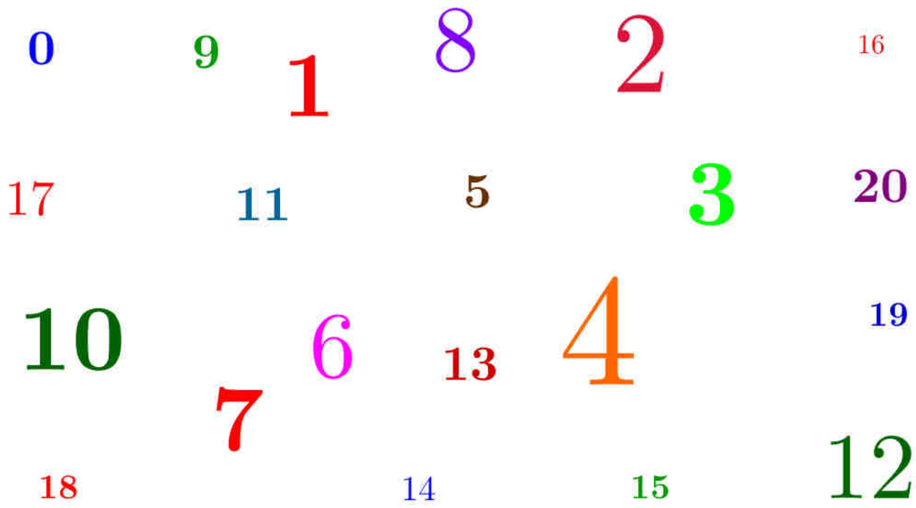
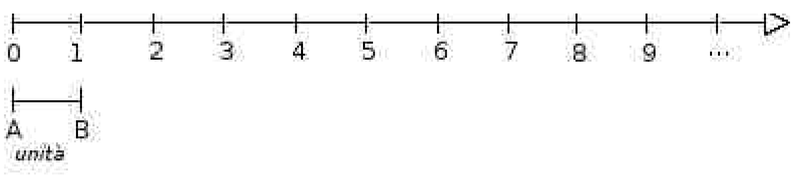
# I numeri naturali




## Quali sono i numeri naturali?

I numeri naturali sono : $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots$
I numeri naturali hanno un **ordine** cioè dati due numeri naturali distinti $a$ e $b$ si può sempre stabilire qual è il loro ordine cioè se $a<b$ ($a$ è minore di $b$) oppure se $a>b$ ($a$ maggiore di $b$).
Per esempio 3<5 mentre 10>2.
L'insieme dei numeri naturali viene indicato con la lettera $\mathbb{N}$.

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta orientata: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra, e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo all'origine e a ogni passo si va al numero successivo.




Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successivo di 0, 2 è il successivo di 1, 3 è il successivo di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successivo e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente.

L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.

# Operazioni tra numeri naturali

## L'addizione e la moltiplicazione

Sappiamo fin dalla scuola elementare cosa significa addizionare (o sommare) due numeri naturali o moltiplicarli. Facciamo solo qualche osservazione sulle proprietà di queste due operazioni.

- Dati due numeri naturali $a$ e $b$ la somma $a+b$ è ancora un numero naturale e anche il prodotto $a \cdot b$ è ancora un numero naturale ( si dice che addizione e moltiplicazione sono operazioni "interne" a $\mathbb{N}$ perché il risultato è ancora all'interno dei numeri naturali).

- Quando sommiamo o moltiplichiamo due numeri non è importante l'ordine in cui li scriviamo cioè

$$a+b=b+a$$

$$a \cdot b=b \cdot a$$

  Diciamo che l'addizione e la moltiplicazione godono della **proprietà commutativa**.

- Quando dobbiamo sommare o moltiplicare più di due numeri possiamo associarli come vogliamo e il risultato non cambia cioè

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$$

  Diciamo che l'addizione e la moltiplicazione godono della **proprietà associativa**.

- Quando dobbiamo moltiplicare un numero per una somma possiamo moltiplicare quel numero per ciascun addendo e sommare i risultati cioè:

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$$

  Diciamo che vale la **proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**.

- Se sommiamo ad un numero qualunque lo zero otteniamo sempre lo stesso numero cioè

$$a+0=a$$

  Lo zero si dice elemento neutro per l'addizione.

- Se moltiplichiamo un numero qualunque per zero otteniamo zero cioè

$$a \cdot 0=0$$

- Se moltiplichiamo un numero per 1 otteniamo il numero stesso cioè

$$a \cdot 1=a$$

  Il numero 1 si dice elemento neutro della moltiplicazione.

## La sottrazione

Ricordiamo che se $a - b = d$ allora $d + b = a$. Per esempio 12-3=9 ed infatti $9 + 3 = 12$.
Quindi la sottrazione "si può fare"nell'insieme dei numeri naturali solo se $a \geq b$.

Osserviamo che per la sottrazione non vale né la proprietà commutativa né la proprietà associativa.
Infatti, per esempio:

$10 - 4 = 6$ mentre $4 - 10$ non ha significato nell'insieme dei numeri naturali e quindi non vale la proprietà commutativa;

(10-2)-1=7 mentre 10-(2-1)=9 e quindi non vale la proprietà associativa.

## La divisione

Ricordiamo che

$a : b = q$ se $q \cdot b = a$ ($a$ si chiama dividendo, $b$ divisore e $q$ quoziente)

Per esempio $12 : 3 = 4$ poiché $4 \cdot 3 = 12$ .
Diciamo che 3 è un divisore di 12 (e che 12 è un multiplo di 3).

**Lo zero nella divisione**

Si possono avere tre casi:

- $a : 0$ con $a \neq 0$ è una **divisione impossibile** poiché non esiste nessun numero che moltiplicato per zero possa dare come risultato un numero diverso da zero.

  Per esempio $3 : 0$ è impossibile

- $0 : 0$ è una **divisione "indeterminata"** nel senso che poiché moltiplicando qualunque numero per zero si ottiene zero questa divisione ha infiniti risultati.

- $0 : b$ con $b \neq 0$ **dà come risultato 0** poiché $0 \cdot b = 0$.

  Per esempio $0 : 3 = 0$

**Proprietà della divisione**

Per la divisione non vale né la proprietà commutativa né la proprietà associativa.
Infatti, per esempio:

10:5=2 ma 5:10 non ha alcun risultato nell'insieme dei numeri naturali e quindi non vale la proprietà commutativa;

$(25:5):5=1$ mentre $25:(5:5)=25$ e quindi non vale la proprietà associativa.

Osserviamo però che se moltiplichiamo per uno stesso numero (diverso da zero) il dividendo e il divisore , il risultato non cambia.
Per esempio:

$$30:6=(30\cdot 2):(6\cdot 2)$$

Possiamo anche dividere dividendo e divisore per uno stesso numero (purché sia divisore di entrambi).
Per esempio:

$$30:6=(30:2):(6:2)$$

Questa proprietà si chiama **proprietà invariantiva** della divisione.

Inoltre vale anche la **proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione** cioè per esempio

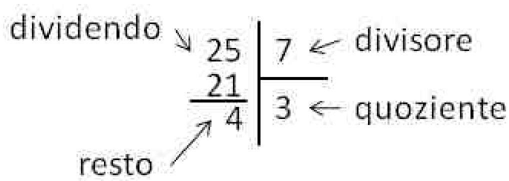
$$(10+2):2=(10:2)+(2:2)$$

cioè $(a+b):c=(a:c)+(b:c)$ se $c$ è un divisore di $a$ e di $b$.

**Nota importante**
Dati due numeri naturali $a$ e $b \neq 0$ se $b$ non è un divisore di $a$ posso in ogni caso effettuare la **divisione con resto** cioè trovare $q$ (quoziente) e $r$ (resto) tali che

$$a=b\cdot q+r$$

Per esempio 25:7 dà 3 come quoziente e 4 come resto poiché $25=7\cdot 3+4$




**Nota:** ricordiamo i **criteri per stabilire se un numero è divisibile per 2,3 5**

- un numero è divisibile per 2 quando la sua cifra delle unità è un numero pari (0,2,4,6,8,);
- un numero è divisibile per 3 quando la somma delle sue cifre è divisibile per 3

  Per esempio 1236 è divisibile per 3 perché 1+2+3+6=12 che è divisibile per 3;
- un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5.

