune ad un altro di essi e il piano individuato da ogni poligono lasci tutti gli altri dalla stessa parte.



Per tutti i poliedri convessi vale la

### Relazione di Eulero

*Dato un qualunque poliedro convesso, indicato con  $F$  il numero delle facce, con  $V$  il numero dei vertici e con  $S$  il numero degli spigoli si ha che  $F+V=S+2$*

#### *Dimostrazione*

Consideriamo una sola faccia:  $F=1$  e  $V=S$ , per cui

$$F+V=S+1. \quad (*)$$

Aggiungiamo un'altra faccia:  $F$  aumenterà di 1 e se  $V$  aumenta di  $x$ ,  $S$  aumenterà della quantità  $x+1$ , e quindi vale ancora che

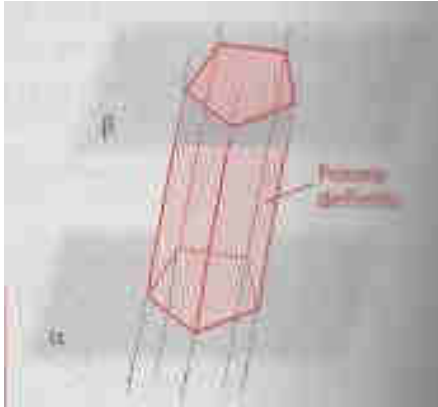
$$(F+1)+(V+x)=(S+x+1) + 1$$

e la relazione (\*) resta invariata.

Continuiamo ad aggiungere così una faccia alla volta in modo che alla fine rimanga da aggiungere solo l'ultima faccia: in questo caso  $F$  aumenterà di 1 e  $V$  e  $S$  rimarranno invariati, perciò si avrà

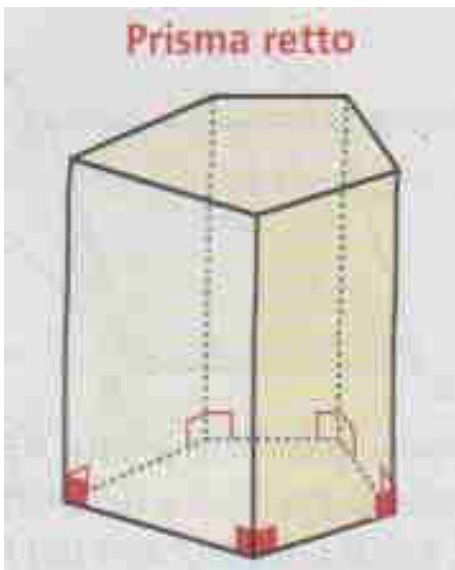
$$F+V=S+2$$

## Prisma



Un **prisma** è un poliedro delimitato da due basi uguali e ugualmente disposte su piani paralleli, avente per facce laterali dei parallelogrammi ottenuti congiungendo i vertici corrispondenti dei poligoni di base.

La distanza tra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma.



Un prisma è **retto** se le facce laterali sono perpendicolari ai piani delle basi e se perciò le facce laterali sono rettangoli.

In un prisma retto gli spigoli laterali sono anche altezze.

Un prisma retto è **regolare** se ciascuna delle basi è un poligono regolare.

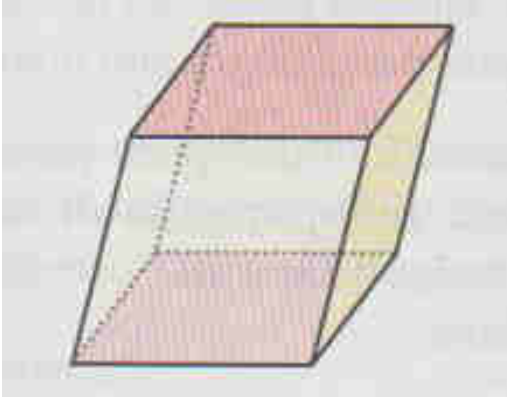
### Volume e superficie di un prisma retto

$$\begin{aligned} S_L &= 2p_{base} \cdot h \\ S_T &= 2 \cdot S_{base} + S_L \\ V &= S_{base} \cdot h \end{aligned}$$

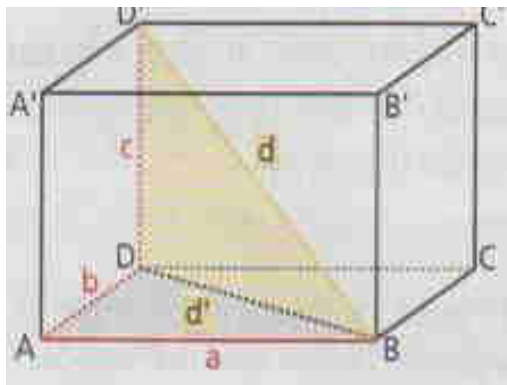


## Parallelepipedo

Un **parallelepipedo** è un prisma in cui anche le basi sono parallelogrammi.



Le facce del parallelepipedo sono a due a due congruenti e parallele.



Un parallelepipedo è **rettangolo** se ha per facce rettangoli a due a due opposti, congruenti e paralleli. E' un prisma retto che ha per basi dei rettangoli.

### Volume e superficie di un parallelepipedo rettangolo

$$\begin{aligned}
 S_L &= 2p_{base} \cdot h = 2(a+b)c \\
 S_T &= 2 \cdot S_{base} + S_L = 2ab + 2(a+b)c = 2(ab + bc + ac) \\
 V &= S_{base} \cdot h = abc \\
 d &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}
 \end{aligned}$$

## Cubo

Il cubo o esaedro regolare è un poliedro che ha per facce sei quadrati uguali. E' evidente che il cubo è un particolare parallelepipedo, avente le tre dimensioni uguali:  $a=b=c=l$ .

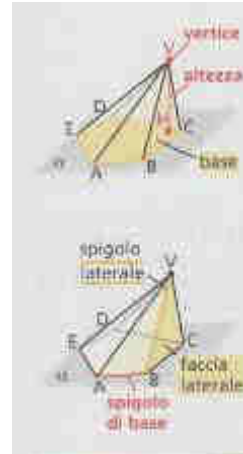
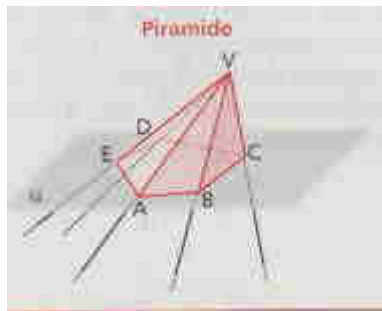
### Volume , superficie , diagonale di un cubo di lato $l$

$$\begin{aligned}
 S_T &= 6l^2 \\
 V &= S_{base} \cdot h = l^3 \\
 d &= \sqrt{(\sqrt{2}l)^2 + l^2} = \sqrt{3}l
 \end{aligned}$$

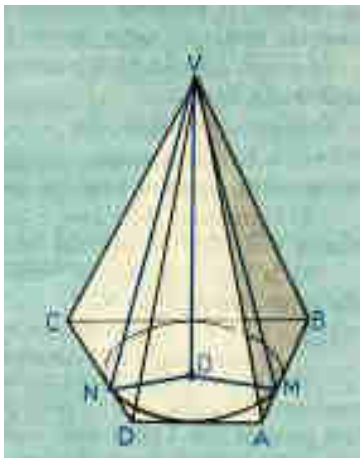
## Piramide

La **piramide** si ottiene tagliando un angoloide con un piano che non passi per il vertice e che incontri tutti gli spigoli. E' perciò un poliedro limitato da un poligono (base) e da triangoli (facce laterali).

A seconda del tipo di poligono di base si parla di piramide triangolare o tetraedro, quadrangolare, pentagonale....



L'**altezza** della piramide è la distanza dal vertice V al piano della base.



Una piramide dice **retta** se il poligono di base è circoscrivibile ad una circonferenza e l'altezza cade nel centro di questa.

Se una piramide è retta, **le altezze delle facce laterali sono tutte uguali e prendono il nome di apotema che indichiamo con  $a$ .**

Una piramide retta si dice **regolare** se il poligono di base è un poligono regolare.

### Superficie e volume di una piramide retta

$$a^2 = h^2 + r^2$$

$$S_L = \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

$$S_T = S_{base} + S_L = S_{base} + \frac{1}{2}(2p_{base} \cdot a)$$

$$V = \frac{1}{3}S_{base} \cdot h$$

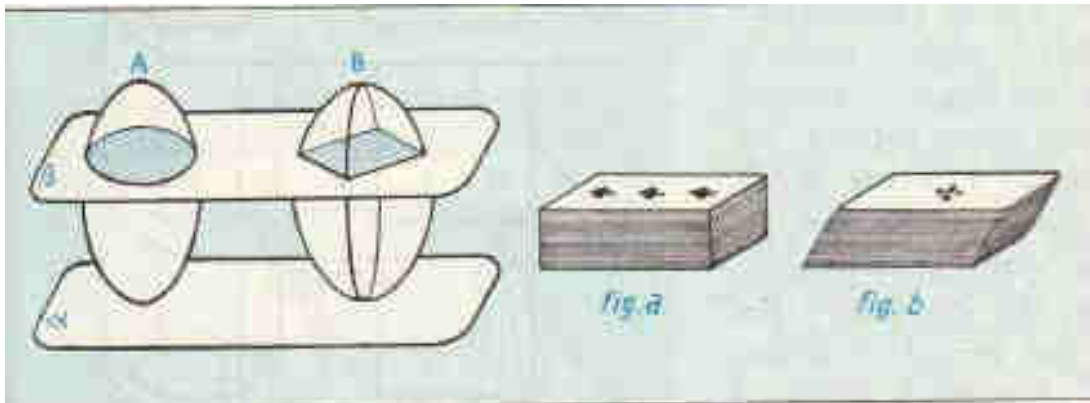


## Volume della piramide

Per ricavare il volume della piramide enunciamo prima di tutto il

### Principio di Cavalieri

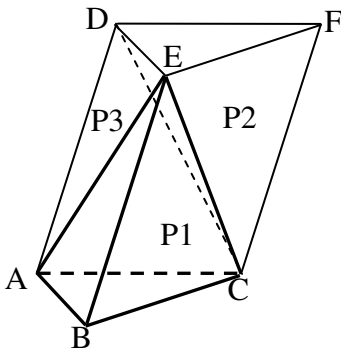
*Due solidi che si possono disporre rispetto ad un piano in modo che ogni piano parallelo a questo individui su di essi sezioni equivalenti, sono tra loro equivalenti, hanno cioè lo stesso volume.*



Utilizzando questo principio si può dimostrare (provaci...) che **due piramidi che hanno basi equivalenti e stessa altezza hanno lo stesso volume.**

Passiamo ora a dimostrare la formula per ricavare il volume di una piramide.

a) Iniziamo dimostrando la formula per una **piramide a base triangolare.**



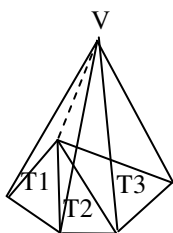
Consideriamo la piramide a base triangolare  $ABCE$  e costruiamo un prisma avente la stessa base  $ABC$  e  $BE$  come spigolo laterale.