# Potenza

Sappiamo che fare *la potenza* $a^n$ *di un numero* $a$ *(detto base) elevato ad un numero* $n$ *(detto esponente) significa moltiplicare* $a$ *per se stesso* $n$ *volte.*
Per esempio $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

## Proprietà delle potenze

- Quando si moltiplicano due potenze aventi la stessa base si ottiene una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.
  Per esempio

  $$3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6$$

  e quindi in generale possiamo dire che $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

- Quando si dividono potenze con la stessa base si ottiene una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.
  Per esempio

  $$3^4 : 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3) = 3^2$$

  e quindi in generale possiamo dire che $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

- Quando si deve calcolare la potenza di una potenza si moltiplicano gli esponenti.
  Per esempio

  $$(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^8$$

  e quindi in generale possiamo dire che $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- Il prodotto di due potenze aventi gli stessi esponenti è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente l'esponente comune.
  Per esempio

  $$3^4 \cdot 2^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (3 \cdot 2)^4$$

  e quindi in generale possiamo dire che $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

- Il quoziente di due potenze aventi lo stesso esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi (se sono divisibili) e per esponente l'esponente comune.
  Per esempio

  $$8^4 : 2^4 = (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) : (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (8 : 2)^4$$

  e quindi in generale possiamo dire che $a^n : b^n = (a : b)^n$ (se $b$ è un divisore di $a$)

**Osservazione**
Ha senso calcolare la potenza con esponente zero?
Ha senso cioè calcolare per esempio $2^0$?
Consideriamo la divisione $a^n : a^n$ $(a \neq 0)$
Se applichiamo la proprietà delle potenze possiamo scrivere $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$
D'altra parte abbiamo: $a^n : a^n = 1$
Allora se vogliamo attribuire un significato anche alla scrittura $a^0$ dobbiamo porre $a^0 = 1$.

# Le espressioni numeriche

In matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire **dobbiamo chiarire l'ordine con cui si devono eseguire le operazioni**.

Per esempio l'espressione

$$2+3\cdot 4$$

risulta ambigua se non stabiliamo in quale ordine si devono eseguire le operazioni.
Infatti:
• eseguendo per prima la moltiplicazione diventa $2+3\cdot 4=2+12=14$ ;
• eseguendo per prima l'addizione diventa $2+3\cdot 4=5\cdot 4=20$ .

Per eliminare queste ambiguità sono state fissate alcune regole che bisogna rispettare nell'esecuzione dei calcoli.

- Se un'espressione senza parentesi contiene addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte, e poi addizioni e sottrazioni, rispettando l'ordine.

  **Esempio**

  $18:2:9+25-2\cdot 9:3-1=$
  $9:9+25-18:3-1=$
  $1+25-6-1=$
  $26-6-1=$
  $20-1=19$

- Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono per prima le operazioni racchiuse nelle parentesi tonde, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi tonde e si procede con le operazioni racchiuse nelle parentesi quadre. Dopo aver eliminato le parentesi quadre, si eseguono le operazioni nelle parentesi graffe. Si ottiene cosi un'espressione senza parentesi.

  *L'uso di parentesi di diverso tipo rende visivamente più semplice l'ordine da seguire nelle operazioni* ma **in un'espressione tutte le parentesi possono essere tonde**. Ciò accade, per esempio, quando si usano gli strumenti di calcolo elettronico come il computer e la calcolatrice.

  Per esempio:

  $((10:5)+1)^2=(2+1)^2=3^2=9$

# I numeri primi

Un numero si dice **primo** se ha come unici divisori (distinti) 1 e se stesso.

Quindi i numeri primi sono : 2,3,5,7,11,13,17,19…..

I numeri primi, per esempio minori di 100, possono essere individuati con un metodo detto "crivello di Eratostene": si scrivono i numeri da 1 a 100 ; si lascia il 2 e si cancellano tutti i multipli di 2; si lascia il 3 e si cancellano tutti i multipli di 3; andando avanti dopo il 3 si lascia il 5 (che non è stato cancellato) e si cancellano tutti i suoi multipli e così via…

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | 59 | ~~60~~ |
| 61 | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | ~~65~~ | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | ~~69~~ | ~~70~~ |
| 71 | ~~72~~ | 73 | ~~74~~ | ~~75~~ | ~~76~~ | ~~77~~ | ~~78~~ | 79 | ~~80~~ |
| ~~81~~ | ~~82~~ | 83 | ~~84~~ | ~~85~~ | ~~86~~ | ~~87~~ | ~~88~~ | 89 | ~~90~~ |
| ~~91~~ | ~~92~~ | ~~93~~ | ~~94~~ | ~~95~~ | ~~96~~ | 97 | ~~98~~ | ~~99~~ | ~~100~~ |

## Quanti sono i numeri primi ?

Proviamo a fare questo ragionamento: supponiamo che i numeri primi siano solo un certo numero, per esempio 2,3,5,7,11. Consideriamo ora il loro prodotto +1 cioè il numero

$$(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11)+1$$

Questo numero è primo o no?
Proviamo a dividerlo per i nostri numeri primi 2,3,5,7,11 (abbiamo supposto che siano solo questi): vediamo che $(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11)+1$ non ha come divisori nessuno di questi poiché facendo la divisione per questi numeri si ha sempre come resto 1.
Ma allora $(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11)+1$ è un altro primo e quindi non è vero che 2,3,5,7,11 sono gli unici numeri primi (come avevo ipotizzato)!

Questo ragionamento vale per qualsiasi numero finito di primi si consideri: posso sempre considerare il numero corrispondente al loro prodotto +1 e mi rendo conto che dovrebbe essere un altro primo diverso da quelli che ho considerato e quindi cado in una "contraddizione": questo significa che non posso affermare che i numeri primi sono un numero finito e quindi concludo che **i numeri primi sono infiniti.**

## Scomposizione di un numero naturale in fattori primi

Un numero naturale si può sempre scomporre nel prodotto di numeri primi (fattori primi) facendo delle divisioni successive per i suoi divisori.
Per esempio: $120 = 60 \cdot 2 = 30 \cdot 2 \cdot 2 = 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

## Massimo comun divisore

Il **massimo comune divisore** di numeri naturali *a* e *b*, si indica con **MCD(a,b),** è il più grande tra tutti i divisori comuni ad *a* e *b*.
Naturalmente si può determinare anche tra più di due numeri e sarà sempre il più grande dei divisori comuni tra i numeri assegnati.

**Esempio**
Qual è il massimo comun divisore tra 12 e 15?
I divisori di 12 sono 1,2,3,4,6,12
I divisori di 15 sono 1,3,5,15
Quindi i divisori comuni sono 1,3 e il divisore comune più grande è 3.
In conclusione $MCD(12,15) = 3$

**Nota importante**
*Possiamo trovare il MCD(a,b) scomponendo a e b in fattori primi: il MCD sarà dato dal prodotto dei **fattori comuni** presi con il **minimo esponente**.*

**Esempio**: qual è MCD(12,18) ?
Scomponiamo i due numeri: $12 = 2^2 \cdot 3$ ; $18 = 2 \cdot 3^2$
L'unico fattore primo comune I fattori primi comuni sono 2 e 3 e se li prendo con il minimo esponente ho

$$MCD(12,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

**Definizione**
Due numeri a e b si dicono **primi tra loro** se MCD(a,b)=1.
Per esempio 6 e 35 sono primi tra loro.

### *Problema*
*Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315 cm per 435 cm con mattonelle quadrate più grandi possibili, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle*?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435.
Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune.
La soluzione del problema è data quindi dal MCD(315,435).

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad 435=3\cdot 5\cdot 29 \quad \Rightarrow M.C.D.(315,435)=3\cdot 5=15$$

Le mattonelle devono avere il lato di 15cm.

## Minimo comune multiplo

**Il minimo comune multiplo** di due numeri naturali *a* e *b* si indica con **mcm(a,b)** è il più piccolo dei multipli comuni di *a* e *b*.

Anche in questo caso si può definire anche il minimo comune multiplo tra più di due numeri come il più piccolo dei multipli comuni a tutti i numeri assegnati.

**Esempio**
Qual è il minimo comune multiplo tra 12 e 15?
I multipli di 12 sono: 12,24,36,48,60,72…
I multipli di 15 sono: 15,30,45,60,75…
I multipli comuni sono: 60,…

Quindi il più piccolo multiplo comune è 60 e quindi $mcm(12,15) = 60$

**Nota importante**
Possiamo trovare il mcm(a,b) scomponendo a e b in fattori primi: *il mcm sarà dato dal prodotto dei fattori* ***comuni e non comuni*** *presi con il* ***massimo esponente***.

**Esempio:** qual è il mcm(12,30)?

Scomponiamo i due numeri: $12 = 2^2 \cdot 3$ ; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
Per ottenere il minimo comune multiplo dovrò moltiplicare quindi i fattori primi comuni presi con il massimo esponente cioè $2^2$ e 3 e il fattore primo non comune cioè 5.

In conclusione $mcm(12,30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

## *Problema*

*Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme?*

Occorre calcolare il mcm(15,18,20).

Abbiamo quindi:

$$15 = 3 \cdot 5, \quad 18 = 2 \cdot 3^2, \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \rightarrow m.c.m(15,18,20) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

# Sistemi di numerazione posizionali

Un sistema di numerazione come il nostro si chiama sistema di numerazione **posizionale in base 10** perché utilizziamo le 10 cifre

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

e **il valore delle cifre dipende però dalla loro "posizione" nella scrittura del numero**.

Infatti scrivendo 111 intendiamo 1 centinaio+1 decina+1 unità cioè

$$111 = 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

e quindi la stessa cifra 1 a seconda della posizione che occupa indica 1 centinaio, 1 decina e 1 unità.

Per esempio $4513 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

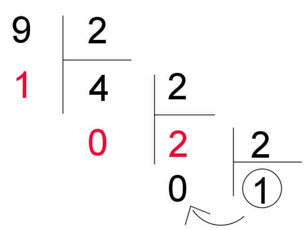
La scelta della base 10 è dovuta al fatto che abbiamo 10 dita, ma possiamo scrivere i numeri anche in altre basi.

**Particolarmente importante e utile per le sue applicazioni nel campo dell'informatica è la base 2**: infatti se usiamo la base 2 abbiamo bisogno solo di due cifre 0,1 che corrispondono nel computer a "passa corrente" - "non passa corrente".

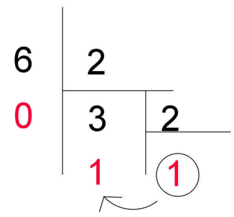
*Ma come si scrive un numero in base 2?*

Supponiamo di voler scrivere il numero 9 in base 2: dovremo esprimere 9 come somma di opportune potenze di 2 .
Poiché $9 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ scriverò $(9)_{10} = (1001)_2$

Possiamo seguire questo procedimento : possiamo dividere per 2 fino a che non otteniamo quoziente 1 e considerare **l'ultimo quoziente e i resti letti "a ritroso"**.
Per esempio nel caso di 9 abbiamo:



Leggendo l'ultimo quoziente e i resti a ritroso ritroviamo $(9)_{10} = (1001)_2$
Proviamo con 6:



Quindi $(6)_{10} = (110)_2$

# ESERCIZI

## Operazioni tra i numeri naturali

1) Presi tre numeri naturali qualsiasi *a, b e c* dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

- $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$ se $a \geq b$ V F
- $(a-b)-c = a-(b-c)$ V F
- $(a\cdot b\cdot c): a = b\cdot c$ se $a \neq 0$ V F
- Se *a* è multiplo di 3 e *b* multiplo di 4, allora *ab* è multiplo di 6 V F
- Se il prodotto di due numeri è divisibile per 6, allora almeno uno dei due fattori è divisibile per 6 V F
- Se *a* + *b* è divisibile per 2, allora *a* sia *b* sono divisibili per 2 V F

2) Quale proprietà è stata applicata in ciascuna di queste uguaglianze?

a) $256+159=159+256$

b) $81+(9+65)=(81+9)+65$

c) $48:12=(48:4):(12:4)$

d) $(56+24):8=(56:8)+(24:8)$

e) $(5+8)\cdot 3=(5\cdot 3)+(8\cdot 3)$

f) $(12\cdot 3)\cdot 2=12\cdot(3\cdot 2)$

g) $2\cdot(4+10)=2\cdot 4+2\cdot 10$

3) Dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

- $3^{12}+3^{10}=3^{22}$ V F
- $3^{6}\cdot 3^{4}=3^{10}$ V F
- $6^{20}:3^{20}=2$ V F
- $\left(3^{7}\right)^{5}=3^{35}$ V F
- $10^{12}:10^{10}=100$ V F

4) Scegli la risposta esatta tra quelle proposte:

a) $\left(2^{4}\cdot 2^{6}\right):4^{4}=$

□ 4 □ □ $2^6$ □ $4^4$ □ Non si può risolvere

b) $\left(30^{4}:6^{4}\right):25=$

□ 5 □ □ 25 □ 1/5 □ Non si può risolvere

c) $\left(7^{5}\right)^{0}+3^{2}-2^{3}=$

□ 1 □ □ 2 □ 3 □ Non si può risolvere

d) $7+3\cdot 5-2\cdot 9=$

□ 4 □ □ 88 □ 432 □ Non si può risolvere

e) $7+3\cdot(5-2)\cdot 9=$

□ 4 □ □ 88 □ 432 □ Non si può risolvere

f) Quale delle seguenti affermazioni è vera per qualsiasi numero naturale $n$?

□ $1+2n^2$ è pari □ $1+7n$ è dispari □ $3+3n$ è dispari □ $n+n^2$ è pari

## Espressioni numeriche con i numeri naturali

1. $(1+2\cdot 3):(5-2\cdot 2)+1+2\cdot 4$ [16]

2. $[18-3\cdot 2]:[16-3\cdot 4]\cdot[2:2+2]$ [9]

3. $2+2\cdot 6-[21-(3+4\cdot 3:2)]:2$ [8]

4. $100:2+3^2-2^2\cdot 6$ [35]

5. $5\cdot 5^3\cdot 5^4:(5^2)^3+5$ [30]

6. $[3^0+(2^4-2^3)^2:(4^3:4^2)+3]:(2^6:2^4)$ [5]

7. $5+[(16:8)\cdot 3+(10:5)\cdot 3]:(2^3\cdot 2-4)$ [6]

8. $\{[(15:3)\cdot 2]^3:10^2+2\cdot 2^2\}:(2\cdot 3)$ [3]

9. $\{12\cdot[(5+2)\cdot 3-19]\}:[(3+1)\cdot(2+1)]$ [2]

10. $(4^2\cdot 2^2):2^2-5^2:5+(2^2\cdot 3^2)^3:6^5$ [17]

**Problema**
Proviamo a tradurre in espressione questa frase:
"*Dalla somma del quintuplo di b e del triplo di a sottrai il quadrato della differenza tra il doppio di b e il doppio di a*".

Abbiamo : $(5b+3a)-(2b-2a)^2$

Quanto vale questa espressione se consideriamo $a=3$ e $b=4$?
Sostituendo i valori assegnati alle due lettere abbiamo:
$(5\cdot 4+3\cdot 3)-(2\cdot 4-2\cdot 3)^2=(20+9)-(8-6)^2=29-2^2=29-4=25$

**Prova tu**

Moltiplica il doppio di a per la somma di a e b e poi sottrai il triplo di b. Calcola l'espressione ottenuta nel caso in cui $a=3, b=2$.

[24]

## Massimo comun divisore e minimo comune multiplo

1) Trova M.C.D. e m.c.m. di:

| | | |
|---|---|---|
| 12, 18 | 4,20 | 25,30 |
| 20,30 | 6,18 | 15,20 |
| 21,24 | 5,10 | 22,44 |
| 5,6,12 | 12,18,24 | 10,20,30 |

2) Scrivi tre numeri il cui M.C.D. sia 6.

3) Scrivi tre numeri il cui m.c.m sia 12.

4) a) Se $M.C.D.(a,b) = m.c.m(a,b)$ allora $a = b$ V F

b) Se $m.c.m.(a,b) = a$ allora $b$ è divisore di $a$ V F

c) Se $m.c.m.(a,b) = a \cdot b$ allora $a$ e $b$ sono numeri primi V F

d) Se $M.C.D.(a,b) = a$ allora $b$ è divisore di $a$ V F

e) Il M.C.D di due numeri primi è uguale al più grande dei due numeri V F

f) Il M.C.D di due numeri primi tra loro è uguale al minore dei due numeri V F

5) Ad una gara di matematica partecipano 100 ragazze e 120 ragazzi. Se si decide di formare squadre costituite dallo stesso numero di maschi e femmine, quante possono essere al massimo le squadre e da quanti elementi saranno composte?

[20; 5+6]

6) Un macchinario riempie scatole di dolcetti contenenti rispettivamente 10,15,24 pezzi ed è programmata in modo che il processo si svolga lungo tre percorsi (uno per ogni tipo di scatola da confezionare). Quanti dolcetti come minimo devono essere immessi sul nastro trasportatore per poter riempire un numero intero di scatole qualunque sia la direzione che poi prenderanno?