Il piano  $ACE$  divide il prisma in due piramidi: la piramide  $ABCE$  ( $P1$ ) e la piramide  $ADFCE$  ( $P2+P3$ ) che può essere scomposta nelle piramidi  $P2$  e  $P3$  dal piano  $EDC$ . Si osserva che  $P2$  e  $P3$ , avendo basi  $ADC$  e  $DFC$  equivalenti (entrambe metà dello stesso parallelogrammo), e la stessa altezza (avendo lo stesso vertice  $E$ ) sono equivalenti. D'altra parte  $P2$  e  $P1$  sono equivalenti avendo basi  $ABC$  e  $EFG$  congruenti e stessa altezza (quella del prisma).

Segue che  **$P1$ ,  $P2$ , e  $P3$  sono equivalenti** e la piramide  $P1$  ha volume pari alla terza parte del prisma.

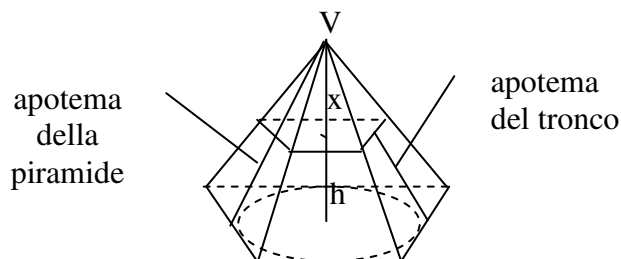
b) Poiché **una qualunque piramide a base poligonale può essere scomposta in più piramidi a base triangolare aventi tutte la stessa altezza** si ha che

$$V = \frac{1}{3} S_{T1} \cdot h + \frac{1}{3} S_{T2} \cdot h + \dots + \frac{1}{3} S_{Tn} \cdot h = \frac{1}{3} S_{base} \cdot h$$



## Tronco di piramide

Il **tronco di piramide** si ottiene tagliando una piramide con un piano parallelo alla base.



L'**altezza** del tronco di piramide è la distanza tra i piani delle basi .

Un tronco di piramide si dice **tronco di piramide retta** se è stato ottenuto sezionando una piramide retta.

Un tronco di piramide retta si dice **tronco di piramide regolare** se il poligono di base è regolare.

Nel tronco di piramide retta le altezze delle facce laterali, che sono tutte trapezi, sono tutte uguali e prendono il nome di **apotema del tronco**  $a_t$ .

### Volume e superficie di un tronco di piramide retta

Indichiamo con  $B$  la base maggiore e con  $b$  quella minore

$$S_L = \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t]$$

$$S_T = B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t]$$

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb}) \cdot h$$

Dimostriamo la formula per il volume.

Per la similitudine si ha  $\frac{x^2}{(x+h)^2} = \frac{b}{B}$  da cui  $\frac{x}{(x+h)} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$

e quindi si ha

$$x \cdot \sqrt{B} = \sqrt{b}(x+h)$$

$$x = \frac{\sqrt{b} \cdot h}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} \cdot h(\sqrt{B} + \sqrt{b})}{B - b}$$

e quindi

$$V = \frac{1}{3}B(x+h) - \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}[Bh + (B-b)x] = \frac{1}{3}[Bh + \sqrt{b} \cdot h(\sqrt{B} + \sqrt{b})] =$$

$$\frac{1}{3}[Bh + h\sqrt{Bb} + bh] = \frac{h}{3}[B + b + \sqrt{Bb}]$$

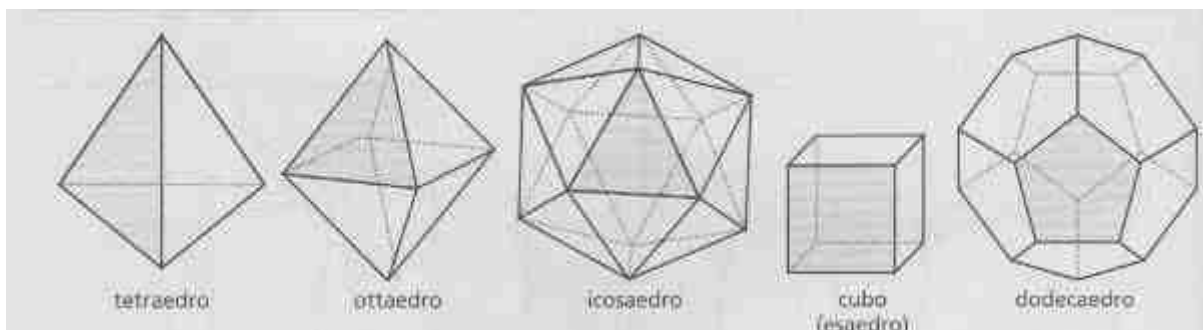
## Poliedri regolari

Un **poliedro** convesso si dice **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari tutti uguali e i suoi angolidi sono uguali.

Quanti sono i poliedri regolari?

Ricordiamo che in un angoloide le facce sono almeno tre e che la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro. Ciò limita la possibilità di ottenere poliedri regolari a cinque casi.

Poligoni regolari	Numero di facce in un vertice	Somma degli angoli delle facce	Nome del poliedro	N. Vertici	N. Spigoli	N. Facce
Triangoli equilateri (angoli 60°)	3	$180^\circ < 360^\circ$	Tetraedro	4	6	4
	4	$240^\circ < 360^\circ$	Ottaedro	6	12	8
	5	$300^\circ < 360^\circ$	Icosaedro	12	30	20
	6	$360^\circ = 360^\circ$	Non esiste			
Quadrati (angoli di 90°)	3	$270^\circ < 360^\circ$	Cubo o Esaedro	8	12	6
	4	$360^\circ = 360^\circ$	Non esiste			
Pentagoni (angoli di 108°)	3	$324^\circ < 360^\circ$	Dodecaedro	20	30	12
	4	$432^\circ > 360^\circ$	Non esiste			
Esagoni (angoli 120°)	3	$360^\circ = 360^\circ$	Non esiste			



Storicamente lo studio dei poliedri regolari si fa risalire a Pitagora nella cui scuola assunsero un ruolo magico e vennero chiamate figure cosmiche. Platone li collegava alle forme degli elementi della natura:

- cubo = particelle di terra
- tetraedro = fuoco
- ottaedro = aria
- icosaedro = acqua
- dodecaedro = la forma dell'Universo

**PROBLEMI  
POLIEDRI**

1. Considera un tetraedro regolare di spigolo  $l$ . Determina superficie e volume. Determina l'angolo diedro  $\alpha$  formato da due facce del tetraedro.

$$[S = \sqrt{3}l^2 \quad ; V = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3; \quad \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \cong 70,5^\circ]$$

2. Considera una piramide retta avente per base un triangolo equilatero  $\triangle ABC$  di lato  $l$  e avente angolo diedro  $\widehat{AHV} = \frac{\pi}{3}$  (AH altezza del triangolo relativa a BC). Determina superficie e volume della piramide.

$$[S = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2; V = \frac{\sqrt{3}}{24}l^3]$$

3. Considera una piramide retta avente per base un triangolo equilatero  $\triangle ABC$  di lato  $l$ . Esprimi in funzione dell'angolo diedro  $x = \widehat{AHV}$  (AH altezza del triangolo relativa a BC, V vertice della piramide) superficie e volume della piramide. Per quale  $x$  il volume risulta  $\frac{l^3}{24}$  ?

$$[S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2(1 + \frac{1}{\cos x}); V(x) = \frac{l^3}{24} \operatorname{tg} x \quad x = \frac{\pi}{4} ]$$

4. Considera una piramide retta avente per base un quadrato ABCD di lato  $l$  e detto  $x = \widehat{OHV}$  (O centro del quadrato, H punto medio di un lato del quadrato, V=vertice piramide) determina superficie e volume della piramide in funzione di  $x$ .

$$[S(x) = l^2(1 + \frac{1}{\cos x}); V(x) = \frac{l^3}{6} \operatorname{tg} x]$$

5. Per quale  $x$  dell'esercizio precedente si ottiene metà di un ottaedro regolare?

$$[\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \cong 54,7^\circ]$$

6. Considera una piramide retta avente per base un esagono regolare di lato  $l$ . Se  $\widehat{OHV} = \frac{\pi}{3}$  dove O è il centro dell'esagono, H il punto medio di uno spigolo di base e V il vertice, determina superficie e volume della piramide.

$$[S = 9\frac{\sqrt{3}}{2}l^2; V = \frac{3}{4}\sqrt{3}l^3]$$

7. Considera una piramide avente per base un rettangolo ABCD con  $\overline{AB} = 2l$  e  $\overline{BC} = l$  e avente il piede dell'altezza O = punto di incontro delle diagonali di base. Se  $\widehat{OHV} = \frac{\pi}{3}$  (dove H = punto medio di BC, V = vertice piramide ) determina superficie e volume della piramide.