[ 120 ]

## Sistemi di numerazione posizionali

**1)** Scrivi in base 2 i seguenti numeri scritti in base 10:

a) 12 $[(12)_{10} = (1100)_2]$

b) 15 $[(15)_{10} = (1111)_2]$

c) 121 $[(121)_{10} = (1111001)_2]$

d) 18 $[(18)_{10} = (10010)_2]$

e) 20 $[(20)_{10} = (10100)_2]$

f) 41 $[(41)_{10} = (101001)_2]$

g) 25 $[(25)_{10} = (11001)_2]$

h) 50 $[(50)_{10} = (110010)_2]$

**2)** Scrivi in base 10 i seguenti numeri scritti in base 2:

a) $(100)_2$ [4]

b) $(111)_2$ [7]

c) $(110011)_2$ [51]

d) $(11111)_2$ [31]

e) $(100)_2$ [4]

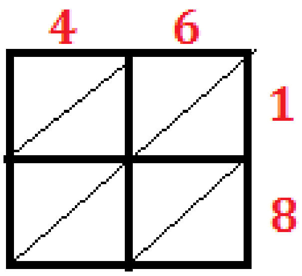
f) $(10011)_2$ [19]

g) $(100001)_2$ [33]

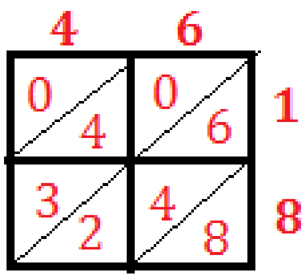
h) $(101010)_2$ [42]

# *Scheda storica*

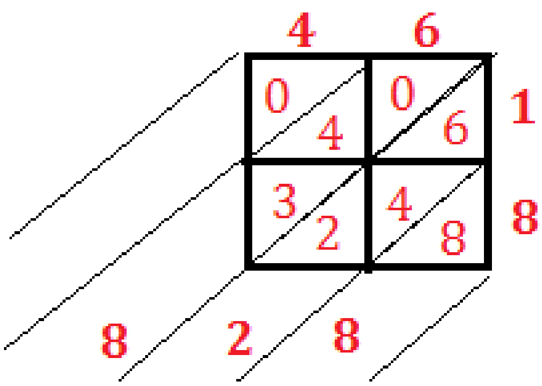
Fino dall'antichità l'uomo ha sentito la necessità di ingegnarsi per riuscire a svolgere calcoli che non poteva eseguire mentalmente; si è così cercato di trovare metodi sempre più semplici per svolgere operazioni complesse.
L'operazione che ha avuto più vicissitudini è senz'altro la moltiplicazione: era necessario riuscire a contare le merci ed il denaro che veniva esportato od importato e occorreva farlo velocemente ed in modo corretto per evitare problemi.
**Il primo metodo di moltiplicazione noto è il cosiddetto metodo a gelosia**[1] o **a graticola** noto presso gli Arabi: è un antenato della nostra moltiplicazione in colonna ma la sua struttura è diversa (forse meno pratica).
Vediamo come funziona.
Supponiamo di voler calcolare 46 x 18.




Intanto occorre costruire una tabella con tante colonne quante sono le cifre di ogni fattore e dividere ogni casella in due triangoli uguali lungo le diagonali.




Si moltiplicano tra di loro le cifre che si incrociano nelle caselle (4 x 1 = 0 4, 6 x 1 = 0 6, 4 x 8 = 32 e 6 x 8 = 48) riportando le decine nella parte superiore del quadrato e le unità in quella inferiore.




A questo punto si somma **in diagonale** cominciando dall'ultima cifra in basso a destra e tenendo conto dei riporti delle somme. A questo punto sarà possibile leggere il risultato da sinistra verso destra.

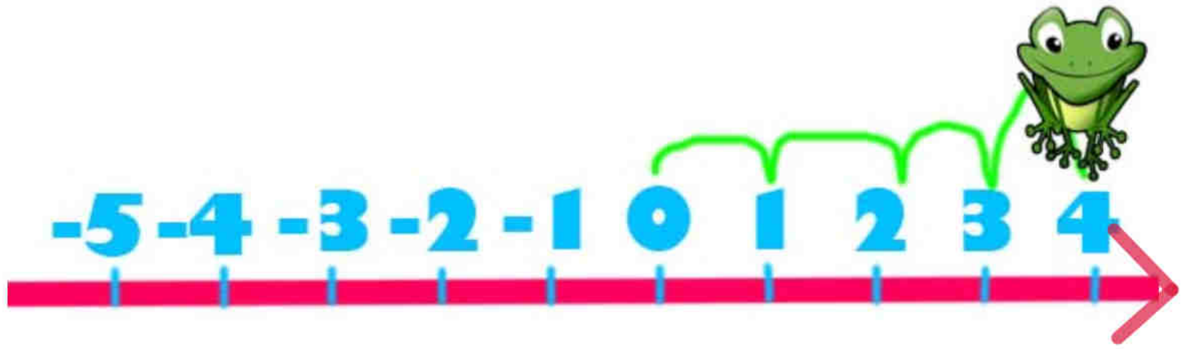
46 x 18 = 828

**Provaci tu!**
Prova a moltiplicare 34x52 con questo metodo.

---

[1] Gelosia qui ha il significato di grata poiché era l'inferriata che veniva messa alle finestre per proteggersi da eventuali saccheggiatori.

# I numeri interi




Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio non si può eseguire 5-12.
Tuttavia ci sono situazioni in cui abbiamo bisogno di eseguire una sottrazione di questo tipo.

Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo:

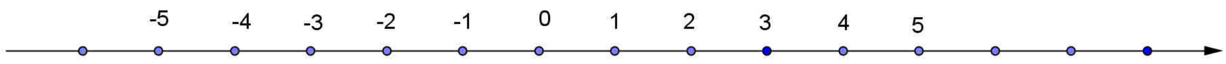
“Domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi”.
Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani?
Diremo:
“Domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero” oppure “La temperatura sarà di –1 grado”.

Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano.
I matematici in queste situazioni usano i numeri interi che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno + se sono numeri maggiori di 0 e dal segno – se sono numeri minori di 0.

L'insieme di questi numeri viene detto insieme dei numeri interi e si indica con la lettera maiuscola Z perché in tedesco *zahl* significa numero:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

Possiamo riportare i numeri interi su una retta orientata dopo aver fissato la misura di un segmento $\overline{AB}$ come unità di misura.



**Numeri concordi e discordi**

Due numeri relativi con lo stesso segno sono detti **concordi**, se hanno segni opposti si dicono **discordi.**

**Valore assoluto di un numero intero**

Il **valore assoluto** di un numero intero si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali ed è definito così:

$$|a| = a \ se \ a \geq 0$$

$$|a| = -a \ se \ a < 0$$

Per esempio: $|+2| = 2$ ; $|-7| = -(-7) = 7$ ; $|+13| = 13$ ; $|-5| = 5$

**Numeri opposti**
Due numeri interi si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi. Sono numeri opposti +3 e -3; +5 e -5; +19 e -19.

## Nota importante
*Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno* + cioè, per esempio si può scrivere indifferentemente +1 o 1, +12 o semplicemente 12.

**Confronto di numeri relativi**

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra.

**Esempi**
- $+4 > +2$ i numeri sono positivi, il maggiore è +4 perché ha valore assoluto maggiore.
- $-1 > -3$ i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore.
- $+4 > -2$ il numero positivo è maggiore del numero negativo.
- $+4 > 0$ ogni numero positivo è maggiore di 0.
- $0 > -2$ ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

**Osservazione importante**
Possiamo pensare che i numeri interi positivi non siano altro che i numeri naturali e quindi considerare **l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi come un ampliamento dell'insieme $\mathbb{N}$** dei numeri naturali.

# Operazioni tra numeri interi

## Addizione e sottrazione

La somma di due numeri concordi ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti e per segno quello dei due numeri, mentre la somma di due numeri discordi ha per valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti e per segno quello del numero che ha valore assoluto maggiore.

Per esempio: $(+4)+(+5)=+9$ ; $(-4)+(-5)=-9$ ; $(+4)+(-5)=-1$

Per eseguire la sottrazione tra due interi si somma il primo con l'opposto del secondo, cioè

$$a-b=a+(-b)$$

Per esempio: $(+4)-(+5)=(+4)+(-5)=-1$ (che più semplicemente scriveremo $4-5=-1$);
$(+4)-(-5)=(+4)+(+5)=+9$ (che scriveremo $4-(-5)=4+5=9$)

Notiamo che la sottrazione tra due numeri interi dà ancora un numero intero (è un'operazione "interna all'insieme dei numeri interi).

Poiché la sottrazione si riconduce ad una addizione generalmente non si parla più di addizione e sottrazione ma di **somma algebrica .**

## Moltiplicazione e divisione

- **Moltiplicazione**

Il prodotto di due numeri interi ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti, segno positivo se i numeri sono concordi, segno negativo se i numeri sono discordi (regola dei segni).

Per esempio: $(+5)\cdot(+2)=+10$ che scriviamo semplicemente $5\cdot 2=10$ ;
$(-5)\cdot(-2)=+10$ che scriviamo semplicemente $(-5)\cdot(-2)=10$ ;
$(+5)\cdot(-2)=-10$ che scriviamo semplicemente $5\cdot(-2)=-10$

***Giustificazione della regola dei segni***

1) *Perché* $(+)\cdot(-)=-$ *?*

Consideriamo questo esempio:

$(5+(-5))\cdot 2=5\cdot 2+(-5)\cdot 2=10+(-5)\cdot 2$

D'altra parte $(5+(-5))\cdot 2=0\cdot 2=0$

Ma allora dovrà essere: $(-5)\cdot 2=-10$

2) *Perché* $(-)\cdot(-)=+$ *?*
Consideriamo questo esempio:
$(5+(-5))\cdot(-2)=5\cdot(-2)+(-5)\cdot(-2)=-10+(-5)\cdot(-2)$
D'altra parte $(5+(-5))\cdot(-2)=0\cdot(-2)=0$
Ma allora dovrà essere: $(-5)\cdot(-2)=+10$

- **Divisione**

$a:b=q$ se $a=b\cdot q$ (seguendo la stessa regola dei segni della moltiplicazione)

Per esempio: $(+10):(+2)=5$ ; $(+10):(-2)=-5$ ; $(-10):(-2)=5$

La divisione tra numeri interi non è sempre possibile: per esempio non si può eseguire (+10):(+3)

## Potenza di un numero intero $a^n$ ( con n numero naturale)

La definizione di potenza $a^n$ ,con $a$ numero intero e $n$ numero naturale, è la stessa di quella data quando $a$ è un numero naturale cioè si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base $a$ quante volte è indicato dall'esponente $n$.

Osserviamo che , per la regola dei segni della moltiplicazione, abbiamo:

• se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;

• se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato ha segno negativo, se l'esponente è pari il risultato ha segno positivo.

**Esempi**

$(+3)^2=9$ ; $(+3)^3=27$
$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$ ; $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$

**Osservazione**
Naturalmente , anche in questo caso, si ha che $a^0=1$

# ESERCIZI

## Espressioni numeriche con i numeri interi

**Calcola il valore delle seguenti espressioni**

1. $+7-\{-6+[-5+(-3+6-4)]-3\}+[-(+2-7)-5]$ [+22]

2. $3\cdot\{15-[3\cdot(2-6+3)]-10\}+4\cdot[(-2\cdot 3+6)-5]$ [+4]

3. $[15+(-3+2-6):(-7)]:[4\cdot(-2)]+6:(-3)-(4+2\cdot 6-4)$ $[-16]$

4. $+6-\{+4-[+3-(-6+7+2)]-6\}-\{[+2-(-6+4)]-7\}$ [+11]

5. $4\cdot\{10+[2\cdot(6\cdot 2-5\cdot 3)]-2\}-6\cdot\{[(6-2)\cdot 3-4]-5\}$ $[-10]$

6. $\{[(+15):(-3)-2]+5-2\}:(-2)-\{7\cdot[4-3\cdot(-2)]+(-8)(+4\cdot 2)\}$ $[-4]$

7. $\left\{\left[(-2)^5\cdot(-2)\cdot(-2)^0\right]^3:\left[(-2)^4\cdot(-2)^3\right]\right\}:(-2)^{10}$ $[-2]$

8. $\left\{\left[(-3)^6\cdot(-3)\cdot(-3)^0\right]^2:\left[(-3)^4\cdot(-3)^2\right]\right\}:(-3)^7$ $[-3]$

9. $\left\{\left[(-2)^3\right]^4:2^9+25\right\}-[(+5)(-4)+1]-2(-3)$ [+58]

10. $\left\{\left[(+5)^2\right]^3:(-5)^4-12\right\}+[(-3)(+5)-4]+(-3)(+6)$ $[-24]$

**Traduci in una espressione letterale la seguente frase e calcolane il risultato per i valori delle lettere indicati**

1. Dividi per il quadruplo di $a$ il quadrato della differenza tra il doppio di $b$ e il triplo di $a$, aggiungi poi al risultato la somma del doppio di $b$ col triplo di $a$.
   $(a=-2,\ b=1)$

   $[-12]$

2. Sottrai la somma del triplo di $b$ col quintuplo di $a$ alla somma del doppio di $a$ e del quadrato della differenza tra $b$ e il triplo di $a$ e calcola considerando $a=-2, \quad b=1$.

   [52]

# TEST

1) Write down the value of $7^0$.

2) Find the value of $3a-5b$ when $a = -4$ and $b = 2$.

3) Write down the prime numbers between 20 and 30.

4) Put one pair of brackets in each statement to make it true.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 16 | + | 8 | : | 4 | - | 2 | = | 4 |
| (b) | 16 | + | 8 | : | 4 | - | 2 | = | 20 |

5) Write down the lowest temperature from this list:

-3°C  8°C  -19°C  42°C  -7°C

6) The temperature on Monday was -6°C. On Tuesday the temperature was 3 degrees lower.
Write down the temperature on Tuesday.

7) The temperature on Saturday was -2°C. The temperature on Sunday was 8°C.
Write down the difference in these two temperatures.

8) Write down the number from this list which is both a cube number and has 4 as factor

1  4  8  12  27  40

9) Write down all the prime numbers that are greater than 30 and less than 40.

10) Three different numbers form this list are added together to give the smallest possible total.

-3  -5  1  0  3

Complete the sum below:

…………. + …………. + …………... = ……………

11) Find the lowest common multiple of 24 and 30.

12) Here is a list of numbers.

2  4  5  8  9  12

Write down all the numbers from this list which are

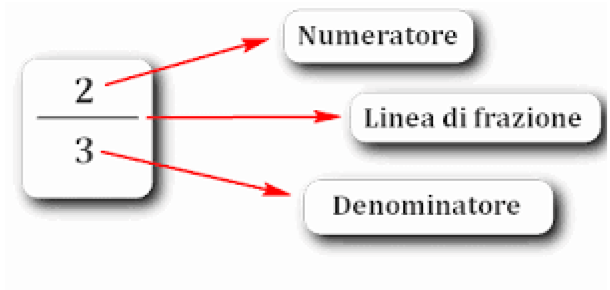
(i) odd.
(ii) square.
(iii) cube.
(iv) prime.

13) (a) Write 84 as a product of its prime factors.
(b) Find the highest common factor of 84 and 24.
(c) Find the lowest common multiple of of 84 and 24.

14) Write down all the factors of 22.

15) Write down a multiple of 13 between 30 and 50.

# I numeri razionali




## Le frazioni

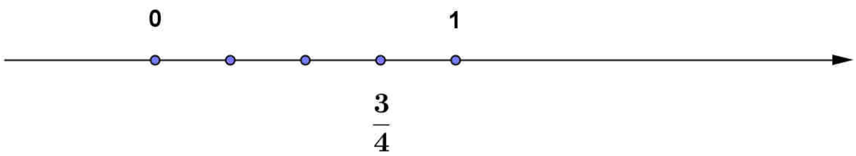
Definiamo una frazione come il rapporto di due numeri interi cioè

$$\frac{n}{d} \quad n, d \in Z \text{ con } d \neq 0$$

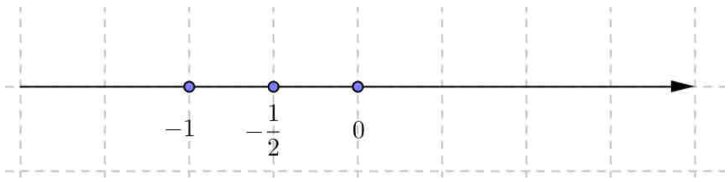
in cui il numero scritto sopra alla linea di frazione viene chiamato **numeratore** e il numero scritto sotto alla linea di frazione viene detto **denominatore**.

$\frac{n}{d}$ corrisponde a $n : d$ e quindi **il denominatore deve essere diverso da zero.**

**Esempio**: la frazione $\frac{3}{4}$ corrisponde a $3 : 4$. Per rappresentare la frazione $\frac{3}{4}$ sulla linea numerica devo dividere l'unità in quattro parti e prenderne tre.



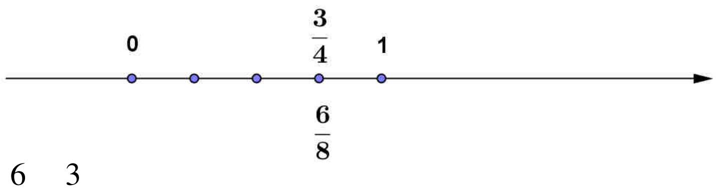

**Esempio:** la frazione $-\frac{1}{2}$ corrisponde a $(-1) : (+2)$ e sarà rappresentata sulla retta numerica dal seguente punto



## Frazioni equivalenti

Se moltiplico il numeratore e il denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero ottengo una frazione "equivalente" (rappresentano lo stesso punto sulla retta numerica).

Per esempio: $\frac{6}{8}$ è equivalente a $\frac{3}{4}$ poiché $3:4=(3\cdot 2):(4\cdot 2)$




Scriveremo che $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

Diciamo anche che dividendo 6 e 8 per 2 "semplifichiamo" la frazione : $\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}^{4}}=\frac{3}{4}$

## Frazione "ridotta ai minimi termini"

Data una frazione posso ridurla ai "minimi termini" dividendo numeratore e denominatore per il M.C.D. ( $n,d$ ).

Esempio: $\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$ (frazione ridotta ai minimi termini)

Abbiamo diviso 24 e 40 per 8 che è il M.C.D. (24,40).