$$[S = (4 + \sqrt{13})l^2; V = \frac{2}{3}\sqrt{3}l^3]$$

8. Considera una piramide  $P$  di altezza  $h$  e vertice  $V$  e tagliala con un piano parallelo alla base, distante  $h'$  da  $V$ , individuando così una piramide  $P'$  di altezza  $h'$ . Dimostra che tra il volume  $V$  di  $P$  e il volume  $V'$  di  $P'$  esiste la relazione:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$$

9. A quale distanza  $h'$  dal vertice  $V$  di un tetraedro regolare VABC di spigolo  $l$  si deve condurre un piano parallelo alla base  $\triangle ABC$  in modo da staccare un tetraedro VA'B'C' avente volume pari alla metà del volume del tetraedro VABC ?

$$[h' = \sqrt{\frac{2}{3}}l * \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$$

10. Determina lo spigolo dell'ottaedro regolare inscritto in un cubo di spigolo  $l$  (si congiungono i centri delle facce del cubo).

$$[\frac{l}{2}\sqrt{2}]$$

11. Determina lo spigolo del cubo inscritto in un ottaedro regolare di spigolo  $l$ .

$$[\frac{\sqrt{2}}{3}l]$$

12. Determina lo spigolo del tetraedro regolare inscritto in un tetraedro regolare di spigolo  $l$ .

$$[\frac{l}{3}]$$

## Solidi di rotazione

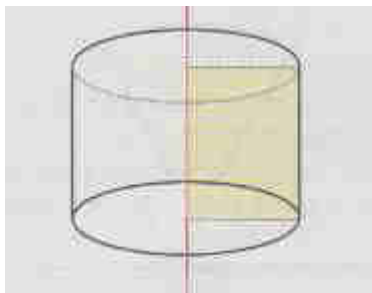
Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno ad una retta  $r$  secondo un angolo  $\alpha$ .

Se  $\alpha$  è un angolo giro allora si dice che la rotazione è **completa**.

In ogni rotazione completa ogni punto  $P$  della figura piana descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare a  $r$  passante per  $P$ .

Fra i solidi di rotazione iniziamo con lo studiare cilindro, cono e sfera.

### Cilindro circolare retto (o semplicemente cilindro)



Il **cilindro circolare retto** (o semplicemente cilindro) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

Il lato attorno a cui ruota il rettangolo è detto altezza del cilindro.

Gli altri due lati perpendicolari all'**altezza** sono detti **raggi di base**.

Un cilindro si dice **equilatero** quando  $h=2r$

### Volume e superficie di un cilindro

$$\begin{aligned} S_L &= 2p_{base} \cdot h = 2\pi r \cdot h \\ S_T &= 2 \cdot B + S_L = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \\ V &= Bh = \pi r^2 \cdot h \end{aligned}$$

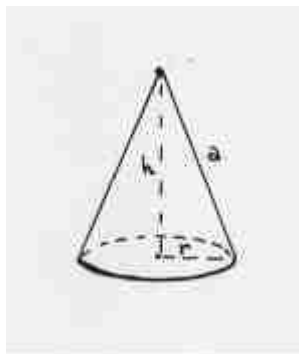
La formula del volume è analoga a quella del prisma poiché per il principio di Cavalieri il cilindro è equivalente ad un prisma che ha base equivalente e uguale altezza.

- Un prisma retto è inscritto in un cilindro se le basi del prisma sono inscritti nelle basi del cilindro
- Un prisma retto è circoscritto ad un cilindro se le basi del prisma sono poligoni circoscritti ai cerchi di base del cilindro ed ogni faccia laterale del prisma è tangente alla superficie laterale del cilindro.



## Cono circolare retto (o semplicemente cono)

Il **cono circolare retto** (o semplicemente cono) è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti.



Il lato attorno a cui ruota il triangolo è detto **altezza**  $h$  del cono. L'altro cateto è il **raggio di base**  $r$ . L'ipotenusa del triangolo rettangolo descrive la superficie laterale ed è detta **apotema**  $a$ .

Un cono si dice **equilatero** quando  $a=2r$ , cioè quando la sezione che si ottiene tagliandolo con un piano perpendicolare alla base passante per il vertice è un triangolo equilatero.

### Volume e superficie di un cono

$$S_L = \frac{1}{2} 2p_{base} \cdot a = \pi r \cdot a$$

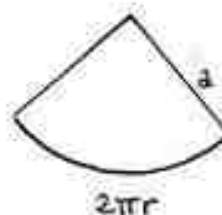
$$S_T = B + S_L = \pi r^2 + \pi r \cdot a$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

La formula del volume è analoga a quella della piramide poiché per il principio di Cavalieri il cono è equivalente ad una piramide avente la stessa altezza e la cui base abbia la stessa area della base del cono.

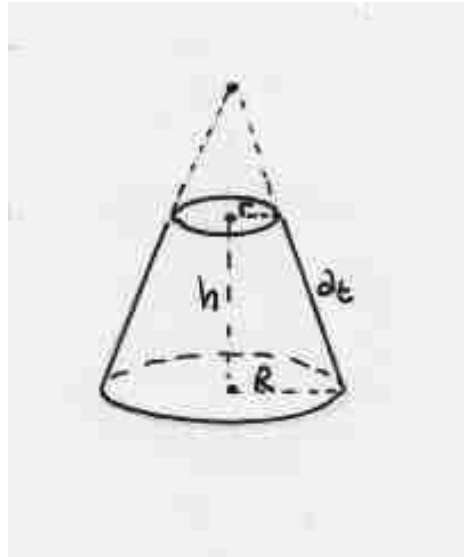
La formula dell'area della superficie laterale si ottiene dal fatto che tale superficie può essere sviluppata in un settore circolare di raggio pari all'apotema  $a$  e perciò essa, ricordando che l'area di un settore circolare è pari a  $\frac{1}{2} * arco * raggio$ ,

$$S_l = \frac{1}{2} 2\pi r a = \pi r a$$



## Tronco di cono

Il **tronco di cono** si ottiene tagliando un cono con un piano parallelo alla base , oppure può essere pensato come la rotazione completa di un trapezio rettangolo intorno al lato perpendicolare alle basi.



### Volume e superficie di un tronco di cono

Con una simbologia ed una dimostrazione analoga a quella vista per il tronco di piramide si ha, indicando con  $B$  la base maggiore di raggio  $R$  , con  $b$  quella minore di raggio  $r$  e con  $a_t$  l'apotema del tronco:

$$S_L = \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t] = \frac{1}{2}[(2\pi R + 2\pi r) \cdot a_t] = \pi(R + r) \cdot a_t$$

$$S_T = B + b + S_L = B + b + \frac{1}{2}[(2p_B + 2p_b) \cdot a_t] = \pi[R^2 + r^2 + (R + r)a_t]$$

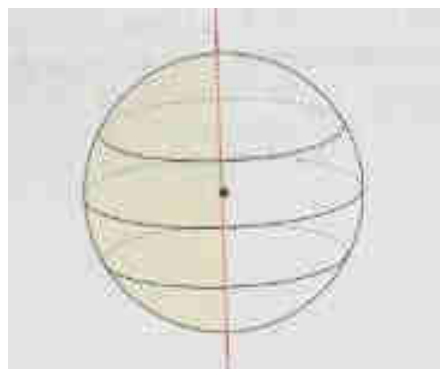
$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb}) \cdot h = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

## Sfera

La **sfera** è il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un semicerchio intorno al diametro, oppure è l'insieme dei punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso, detto centro, è minore o uguale alla lunghezza di un segmento assegnato detto raggio.

I punti per cui la suddetta distanza dal centro è pari al raggio formano la **superficie sferica**.

Tagliando la superficie sferica con un qualunque piano  $\alpha$  si ottiene una circonferenza che ha raggio massimo quando  $\alpha$  passa per il centro.



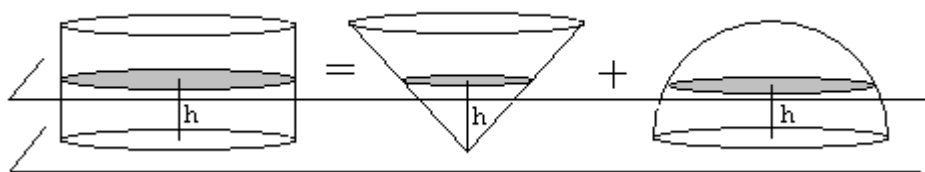
### Volume e superficie di una sfera

$$\boxed{\begin{aligned} S &= 4\pi r^2 \\ V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}}$$

### Volume della sfera

Dimostriamo la formula per il volume mediante passi successivi.

- 1) Un cilindro avente raggio e altezza  $r$  è equivalente alla somma di un cono avente raggio e altezza  $r$  e di una semisfera di raggio  $r$ .



Infatti se taglio i tre solidi con un piano parallelo ad una distanza  $h$  dal piano di appoggio, le sezioni hanno aree rispettivamente  $\pi r^2$ ,  $\pi h^2$  e  $\pi(r^2 - h^2)$  che sono quindi legate dalla seguente relazione

$$\pi r^2 = \pi h^2 + \pi(r^2 - h^2)$$

- 2) Per il principio di Cavalieri si ha

*volume cilindro* = *volume semisfera* + *volume cono* e quindi

$$\text{volumesfera} = V = 2(\text{volumecilindro} - \text{volumecono}) = 2\left(\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

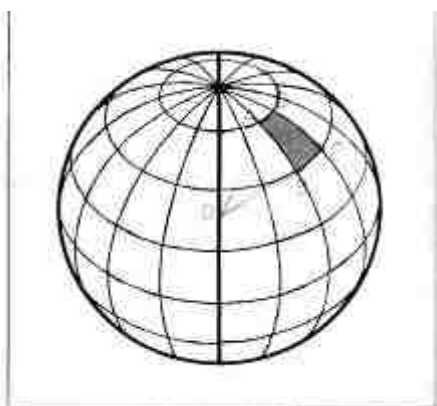
## Superficie della sfera

Dimostriamo ora in modo intuitivo e non rigoroso la formula della misura della superficie.

Supponiamo di dividere la superficie sferica in aree  $A_1, A_2, \dots, A_n$  individuate da paralleli e meridiani.