La frazione è ridotta ai minimi termini quando non si può ulteriormente "semplificare" , quando cioè

M.C.D. (n,d )=1

## Ridurre due frazioni allo stesso denominatore

E' molto importante "ridurre" due frazioni allo stesso denominatore: se infatti due frazioni hanno lo stesso denominatore potrò confrontarle o sommarle.

Consideriamo per esempio $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ .

Perché abbiano lo stesso denominatore posso sempre considerare il prodotto dei due denominatori come denominatore comune:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 6}{2\cdot 6}=\frac{6}{12} \qquad ; \qquad \frac{1}{6}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 6}=\frac{2}{12}$$

Generalmente però si prende come denominatore comune il m.c.m.$(d_1,d_2)$ cioè il minimo comune multiplo dei due denominatori e si dice che **abbiamo ridotto le frazioni al minimo comun denominatore.**

Nel nostro caso basta prendere m.c.m (2,6) = 6 e avremo: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ ; $\frac{1}{6}$

# I numeri razionali

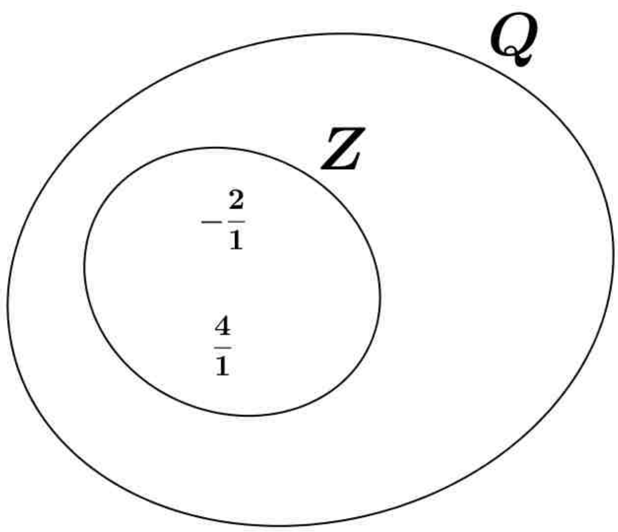
Chiamiamo **numero razionale un insieme di frazioni tra loro equivalenti**.

Per esempio: $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{4}{8}$ ecc…rappresentano lo **stesso numero "razionale**" uguale al risultato della divisione $(-1):2=-0,5$.
Per esempio: $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ ecc… rappresentano lo stesso numero "razionale" uguale al risultato della divisione $3:4=0,75$.

**L'insieme dei numeri razionali viene indicato con la lettera *Q*** (q sta per "quoziente").

**Osservazione**

All'interno di ***Q*** ritroviamo i numeri interi **Z**: per esempio $-\frac{2}{1}$, $-\frac{4}{2}$, $-\frac{6}{3}$ ecc… cioè il numero razionale $-\frac{2}{1}$ corrisponde al numero intero -2.
Si dice che ***Q*** **è un ampliamento di *Z*.**



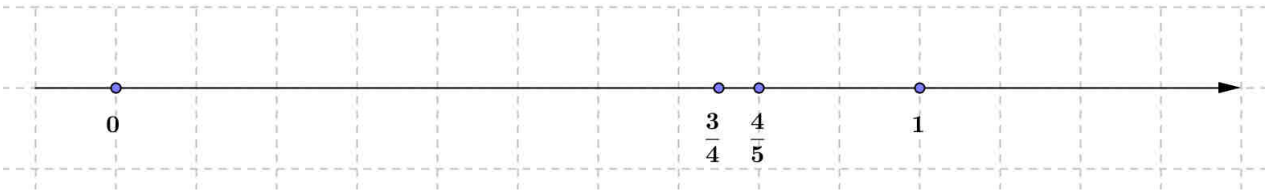
## Confronto di numeri razionali

*Come si possono confrontare due numeri razionali?*

Per esempio tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ quale sarà il numero maggiore?

Possiamo portare le frazioni allo stesso denominatore e poi confrontare i numeratori: scegliamo m.c.m. (4,5) = 20

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{4}=\frac{15}{20}\\ \\ \frac{4}{5}=\frac{16}{20}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$




## Nota

Occorre fare attenzione quando i numeri razionali sono negativi. Supponiamo di considerare:

$$-\frac{3}{4}, \quad -\frac{4}{5}$$

Abbiamo: $$-\frac{15}{20}, \quad -\frac{16}{20}$$

Ma questa volta, essendo $-15>-16$, avrò $-\frac{3}{4}>-\frac{4}{5}$

# Operazioni tra numeri razionali

- **Somma e differenza di numeri razionali**

Per determinare la somma (o la differenza) tra due numeri razionali li riduciamo allo stesso denominatore e calcoliamo la somma (o la differenza) dei numeratori.

Esempio: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$ $\qquad\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}\right)$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$

- **Prodotto di numeri razionali**

Il prodotto di due numeri razionali è un razionale che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori: cioè

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Esempio: $2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Infatti è chiaro che raddoppiare $\frac{1}{3}$ significa avere $\frac{2}{3}$.

Esempio: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

In questo caso dobbiamo prendere la metà di $\frac{1}{3}$ e quindi otteniamo $\frac{1}{6}$.


- **Quoziente di numeri razionali**

Diamo prima la definizione di “**reciproco**” di un numero razionale.

Dato un numero razionale $\frac{a}{b}$ il suo “reciproco” è $\frac{b}{a}$

Esempio: il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$

Osserviamo che se moltiplichiamo un numero razionale per il suo reciproco otteniamo 1.

Infatti : $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$

Il **quoziente** di due numeri razionali (con il 2° diverso da zero) è uguale al prodotto del 1° per il reciproco del 2° numero.
Cioè:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Infatti, in questo modo, facendo la "riprova", otteniamo che

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

Esempio: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot 3$

Infatti: $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

**NOTA**: osserviamo che dividendo un numero razionale $\frac{a}{b}$ per un numero razionale minore di 1 otteniamo un numero maggiore di $\frac{a}{b}$ .

Per esempio $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ $\quad\left(1>\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$ $\quad\left(2>\frac{1}{2}\right)$

**NOTA**: possiamo scrivere la divisione tra due numeri razionali anche con la linea di frazione.

Esempio: $\frac{1}{2}:2=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Esempio: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$

Esempio: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{5}$

In generale: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

**OSSERVAZIONE:** la divisione tra numeri razionali dà come risultato un numero razionale (è un' operazione interna a **Q**).

- **Potenza di un numero razionale**

a) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0) \qquad (n \text{ numero naturale})$$

Esempio: $$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{(-2)^2}{(+3)^2} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{(-2)^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$$

b) $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = ?$$

Quale significato possiamo associare ad una potenza con esponente negativo?

Facciamo un esempio: $$3^4 : 3^6 = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{1}{3^2}$$

Applicando la proprietà delle potenze:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

avremmo $\quad 3^4 : 3^6 = 3^{-2}$

Se allora vogliamo una definizione "coerente" dobbiamo porre $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Diamo allora la seguente definizione:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad (n \text{ numero naturale})$$

Consideriamo cioè il reciproco di $\frac{a}{b}$ e lo eleviamo a $n$.

Quindi per esempio:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = (3)^3 \quad ; \quad \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = (-4)^1$$

.

# Numeri razionali e rappresentazione decimale

## Le frazioni decimali

*Le frazioni "decimali" sono frazioni il cui denominatore è una potenza di 10.*

Per esempio sono frazioni decimali:

$$\frac{2}{10} \quad ; \quad \frac{3}{100}=\frac{3}{10^2} \quad ; \quad \frac{7}{1000}=\frac{7}{10^3}$$

Possiamo facilmente scrivere una frazione decimale come "numero decimale" (numero in cui le cifre a destra della virgola rappresentano i decimi, i centesimi ecc.).

Infatti per esempio $\frac{13}{10}=\frac{10+3}{10}=1+\frac{3}{10}=1{,}3$

$$\frac{171}{100}=\frac{100+70+1}{100}=1+\frac{7}{10}+\frac{1}{100}=1{,}71$$

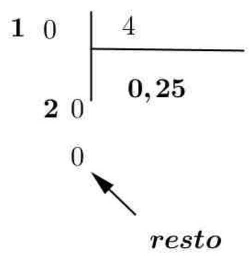
## Dalla frazione al numero decimale

Posso in generale ottenere il numero decimale corrispondente ad una frazione **eseguendo la divisione.** Avremo però due casi:

1) se la frazione è equivalente ad una frazione decimale (quindi il suo denominatore contiene come fattori solo il 2 e/o il 5) otterremo un **numero decimale finito**.

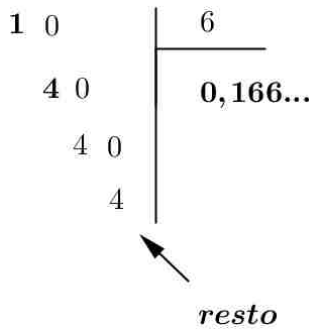
2) se la frazione non è equivalente ad una frazione decimale (cioè il suo denominatore ha fattori primi diversi dal 2 e dal 5) otterremo un **numero decimale periodico**.

**Esempio**: $\frac{1}{4}$ è equivalente a $\frac{25}{100}$ e infatti eseguendo la divisione otteniamo




cioè un **numero decimale finito**.

**Esempio**: $\frac{1}{6}$ non è equivalente ad una frazione decimale poiché il denominatore ha come fattore anche il 3. Se eseguiamo la divisione otteniamo resto 1 e poi sempre resto = 4 cioè otteniamo $0{,}1\overline{6}$.

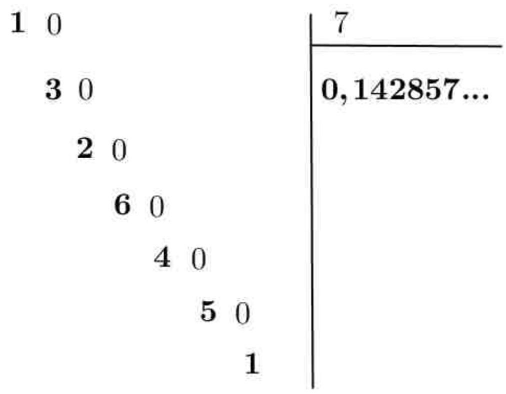



**NOTA**: la parte che si ripete viene soprassegnata (nel nostro esempio $\overline{6}$) e viene chiamata "**periodo**", la parte dopo la virgola che precede il periodo (in questo caso 1) viene detta "**antiperiodo**".

**OSSERVAZIONE**

E' chiaro che eseguendo la divisione ad un certo punto dovrò avere necessariamente un resto che ho già ottenuto (perché i resti devono essere minori del divisore = denominatore della funzione) e quindi ricomincerò ad avere le stesse cifre decimali.

Per esempio dividendo per 7 non potrò avere un periodo più lungo di 6 cifre : se per esempio considero $\frac{1}{7}$ ho proprio 6 resti diversi da zero e quindi ottengo un periodo di 6 cifre.




$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$$

## Dal numero decimale alla frazione

***Dato un numero decimale (finito o periodico) come posso determinare la frazione corrispondente?*** (viene chiamata **frazione "generatrice"**).

a) Se il numero decimale è finito la frazione generatrice avrà come numeratore *il numero senza la virgola e come denominatore la potenza del 10 corrispondente al numero di cifre decimali.*

Per esempio: $0,75 = \frac{75}{10^2} = \frac{75}{100}$

$2,3 = \frac{23}{10}$

$21,043 = \frac{21043}{1000}$

b) Ma se il numero decimale è periodico?

Consideriamo per esempio $n = 0,1\overline{6}$ (avevamo visto che $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$ )

Se moltiplichiamo il numero per 10 avremo : $10n = 1,\overline{6}$

Se moltiplichiamo il numero per 100 avremo: $100n = 16,\overline{6}$

Allora $100n - 10n = 16,\overline{6} - 1,\overline{6} \Rightarrow 90n = 16 - 1 \Rightarrow n = \frac{16-1}{90}$ ed infatti: $\frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$ !

In generale si può dimostrare che la "regola" è la seguente:

*la frazione generatrice di un numero decimale periodico ha come numeratore il numero scritto senza la virgola a cui si sottrae la parte che precede il periodo e come denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo (se c'è).*

**NOTA**
Se vogliamo scrivere sotto forma di frazione un numero decimale periodico con periodo 9 otteniamo sempre un numero intero!

**Esempio**

$n = 2,\overline{9} \rightarrow$ $n = \frac{29-2}{9} = \frac{27}{9} = 3$

*Cerchiamo di capire perché.*

Consideriamo la seguente uguaglianza: $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

Ma $\frac{1}{9} = 0,\overline{1} \rightarrow 9 \cdot \frac{1}{9} = 0,\overline{9}$ e quindi in conclusione $0,\overline{9} = 1$

# Ordine di grandezza di un numero

In fisica, ma anche in altri ambiti, spesso dobbiamo considerare numeri molto grandi (per esempio la distanza Terra-Sole) o numeri molto piccoli (per esempio la dimensione del nucleo atomico).

Per evitare di scrivere numeri con troppi zeri o con tante cifre decimali (che si leggerebbero molto male) si utilizzano le potenze del 10 lasciando una sola cifra prima della virgola.

Per esempio:

a) $143000 = 1{,}43 \cdot 10^5$
b) $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$

L'ordine di grandezza del primo numero è $10^5$ , quello del secondo è $10^{-4}$ .

Quando scriviamo i numeri in questo modo diciamo che utilizziamo **la notazione scientifica**.

## Esempi

a) La massa della Terra è circa $5{,}98 \cdot 10^{24}\, Kg$

b) La velocità della luce nel vuoto è 300000 $Km/s$ : possiamo scrivere $3 \cdot 10^8\ m/s$ .

c) Il Sole dista 150 milioni di Km dalla Terra che corrisponde a

$$150 \cdot 10^6 \cdot 10^3\, m = 1{,}5 \cdot 10^{11}\, m$$

d) In un anno (consideriamolo di 365 giorni) ci sono

$$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}15 \cdot 10^7\, s$$

# Problemi con le frazioni

## PROPORZIONI

Ricordiamo che **una proporzione è un'uguaglianza tra due rapporti**.

Per esempio $3:4=6:8$ (si legge 3 sta a 4 come 6 sta a 8)
(in pratica ho due frazioni equivalenti $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ )
3 e 8 vengono chiamati "estremi" della proporzione; 4 e 6 vengono chiamati "medi".

**Proprietà fondamentale**

In una proporzione *il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

$3:4=6:8$

$4\cdot 6=3\cdot 8$

Infatti scrivendo $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ abbiamo anche che $\frac{3\cdot 8}{4\cdot 8}=\frac{4\cdot 6}{4\cdot 8}$.

**NOTA**
*A volte per risolvere un problema dobbiamo indicare una quantità incognita con la lettera x, impostare una proporzione e determinare x utilizzano la proprietà fondamentale delle proporzioni.*

**Esempio**

Nella ricetta per fare una crostata troviamo queste dosi di farina e zucchero: 250 g di farina, 50 g di zucchero.

Se vogliamo fare una crostata più grande utilizzando 300 g di farina quanto zucchero dobbiamo mettere?

Possiamo indicare con *x* la quantità di zucchero in grammi per la crostata più grande e scrivere

$$250:300=50:x \rightarrow 250\cdot x=300\cdot 50 \rightarrow x=\frac{300\cdot 50}{250}=60$$

## PERCENTUALI

Spesso nella vita quotidiana vengono utilizzate le percentuali.

**Esempio 1**

Durante il periodo dei saldi gli sconti sui capi di abbigliamento vengono indicati in percentuale. Se su un capo di abbigliamento che costa € 45, viene fatto uno sconto del 30%, quanto risparmiamo? 30% è come dire che se il capo di abbigliamento fosse costato € 100 , lo sconto sarebbe di € 30.
Per determinare quindi il 30% di € 45 possiamo impostare una proporzione:

$$30:100 = x:45 \rightarrow x = \frac{30 \cdot 45}{100} = \frac{27}{2}$$

Troviamo così che il 30% di 45 è € $\frac{27}{2}$ cioè € 13,50.

Possiamo però anche considerare 30% come frazione $\frac{30}{100}$ e moltiplicarla direttamente per 45 (trovando subito lo sconto senza impostare la proporzione):

$$\frac{30}{100} \cdot 45 = \frac{27}{2}$$

**Esempio 2**

Se in una scuola con 700 studenti, il preside afferma che solo il 5% non è stato promosso, quanti studenti non sono stati promossi?

Abbiamo che : $\frac{5}{100} \cdot 700 = 35$

Quindi 35 studenti non sono stati promossi.