Possiamo considerare il volume come la somma dei volumi delle  $n$  "piramidi" di base  $A_i$  e altezza  $r$ .

Quindi



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}A_1r + \frac{1}{3}A_2r + \dots + \frac{1}{3}A_nr$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

## Parti della superficie sferica e della sfera

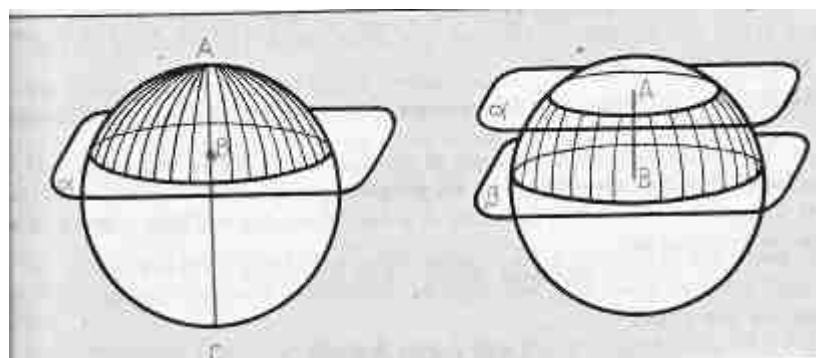
**Calotta** (segmento sferico ad una base) e **zona sferica** (segmento sferico a due basi).

Dato un piano  $\alpha$  secante una sfera, esso divide la sua superficie sferica in due parti ciascuna delle quali è detta **calotta** (la circonferenza della sezione è detta **base** della calotta, il diametro della sfera passante per il centro della base della calotta, incontra la calotta in un punto detto **vertice** e la distanza del vertice al centro della base è detta **altezza** della calotta).

Se invece consideriamo la sfera tagliata da un piano, individuiamo due parti ciascuna delle quali è detta **segmento sferico ad una base**.

Due piani paralleli dividono una superficie sferica in tre parti: due calotte e la parte compresa tra i due piani chiamata **zona sferica** (la distanza tra i centri delle basi della zona sferica è l'**altezza** della zona).

Considerando la sfera tagliata da due piani paralleli, la parte compresa tra i due piani è detta **segmento sferico a due basi**.



### Fuso sferico

Si chiama **fuso sferico** ciascuna delle due parti in cui resta divisa una superficie sferica da due semipiani aventi come origine una retta passante per il centro della sfera.

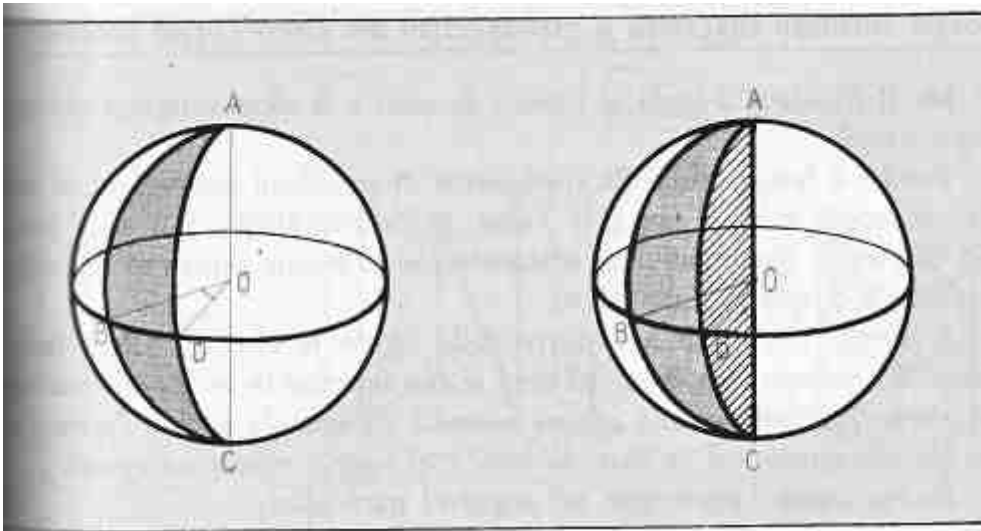
Detta  $\alpha$  l'ampiezza del diedro si ha che

$$S_f : 4\pi R^2 = \alpha^\circ : 360^\circ$$

### Spicchio sferico

Lo **spicchio sferico** è la parte di sfera delimitata da un fuso sferico e dai due semicerchi, lati del fuso

$$V_s : \frac{4}{3}\pi R^3 = \alpha^\circ : 360^\circ$$



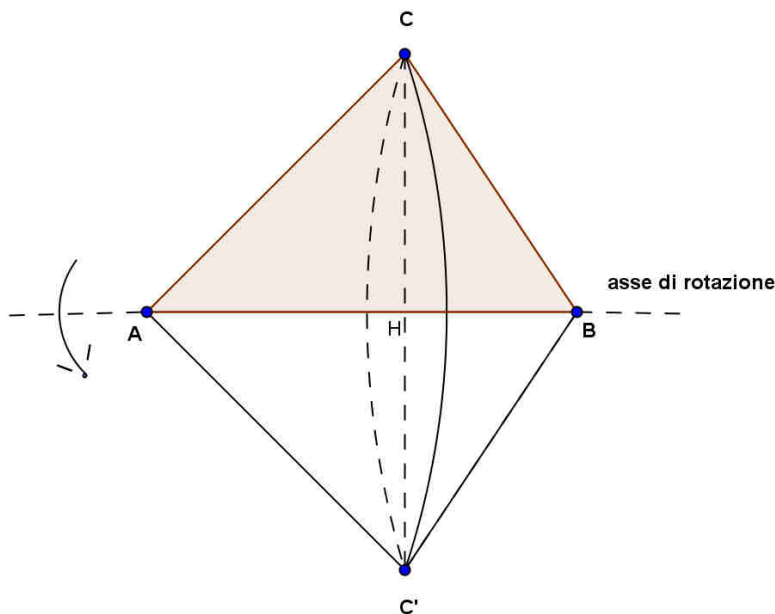
## Altri solidi di rotazione

Oltre a cilindro, cono, sfera possiamo studiare molti altri solidi ottenuti dalla rotazione completa di una figura attorno ad una retta.

Vediamo alcuni esempi.

### Esempio 1

Consideriamo un triangolo, per esempio acutangolo,  $\triangle ABC$  e ruotiamolo intorno alla base  $AB$ . Nella rotazione il vertice  $C$  descriverà una circonferenza di raggio  $\overline{CH}$  (vedi figura) e il solido risulterà costituito da due coni di raggio  $\overline{CH}$  uniti per la base.



Possiamo calcolare superficie e volume del solido ottenuto:

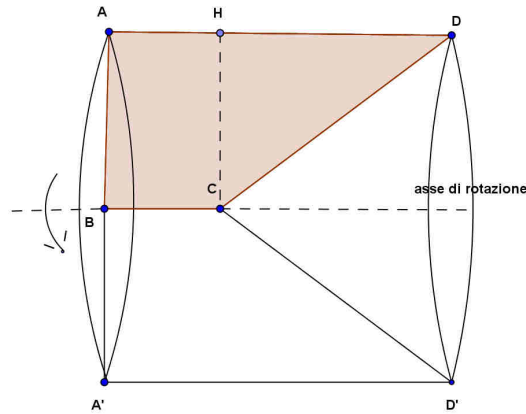
$$S = \pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{AC} + \pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{CB} \quad (\text{somma delle superfici laterali dei due coni})$$

$$V = \frac{\pi}{3} \overline{CH}^2 \cdot \overline{AH} + \frac{\pi}{3} \overline{CH}^2 \cdot \overline{HB} = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{CH}^2 (\overline{AH} + \overline{HB}) = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{CH}^2 \cdot \overline{AB}$$



### Esempio 2

Consideriamo il solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo ABCD intorno alla sua base minore.



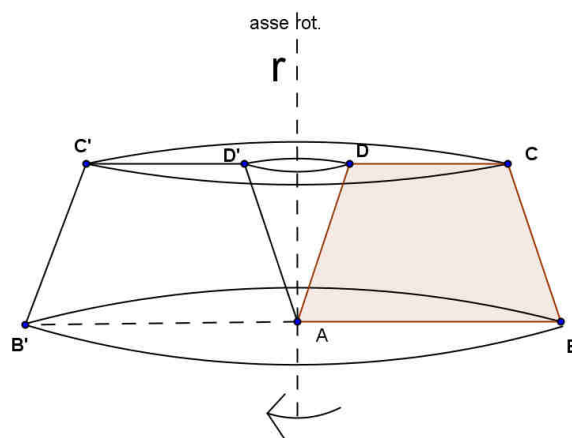
In questo caso otteniamo un *cilindro \ cono* (un cilindro a cui si sottrae un cono) e quindi:

$$S = B_{cilindro} + S_{l(cilindro)} + S_{l(cono)} = \pi \overline{AB}^2 + 2\pi \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \pi \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

$$V = V_{cilindro} - V_{cono} = \pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{AD} - \frac{1}{3} \pi \overline{AB}^2 \cdot \overline{HD}$$

### Esempio 3

Consideriamo il solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio isoscele ABCD attorno alla retta  $r$  (vedi figura).



Si ottiene un *tronco di cono \ cono* e quindi:

$$S = B_{tronco} + b_{tronco} - b_{cono} + S_{l(tronco)} + S_{l(cono)}$$

$$V = V_{tronco} - V_{cono}$$

**PROBLEMI**  
SOLIDI DI ROTAZIONE

1. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo isoscele ABC intorno all' ipotenusa AB. Sapendo che i cateti misurano  $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ , determina superficie e volume del solido.

$$[S = \sqrt{2}\pi a^2; V = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3]$$

2. Considera un trapezio isoscele ABCD avente lato obliquo  $\overline{BC} = l$  e base minore  $\overline{CD} = l$  e gli angoli adiacenti alla base maggiore uguali a  $\frac{\pi}{3}$ . Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio intorno alla base maggiore AB e determinane superficie e volume.

$$[S = 2\sqrt{3}\pi l^2; V = \pi l^3]$$

3. Considera un triangolo ABC avente  $\cos(\hat{CAB}) = -\frac{3}{5}$ ,  $\overline{AC} = l$  e  $\hat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ . Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo intorno al lato AB e determinane la superficie.

$$[S = \frac{52}{25}\pi l^2]$$

4. Considera un triangolo isoscele ABC di base  $\overline{AB} = 2l$  e poni gli angoli alla base uguali ad x. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo intorno alla retta per A perpendicolare ad AB e determinane superficie e volume (in funzione di x). Per quale x il volume risulta  $2\pi\sqrt{3}l^3$ ?

$$[S(x) = 4\pi l^2(1 + \frac{1}{\cos x}); V(x) = 2\pi l^3 \operatorname{tg} x; x = \frac{\pi}{3}]$$

5. Considera un trapezio rettangolo ABCD avente base maggiore  $\overline{AB} = 2l$ , base minore  $\overline{CD} = l$  e  $\hat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ . Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base minore CD e determinane superficie e volume.

$$[S = \pi l^2(5 + \sqrt{2}); V = \frac{5}{3}\pi l^3]$$

6. Determina il raggio r della sfera inscritta e il raggio R della sfera circoscritta ad un cono di raggio l e altezza 2l.

$$[r = \frac{2l}{\sqrt{5} + 1}; R = \frac{5}{4}l]$$

7. Determina il raggio r della sfera inscritta e il raggio R della sfera circoscritta ad un cono equilatero di diametro l.

$$[r = \frac{l}{6}\sqrt{3}; R = \frac{l}{\sqrt{3}}]$$

8. Determina il raggio r della sfera inscritta e il raggio R della sfera circoscritta ad un

- a) cubo di spigolo l;  
b) tetraedro regolare di spigolo l;  
c) ottaedro regolare di spigolo l.

$$[r = \frac{l}{2}; R = \frac{l\sqrt{3}}{2}; r = \frac{l\sqrt{6}}{12}; R = \frac{l\sqrt{6}}{4}; r = \frac{l}{\sqrt{6}}; R = \frac{l}{\sqrt{2}}]$$

**PROBLEMI DI RICAPITOLAZIONE**  
**GEOMETRIA DELLO SPAZIO**

1) Sia  $ABCV$  una piramide retta avente per base un triangolo equilatero  $\hat{ABC}$  di lato  $l$ . Detto  $O$  il piede dell'altezza  $VO$  e posto  $x = \hat{OBV}$ , determina superficie e volume della piramide in funzione di  $x$ . Per quale  $x$  il volume risulta  $V = \frac{l^3}{12}$  ?

$$[ S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 (1 + \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 x + 1}) ; V(x) = \frac{l^3}{12} \operatorname{tg} x ; x = \frac{\pi}{4} ]$$

2) Considera una piramide avente per base un rettangolo  $ABCD$  con  $\overline{AB} = a$  e  $\overline{BC} = 2a$ . Supponendo che l'altezza cada nel punto di incontro  $O$  delle diagonali di base e detto  $x = \hat{OHV}$ , dove  $H$  è il punto medio di  $BC$ , determina, in funzione di  $x$ , superficie e volume della piramide.

Per quale valore di  $x$  il volume risulta  $V = \frac{a^3}{\sqrt{3}}$  ?

$$[ S(x) = 2a^2 + \frac{a^2}{\cos x} + \frac{a^2}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4} ; V(x) = \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} x ; x = \frac{\pi}{3} ]$$

3) Considera il triangolo  $\hat{ABC}$  avente  $\overline{AB} = \overline{AC} = l$  e  $\hat{CAB} = \frac{2}{3}\pi$ . Determina superficie e volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa di  $\hat{ABC}$  intorno ad  $AB$ .

$$[ S = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} + 1) \pi l^2 ; V = \frac{\pi}{4} l^3 ]$$

4) Considera un trapezio rettangolo  $ABCD$  retto in  $A$  e in  $D$ , avente  $\overline{AD} = \overline{DC} = a$  e base maggiore  $\overline{AB} = 2a$ . Determina superficie e volume del solido che si ottiene ruotando  $ABCD$  intorno alla retta per  $BC$  (lato obliquo).

$$[ S = 4\sqrt{2}\pi a^2 ; V = \frac{7}{6}\sqrt{2}\pi a^3 ]$$

- 5) Considera una piramide retta avente per base un quadrato ABCD di lato  $l$ . Detto O il piede dell'altezza OV e posto  $x = \widehat{OCV}$ , determina, in funzione di  $x$ , superficie e volume della piramide.

Determina per quale  $x$  il volume risulta  $V = \frac{\sqrt{2}}{6} l^3$ .

Se la piramide viene sezionata con un piano parallelo alla base staccando un segmento  $\overline{VK} = \frac{1}{3} \overline{VO}$ , determina il rapporto tra il volume del tronco di piramide che si ottiene e il volume della piramide ABCDV.

$$[ S(x) = l^2 \left( 1 + \sqrt{2 \operatorname{tg}^2 x + 1} \right); V(x) = \frac{\sqrt{2}}{6} l^3 \operatorname{tg} x; x = \frac{\pi}{4}; \frac{V_{\text{tronco}}}{V_{\text{piramide}}} = \frac{26}{27} ]$$

- 6) Considera un triangolo  $\triangle ABC$  avente  $\overline{AB} = \frac{25}{2} a$ ,  $\operatorname{tg} \widehat{BAC} = \frac{4}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \widehat{ABC} = \frac{3}{4}$ . Determina superficie e volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di  $\triangle ABC$  intorno alla retta per C parallela ad AB.

$$[ S = 255\pi a^2; V = 300\pi a^3 ]$$

- 7) Considera una piramide retta avente per base un quadrato ABCD di lato  $l$  e, detto H il punto medio di BC e O il centro del quadrato, supponi che  $\widehat{OHV} = \frac{\pi}{3}$ .

Determina superficie e volume della piramide.

Determina il raggio  $r$  della sfera inscritta.

$$[ S = 3l^2; V = \frac{\sqrt{3}}{6} l^3; r = \frac{l\sqrt{3}}{6} ]$$

- 8) Dato un cono di raggio  $r$  e altezza  $h$ , esprimi in funzione di  $r$  e  $h$  il raggio  $r_i$  della sfera inscritta nel cono e il raggio  $r_c$  della sfera circoscritta al cono.

$$[ r_i = \frac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}; r_c = \frac{r^2 + h^2}{2h} ]$$

- 9) Considera una piramide retta di vertice V e avente per base un triangolo equilatero  $\triangle ABC$  di lato  $l$ . Indicato con O il piede dell'altezza, sapendo che  $\widehat{OAV} = \frac{\pi}{6}$ , determina superficie e volume della piramide. Calcola inoltre (approssimandolo con l'uso della calcolatrice) l'angolo diedro  $\alpha$  formato tra la faccia laterale e il piano di base della piramide.

$$[ S = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}\right)l^2 ; V = \frac{\sqrt{3}}{36}l^3 ; \alpha \cong 49,14^\circ ]$$

- 10) Considera una piramide avente per base un triangolo rettangolo  $\triangle ABC$ , retto in A, con  $\overline{AB} = 3a$  e  $\overline{AC} = 4a$ . Sia  $\overline{AV} = a$  l'altezza della piramide. Determina superficie e volume della piramide. Determina inoltre il volume del tronco di piramide ottenuto sezionando la piramide data con un piano parallelo alla base passante per il punto medio di VA.

$$[ S = 16a^2 ; V = 2a^3 ; V_T = \frac{7}{4}a^3 ]$$

- 11) Considera un trapezio isoscele di base minore  $\overline{DC} = 2l$  e lato obliquo di misura  $l$ . Se  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = \frac{\pi}{4}$  determina la superficie e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base minore.

$$[ S = \pi l^2 (3\sqrt{2} + 2) ; V = \frac{(3 + \sqrt{2})}{3} \pi l^3 ]$$

- 12) Considera un triangolo  $\triangle ABC$  avente  $\cos \hat{A} = -\frac{7}{25}$  e  $\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$  e  $\overline{AB} = 5l$ . Disegna il solido che si ottiene dalla rotazione completa di  $\triangle ABC$  intorno alla retta per AB. Calcola superficie e volume.

$$[ S = \frac{312}{5} \pi l^2 ; V = \frac{192}{5} \pi l^3 ]$$

- 13)\*Considera una piramide avente per base il quadrato ABCD di lato  $l$  e avente altezza  $\overline{VA} = l$  (osserva che non si tratta di una piramide retta). Determina superficie e volume della piramide (ricorda il teorema delle tre perpendicolari...).

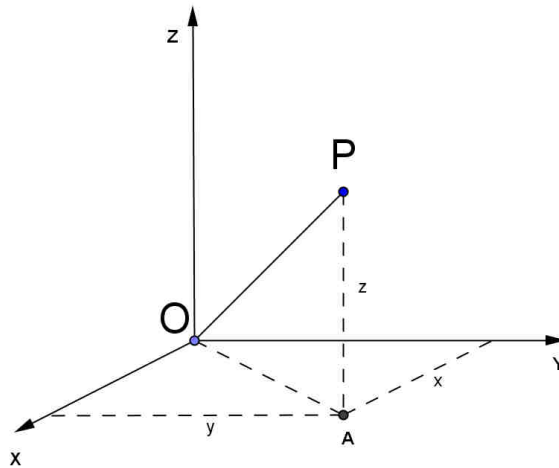
$$[ S = 2l^2 + \sqrt{2}l^2 ; V = \frac{l^3}{3} ]$$

# Geometria analitica dello spazio

## Il sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio

Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio è costituito da tre rette  $x, y, z$  incidenti in  $O$  (origine), a due a due perpendicolari ed orientate come in figura: un qualsiasi punto  $P$  del piano è quindi individuato da una terna ordinata di numeri reali  $(x; y; z)$  detti rispettivamente ascissa, ordinata e quota.

Il punto  $A(x; y)$  rappresenta la proiezione di  $P$  sul piano  $Oxy$ .



## Distanza di un punto dall'origine del sistema

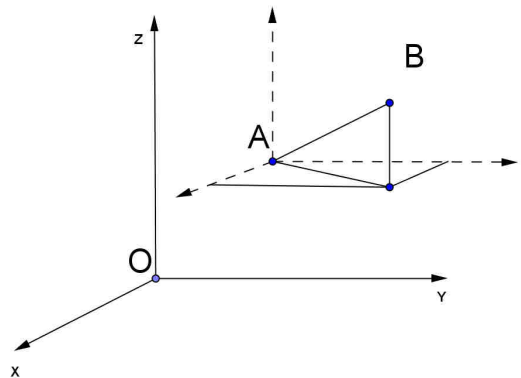
La distanza  $\overline{OP}$  si può calcolare determinando prima  $\overline{OA}^2 = x^2 + y^2$  e poi applicando ancora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo  $OAP$  (retto in  $A$ ):  $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + z^2$ .

In conclusione : 
$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

## Distanza tra due punti

Dati due punti  $A(x_A; y_A; z_A)$  e  $B(x_B; y_B; z_B)$  la distanza  $\overline{AB}$  si calcola in modo analogo al procedimento usato per la distanza di un punto dall'origine, pensando di portare l'origine del sistema di riferimento in  $A$  e si ha quindi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$





## Vettori

Nella geometria analitica dello spazio è particolarmente utile saper operare con i vettori.

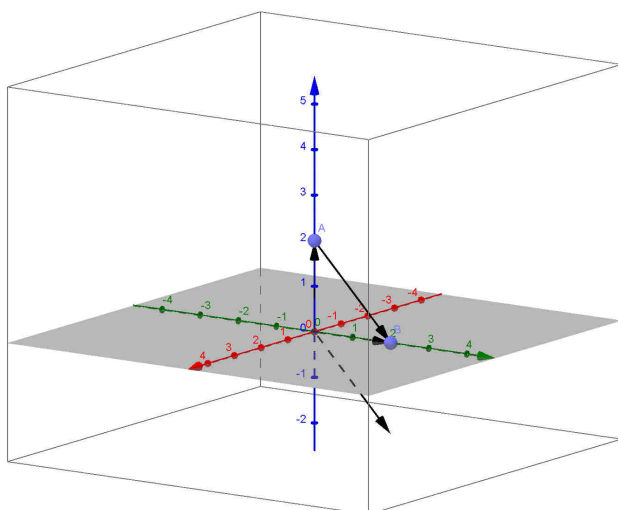
Osserviamo che ad un punto  $P(x; y; z)$  possiamo sempre associare il vettore  $\overrightarrow{OP}$  dove  $O$  è l'origine del sistema di riferimento.

### Somma di vettori

Se consideriamo i vettori  $\overrightarrow{OA}$  con  $A(x_A; y_A; z_A)$  e  $\overrightarrow{OB}$  con  $B(x_B; y_B; z_B)$  si dimostra facilmente che  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  è un vettore applicato nell'origine e avente come secondo estremo il punto  $(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B)$ .

### Differenza di vettori

Se consideriamo i vettori  $\overrightarrow{OA}$  con  $A(x_A; y_A; z_A)$  e  $\overrightarrow{OB}$  con  $B(x_B; y_B; z_B)$  si osserva che  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  è un vettore applicato nell'origine e avente come secondo estremo il punto  $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$  è parallelo al vettore  $\overrightarrow{AB}$ .



Consideriamo per esempio  $A(0,0,2)$  e  $B(0,2,0)$ : il vettore  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  ha come secondo estremo  $(0,2,-2)$  ed è parallelo al vettore  $\overrightarrow{AB}$

### Vettori perpendicolari

Consideriamo due vettori  $\overrightarrow{OA}(x_A, y_A, z_A)$  e  $\overrightarrow{OB}(x_B, y_B, z_B)$ : se sono perpendicolari il triangolo  $OAB$  è retto in  $O$  e quindi applicando il teorema di Pitagora avremo:

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 + x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Sviluppando, dopo aver semplificato, otteniamo  $x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B = 0$

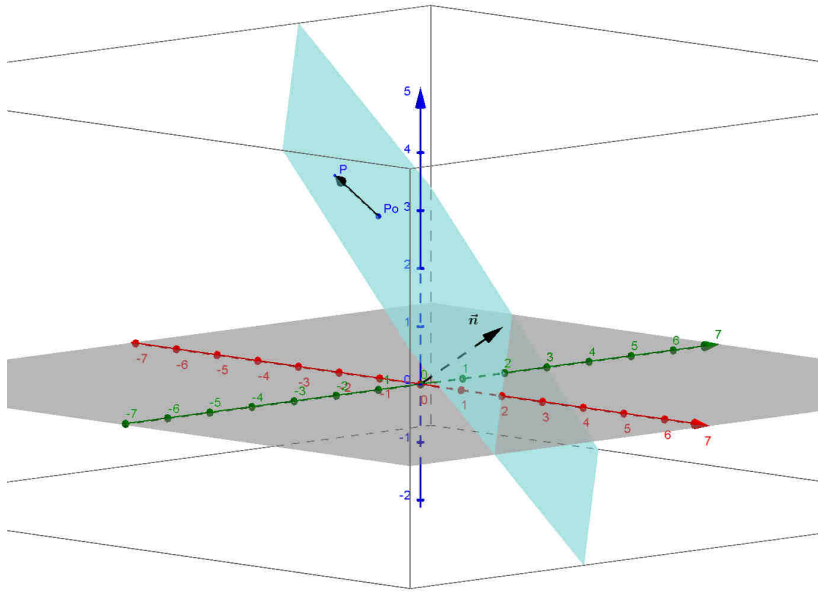
Ma il prodotto scalare tra due vettori risulta proprio (prova a dimostrarlo):

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (x_A, y_A, z_A) \cdot (x_B, y_B, z_B) = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B$$

e quindi **due vettori sono perpendicolari quando il loro prodotto scalare è nullo.**

## Equazione di un piano

Consideriamo un piano  $\alpha$  : possiamo individuarlo conoscendo un vettore  $\vec{n}(a,b,c)$  perpendicolare ad esso (viene chiamato **vettore normale**) e un punto  $P_o(x_o, y_o, z_o) \in \alpha$ .  
(figura realizzata con Geogebra 3D)



$P \in \alpha \Leftrightarrow \overline{P_oP}$  è perpendicolare ad  $\vec{n}$  e quindi il prodotto scalare  $(a,b,c) \cdot (x-x_o, y-y_o, z-z_o) = 0$  cioè

$$a \cdot (x - x_o) + b \cdot (y - y_o) + c \cdot (z - z_o) = 0$$

Sviluppando abbiamo

$$ax + by + cz - (ax_o + by_o + cz_o) = 0$$

Ponendo  $-(ax_o + by_o + cz_o) = d$  possiamo scrivere in definitiva

$$ax + by + cz + d = 0$$

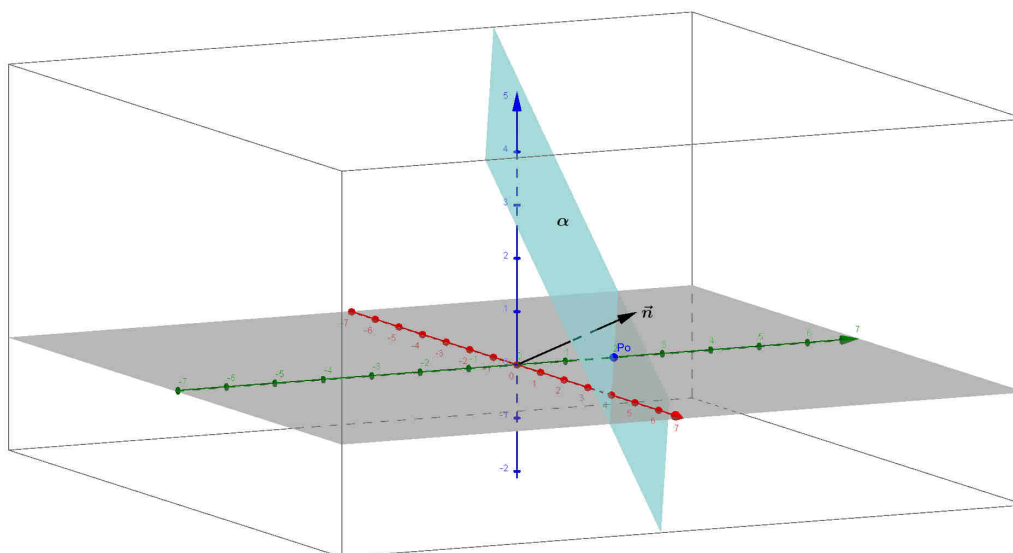
che quindi rappresenta l'equazione di un piano  $\alpha$  perpendicolare al vettore  $\vec{n}(a,b,c)$ .  
Osserviamo che se  $d = 0$  il piano  $\alpha$  passa per l'origine O del sistema di riferimento.

**Esempio**

Supponiamo di avere  $\vec{n}(1,2,1)$  e  $P_o(0,2,0)$ .

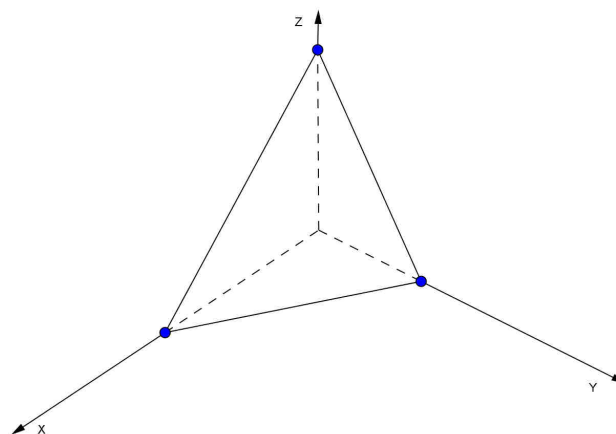
Il piano di vettore normale  $\vec{n}$  passante per  $P_o$  avrà equazione:

$$x + 2 \cdot (y - 2) + z = 0 \rightarrow x + 2y + z - 4 = 0$$



**Nota:** se non abbiamo a disposizione un software 3D e dobbiamo disegnare un piano di data equazione possiamo aiutarci trovando le intersezioni con gli assi.

Nel nostro caso per esempio abbiamo  $A(4,0,0)$ ,  $P_o(0,2,0)$ ,  $B(0,0,4)$



**Osservazioni**

Il piano Oyz ha equazione  $x = 0$  e un piano parallelo al piano Oyz ha equazione  $x = k$ .

Il piano Oxz ha equazione  $y = 0$  e un piano parallelo al piano Oxz ha equazione  $y = k$ .

Il piano Oxy ha equazione  $z = 0$  e un piano parallelo al piano Oxy ha equazione  $z = k$ .

Se  $c = 0 \Rightarrow \alpha$  è parallelo all'asse z;

Se  $b = 0 \Rightarrow \alpha$  è parallelo all'asse y;

Se  $a = 0 \Rightarrow \alpha$  è parallelo all'asse x.

## Piani paralleli

Due piani  $\alpha: ax+by+cz+d=0$  e  $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$  sono paralleli quando i vettori normali sono paralleli e quindi quando  $(a',b',c')=k(a,b,c) \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ .

Se si ha  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}$  i due piani sono coincidenti.

## Piani perpendicolari

Due piani  $\alpha: ax+by+cz+d=0$  e  $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$  sono perpendicolari quando i vettori normali sono perpendicolari cioè quando il loro prodotto scalare è nullo e quindi quando

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0.$$

## Piano passante per tre punti non allineati

Come si determina l'equazione di un piano passante per tre punti assegnati?

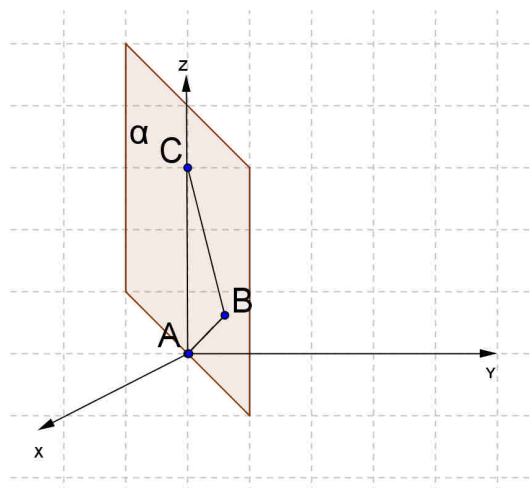
Consideriamo per esempio  $A(0;0;0)$   $B(1;1;1)$  e  $C(0;0;3)$ .

Per determinare le incognite  $a,b,c,d$  dell'equazione  $ax+by+cz+d=0$  possiamo sostituire nell'equazione generale le coordinate dei punti e risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ 3c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a$$

Quindi l'equazione del piano è del tipo:  $ax-ay=0$  e poiché  $a \neq 0$  (altrimenti  $a,b,c$  sarebbero tutti nulli) dividendo per  $a$  possiamo scrivere  $x-y=0$ .

Osserviamo che il piano passa per l'asse  $z$ .



## Equazione di una retta

L'equazione di una retta nello spazio può essere espressa come intersezione di due piani non paralleli e quindi abbiamo:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \left( \text{con } \frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c} \text{ non uguali tra loro} \right)$$

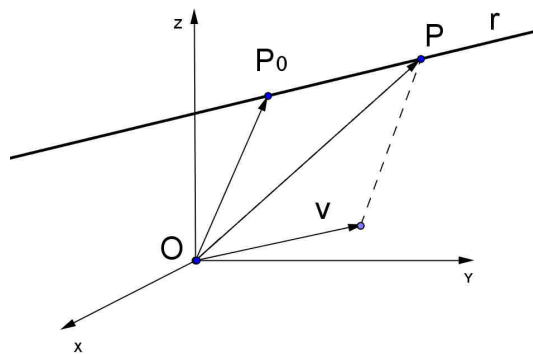
Osservazione: naturalmente coppie diverse di piani incidenti possono rappresentare la stessa retta.

Ma c'è un modo più significativo di scrivere le equazioni di una retta  $r$ : se conosciamo un punto  $P_0 \in r$  e la **direzione della retta** data da un vettore parallelo alla retta  $\vec{v}(a, b, c)$  (chiamato vettore direzione), un qualsiasi punto  $P(x, y, z) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}$  è parallelo a  $\vec{v}$  cioè

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot a \\ y - y_0 = t \cdot b \\ z - z_0 = t \cdot c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases}$$

dove  $t$  è un parametro reale (da qui il nome di **equazioni parametriche** della retta)

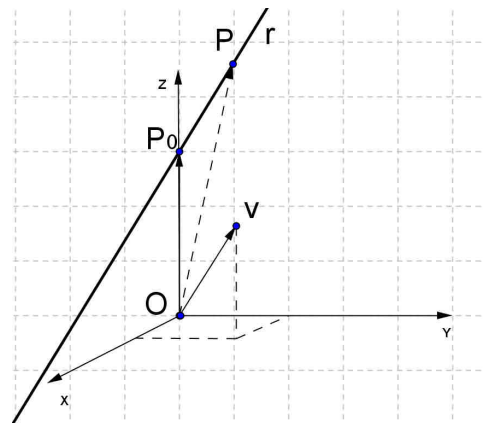
Nella figura seguente è stato disegnato il punto  $P$  corrispondente al valore del parametro  $t = 1$ .



### Esempio

Le equazioni parametriche della retta  $r$  di direzione  $\vec{v}(1, 2, 2)$  passante per  $P_0(0, 0, 3)$  sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t \\ z = 3 + 2 \cdot t \end{cases}$$



### Osservazioni

a) Le equazioni parametriche possono anche essere scritte anche in forma più compatta (è la scrittura che compare nella “vista algebra” di Geogebra 3D):

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(a, b, c)$$

b) Se  $\vec{v}(a, b, c)$  è il vettore direzione della retta, lo sono anche i vettori  $k\vec{v}(ka, kb, kc)$  con  $k \neq 0$

c) Se una retta è data come intersezione di due piani possiamo determinare la sua equazione parametrica ponendo una variabile (tra quelle che compaiono nelle equazioni dei due piani) uguale al parametro  $t$  e ricavando le altre in funzione di  $t$ .

Per esempio se abbiamo  $\begin{cases} 2x - z + 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$  e poniamo  $x = t$  otteniamo  $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t + 3 \end{cases}$

### Retta passante per due punti

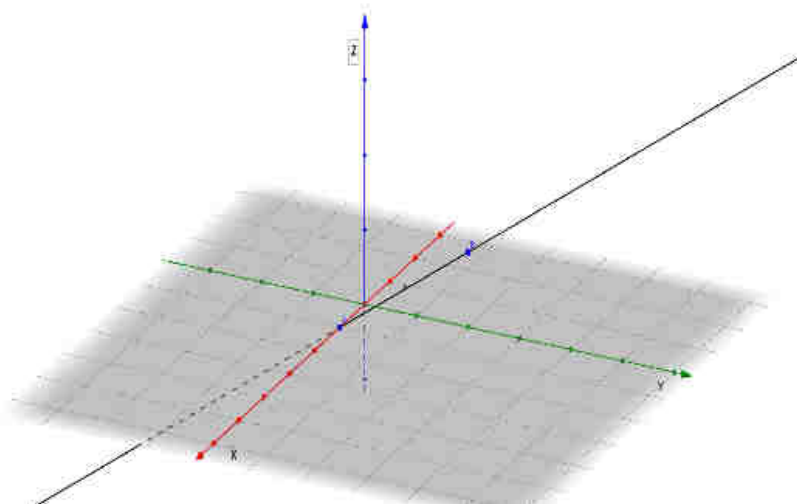
Come possiamo determinare le equazioni parametriche della retta passante per due punti assegnati?

Consideriamo per esempio i punti  $A(1,0,0)$  e  $B(0,2,1)$ .

Se consideriamo i vettori associati ai due punti cioè  $\vec{OA}(1,0,0)$  e  $\vec{OB}(0,2,1)$  appare evidente che la direzione della retta per A e B è data dal vettore  $\vec{AB}$  (o dal vettore opposto) e quindi possiamo prendere come vettore direzione il vettore differenza  $\vec{OB} - \vec{OA}$  cioè  $\vec{v}(-1,2,1)$  e scrivere le equazioni parametriche scegliendo come punto  $P_o$  il punto A oppure B ( a piacere).

Per esempio possiamo scrivere:  $r_{AB} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

Ecco come appare questa retta utilizzando Geogebra 3D :





### Posizione reciproca di due rette

Sappiamo che due rette possono essere incidenti o parallele (se sono complanari) oppure sghembe.

Vediamo come possiamo dedurre dalle equazioni informazioni sulla loro posizione reciproca.

1) Consideriamo per esempio le rette seguenti

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

Si osserva che i vettori direzione delle due rette  $(1;2;-2)$ ,  $(2;4;-4)$  sono paralleli e quindi le rette sono parallele (non sono coincidenti perché si verifica facilmente che non hanno punti in comune).

2) Consideriamo ora le rette di equazione

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

In questo caso i vettori direzione  $(3;2;-1)$ ,  $(1;3;0)$  non sono paralleli. Vediamo allora se le rette hanno un punto in comune oppure no.

Prendiamo il sistema formato dalle equazioni relative a due coordinate, per esempio alla  $y$  e alla  $z$

$$\begin{cases} 2t = 5 + 3\lambda \\ 1 - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato per ora  $y = 2$ ,  $z = 0$ : andiamo a questo punto a sostituire i valori dei parametri nelle rispettive equazioni per trovare l'ascissa:

$$r \rightarrow x = 2, \quad s \rightarrow x = 2$$

Dal momento che abbiamo trovato la stessa ascissa le rette sono incidenti nel punto  $P(2;2;0)$ .

Nota: se due rette incidenti hanno vettori direzione perpendicolari allora sono perpendicolari.

3) Se nell'esempio precedente sostituisco  $2t$  al posto di  $3t$  nell'ascissa di  $r$  cioè

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

quando vado a sostituire i valori trovati di  $t$  e  $\lambda$  non trovo più lo stesso valore anche per l'ascissa e quindi le rette non hanno punti in comune e, non essendo parallele, sono sghembe.

### Distanza tra un punto e un piano

Consideriamo un piano  $\alpha : ax + by + cz + d = 0$  e un punto  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ .

Per calcolare la distanza del punto  $P_0$  dal piano  $\alpha$  si dimostra una formula analoga al caso piano distanza punto – retta cioè si ha

$$d((x_0; y_0; z_0); ax + by + cz + d = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Nota:** per dimostrare questa formula basta considerare l'equazione della retta per  $P_0$  perpendicolare ad  $\alpha$  (che avrà come vettore direzione  $(a; b; c)$ ), intersecarla con  $\alpha$  e detto H il punto di intersezione, calcolare  $\overline{P_0H}$ .

**Esempio:** considera il piano  $\alpha : x + y + z = 0$  e il punto  $P_0(1; 2; 1)$ .

Applicando la formula abbiamo:

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Controlliamo determinando la retta  $r$  passante per  $P_0$  perpendicolare al piano  $\alpha$  e intersecandola con  $\alpha$ : si individua così il punto Q, proiezione ortogonale di  $P_0$  su  $\alpha$ , e la distanza tra  $P_0$  e  $\alpha$  risulta uguale alla distanza  $\overline{P_0Q}$ :

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \rightarrow 1 + t + 2 + t + 1 + t = 0 \rightarrow t = -\frac{4}{3} \rightarrow Q \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \overline{P_0Q} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

### Distanza tra un punto e una retta

Dato un punto  $P_0$  e una retta  $r$  ( $P_0 \notin r$ ), per trovare la distanza tra  $P_0$  e  $r$  si deve trovare l'equazione del piano  $\alpha$  per  $P_0$  perpendicolare ad  $r$ , intersecare  $\alpha$  con la retta  $r$  e detto H il punto di intersezione calcolare  $\overline{P_0H}$ .

**Esempio:** considera il punto  $P_0(0; 0; 1)$  e la retta  $r \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$ .

Il piano per  $P_0$  perpendicolare a  $r$  risulta  $(x; y; z - 1) \cdot (1; 1; 1) = 0 \rightarrow x + y + z - 1 = 0$ : l'intersezione H tra  $\alpha$  e  $r$  risulta

$$t + 2 + t + t - 1 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{3} \rightarrow H\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

In conclusione  $d(r; P_0) = \overline{P_0H} = \sqrt{\frac{14}{3}}$

## Equazioni di superfici

Considereremo solo un semplice esempio e per un approfondimento rimandiamo alla scheda 36 del laboratorio di informatica.

### Superficie di una sfera

Qual è l'equazione di una superficie sferica di centro  $C(x_c; y_c; z_c)$  e raggio  $r$  ?

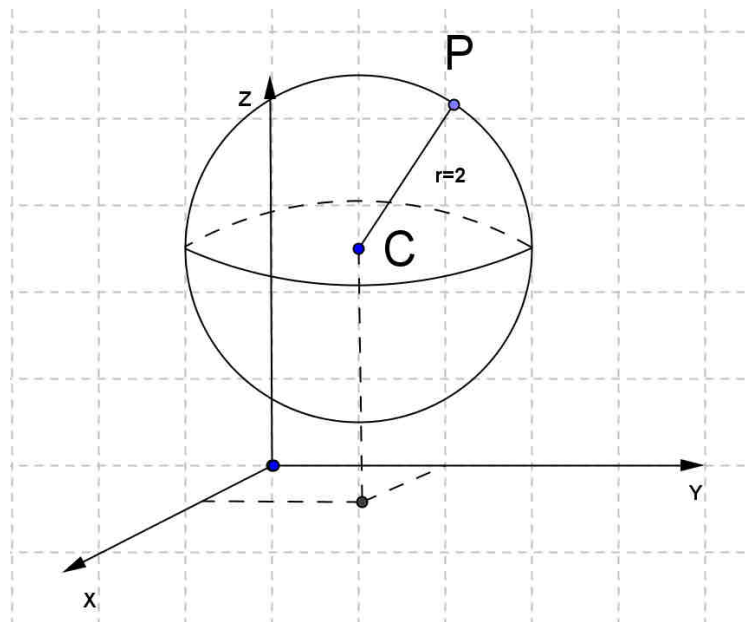
Poiché tutti i punti  $P(x; y; z)$  appartenenti alla superficie sferica hanno distanza  $\overline{PC} = r$  avremo:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

### Esempio

Se  $C(1;2;3)$  e  $r = 2$  abbiamo:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$$



**PROBLEMI**  
GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

**I) Piani nello spazio**

1. Scrivi l'equazione del piano passante per i punti  $A(1;0;0)$   $B(0;-3;1)$   $C(2;-2;0)$ .

[  $2x + y + 5z - 2 = 0$  ]

2. Disegna il piano  $\alpha$  di equazione  $x + 2y - z - 4 = 0$ .

Suggerimento: interseca  $\alpha$  con gli assi coordinati.

3. Determina l'equazione del piano  $\alpha$  passante per  $P(-1;1;1)$  e parallelo al piano  $\beta$  di equazione  $x - 2y + z - 3 = 0$

[  $x - 2y + z + 2 = 0$  ]

4. Determina la distanza tra l'origine e il piano passante per i punti  $A(1;0;0)$   $B(0;1;0)$   $C(0;0;1)$ .

[  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ]

5. Determina la distanza tra i piani  $\alpha: x - y = 0$  e  $\beta: x - y + 2 = 0$  ( $\alpha // \beta$ )

[  $\sqrt{2}$  ]

6. Come risultano i piani  $\alpha: 2x + y + z + 1 = 0$  e  $\beta: 4x + 2y + 2z - 1 = 0$ ?

[paralleli]

7. Come risultano i piani  $\alpha: x - y = 0$  e  $\beta: x + y = 0$ ?

[perpendicolari]

8. Verifica che i punti  $A(1;0;0)$   $B(0;2;0)$   $C(0;0;1)$  e  $D\left(\frac{1}{2};1;0\right)$  sono complanari e determina l'equazione del piano passante per essi.

[  $2x + y + 2z - 2 = 0$  ]

## II) Rette nello spazio

1. Determina le equazioni parametriche della retta  $r$  passante per  $A(-1;4;-5)$  e  $B(0;3;-3)$ .

a) Il punto  $P(1;2;-1)$  appartiene alla retta?

b) Determina l'intersezione di  $r$  con il piano  $xy$ .

$$[r] \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases} ; P \in r ; \left( \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0 \right)$$

2. Scrivi la retta  $r \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$  in forma parametrica.

$$[ \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} ]$$

3. Come risultano le seguenti rette?

$$r \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = -2t \end{cases} ; s \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

[parallele]

4. Come risultano le rette seguenti?

$$r \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 2t \end{cases} ; s \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

[sghembe]

5. Come risultano  $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1; 1; 1)$   
 $s: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(-1; 1; 0)$ ?

[incidenti e perpendicolari]

6. Determina la retta passante per  $P(2; 0; 0)$  e perpendicolare al piano  $x - y = 0$

$$[(x, y, z) = (2; 0; 0) + t(1; -1; 0)]$$

**ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE**  
**GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO**

1. Determina l'equazione del piano passante per i punti  $A(1;0;2)$ ,  $B(0;1;3)$ ,  $C(0;0;3)$ .  
 $[ x + z - 3 = 0 ]$
  
2. Determina l'equazione del piano passante per i punti  $A(-1;0;1)$ ,  $B(0;1;2)$ ,  $C(0;0;2)$ .  
 $[ x - z + 2 = 0 ]$
  
3. Determina l'equazione del piano passante per il punto  $P(-3;2;4)$  e parallelo al piano di equazione  $3x - 2y - z = 5$ .  
 $[ 3x - 2y - z + 17 = 0 ]$
  
4. Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per  $P(4;-2;5)$  e avente come vettore direzione  $\vec{v}(-1;4;0)$ .  
 $[ \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 5 \end{cases} ]$
  
5. Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per i punti  $A(-2;1;0)$  e  $B(1;3;-1)$ .  
 $[ \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases} ]$
  
6. Determina le equazioni parametriche della retta  $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ .  
 $[ \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}t \\ y = 1 - \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} ]$
  
7. Come risultano le rette  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$   $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$  ?  
 $[ \text{sghembe} ]$
  
8. Come risultano le rette  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$   $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -1 - 6\lambda \end{cases}$  ?  
 $[ \text{parallele} ]$

9. Determina l'equazione della retta passante per il punto  $P(-2;5;6)$  perpendicolare alla retta di

$$\text{equazioni } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\left[ \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 5 - 4t \\ z = 6 - 4t \end{cases} \right]$$

10. Come risultano le rette  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$   $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$  ?

[ incidenti in  $P(-2;4;1)$  ]

11. Come risulta la retta  $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$  rispetto al piano di equazione  $x + 2y - z + 1 = 0$  ?

[ incidente nel punto  $P(-8;2;-3)$  ]

12. Come risulta la retta  $\begin{cases} 2x + z = 7 \\ y = 6 \end{cases}$  rispetto al piano di equazione  $4x - 3y + 2z - 1 = 0$  ?

[ parallela ]

13. Determina la distanza del punto  $P(1;2;-1)$  dal piano di equazione  $x + 2y - 3z - 1 = 0$ .

$$\left[ \frac{\sqrt{14}}{2} \right]$$

14. Determina la distanza tra i piani  $\alpha: x - 2y - z - 2 = 0$ ,  $\beta: x - 2y - z + 3 = 0$ .

$$\left[ \frac{5\sqrt{6}}{6} \right]$$

15. Determina l'equazione del piano passante per il punto  $P(1;2;-3)$  e parallelo al piano di equazione  $x - 2y - 3z - 5 = 0$ . Calcola la distanza tra essi.

$$\left[ x - 2y - 3z - 6 = 0, \frac{1}{\sqrt{14}} \right]$$