**Esempio 3**

Se in una classe di 30 studenti, 12 praticano il nuoto, 9 studenti il basket, 6 studenti il calcio e 3 studenti non praticano nessuno sport, quali sono le percentuali di studenti che praticano nuoto, basket, calcio o che non praticano nessuno sport?
Possiamo impostare le seguenti proporzioni:

$12:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{12 \cdot 100}{30} = 40 \rightarrow$ 40% pratica il nuoto

$9:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{9 \cdot 100}{30} = 30 \rightarrow$ 30% pratica il basket

$6:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{6 \cdot 100}{30} = 20 \rightarrow$ 20% pratica il calcio

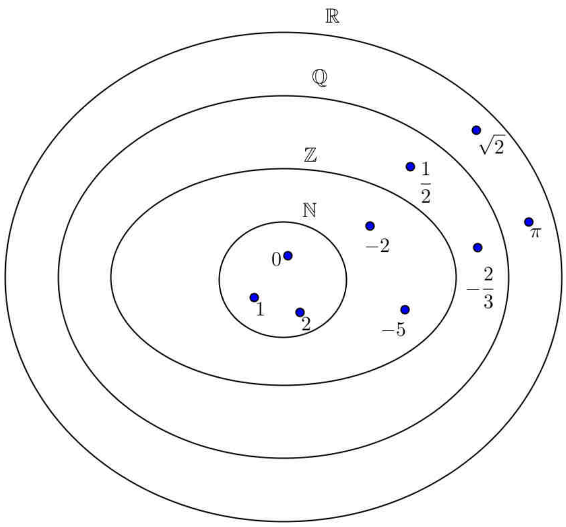
$3:30 = x:100 \rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{30} = 10 \rightarrow$ 10% non pratica nessuno sport

# Numeri irrazionali

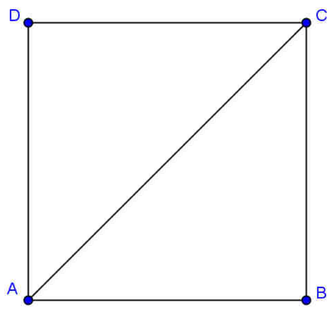
Chiamiamo numero irrazionale (cioè **non razionale**) un numero **decimale illimitato non periodico** (quindi non riconducibile ad un numero razionale).

Risultano numeri irrazionali $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ (rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro).

**L'insieme dei numeri razionali** e **irrazionali** viene chiamato **insieme dei numeri reali** e indicato con $\Re$.
Abbiamo quindi questa rappresentazione:




**NOTA: i** numeri "irrazionali" furono scoperti dai matematici greci della scuola di Pitagora: essi dimostrarono che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato non è un numero razionale cioè non si possono trovare $m$ e $n$ tali che $\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB}$




Questa scoperta fu per loro sconvolgente e per molto tempo fu tenuta…segreta!

Se $\overline{AB} = 1$ $\qquad \overline{AC} = \sqrt{2} = 1{,}41421356...$ (non c'è periodo)

# ESERCIZI

1) Riduci le seguenti frazioni ai minimi termini:

$$-\frac{14}{20} \quad ; \quad +\frac{35}{49} \quad ; \quad -\frac{21}{63} \quad ; \quad -\frac{125}{25} \quad ; \quad +\frac{120}{45}$$

2) Rappresenta sulla stessa retta numerica le seguenti frazioni:

$$-\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{5}{6} \quad ; \quad \frac{2}{3} \quad ; \quad -\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{7}{2} \quad : \quad -\frac{5}{4}$$

3) Confronta le seguenti frazioni:

$$\frac{5}{6},\frac{4}{5} \quad ; \quad -\frac{6}{7},-\frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{13}{4},\frac{10}{3}$$

4)* Qual è la frazione che "si trova a metà" tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ ?


Suggerimento: $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ , $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ quindi devi trovare la frazione a metà tra $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$ …

## Operazioni tra numeri razionali

5) Calcola la somma delle seguenti frazioni:

$\frac{1}{2}+\frac{4}{5}$ ; $-\frac{3}{7}+\frac{1}{3}$ ; $\frac{4}{5}-\frac{1}{7}$ $\qquad$ [ $\frac{13}{10}$; $-\frac{2}{21}$; $\frac{23}{35}$ ]

6) Calcola il prodotto delle seguenti frazioni:

$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)$ ; $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{4}\right)$ ; $\left(-\frac{12}{5}\right)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)$ $\qquad$ [ $\frac{4}{15}$; $-\frac{7}{6}$; $9$ ]

7) Calcola il quoziente delle seguenti frazioni:

$\left(\frac{1}{4}\right):\left(\frac{2}{5}\right)$ ; $\left(-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{1}{3}\right)$ ; $\left(-\frac{14}{5}\right):\left(-\frac{7}{10}\right)$ ; $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}$ ; $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)}$ ; $\frac{\left(-\frac{7}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

[ $\frac{5}{8}$; $-2$; $4$; $\frac{5}{8}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{14}{3}$ ]

8) Calcola le seguenti potenze:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ $\qquad$ [$\frac{1}{16}$ ;$\frac{4}{9}$; $\frac{25}{36}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$]

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$; $\left(\frac{7}{6}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $\qquad$ [9; $-\frac{3}{2}$; $\frac{36}{49}$; $-2$; $\frac{9}{4}$]

9) Sviluppa le seguenti espressioni:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\right)$ $\qquad$ $\left[\frac{29}{60}\right]$

b) $\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $\left[\frac{28}{15}\right]$

c) $\left[\left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\qquad$ $[1]$

d) $\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}:\left(+\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\qquad$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

# Espressioni numeriche con i numeri razionali

10) $\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\right)-\left[\frac{2}{20}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)$ $[0]$

11) $\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\right)-\left[\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{4}\right)\right]+\frac{2}{7}-\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{21}+\frac{3}{2}\right)$ $\left[\frac{31}{21}\right]$

12) $\left\{\left[-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{4}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 4-\frac{2}{3}\right\}\cdot 3-\frac{1}{12}+2$ $\left[-\frac{127}{12}\right]$

13) $\left\{\left[-\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-3\right)\right]\cdot 3-\frac{2}{3}\right\}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{15}+2$ $\left[\frac{-4}{15}\right]$

14) $\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{4}{5}-2\right)\right]\cdot\frac{6}{7}-\frac{4}{5}-\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\right]+\frac{11}{30}$ $[-1]$

15) $\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(2+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{6}$ $[-2]$

16) $\left\{\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\right]^2:\left(\frac{4}{5}\right)^8+\frac{4}{5}\right\}:\left(\frac{6}{5}\right)-1+\frac{2}{3}$ $\left[\frac{13}{15}\right]$

17) $\left\{\left[\left(\frac{1}{25}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^3\right]:\left(\frac{1}{25}\right)^5\right\}:\left(\frac{2}{5}\right)^4+\frac{1}{16}-\frac{2}{3}+\frac{1}{8}$ $\left[\frac{13}{12}\right]$

18) $\frac{1}{3}:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{10}{9}\right]^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^3:\frac{(-2)^5}{9}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

19) $\frac{2}{3}:\left[\left(\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)^3:\left(\frac{6}{7}\right)+\frac{4}{3}\right]^3-\left(\frac{1}{4}-1\right)^2:\frac{3}{(-4)^2}$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

20) $\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{2}+1$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

21) $\left[\left(-\frac{3}{2}+1-\frac{1}{3}\right):2+(2)^{-1}-3\cdot\left(2-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{12}\right]^2-\frac{7}{2}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

22) $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{2}{5}+\left(-1+\frac{1}{2}\right)+0,4\right]:\left[0,\overline{3}-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

23) $\left[\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot 6+\frac{1}{5}:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\frac{3}{13}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(4)^{-1}$ $[-1]$

24) $-1+\frac{2}{3}\cdot\left(-3+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-5+\frac{1}{2}\right):\left[-3\cdot\left(-2-\frac{1}{2}\right)\right]$ $[0]$

25) $\left(\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

26) $1,\overline{3}\cdot(3)^2+\left(2-\frac{1}{5}\right):(5)^{-2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-2)^2$ $[48]$

27) $0,5-\frac{1}{10}:\left(1-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot(3)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right):(-3)^{-2}-12$ $\left[\frac{13}{18}\right]$

28) $\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right]\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+3^0$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

29) $0,1\overline{3}:\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)+(1,5+1)^{-1}:(-2)^2+4$ $\left[-\frac{7}{30}\right]$

30) $\left(\frac{1}{2}\right)^3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(0,2+\frac{1}{5}\right)\cdot(-5)^2+\left(1,\overline{2}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

31) $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}-\left(2-\frac{1}{2}\right)^2:\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2^0$ $\left[-\frac{23}{3}\right]$

## Numeri razionali e rappresentazione decimale

32) Scrivere i numeri decimali corrispondenti alle seguenti frazioni:

$\frac{2}{3}$ ; $\frac{5}{6}$ ; $\frac{1}{8}$ ; $\frac{1}{25}$ ; $\frac{1}{5}$ ; $\frac{1}{13}$

33) Determinare la frazione generatrice dei seguenti numeri decimali:

$0{,}32$ ; $1{,}035$ ; $2{,}\overline{3}$ ; $5{,}0\overline{12}$ ; $3{,}\overline{45}$

*34) *Prova a dimostrare che quando ci sono 2 cifre del periodo dobbiamo mettere due 9 nel denominatore.*

Considera per esempio $1{,}\overline{03}$.

*Suggerimento:* chiama $n = 1{,}\overline{03}$ moltiplica per 100…

35) Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri:

234000000 ; 0,0000012 ; 0,00005

[ $2{,}34 \cdot 10^{8}$ ; $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ ; $5 \cdot 10^{-5}$ ]

36) Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri:

13400; 2450000; 0,000032

[ $1{,}34 \cdot 10^{4}$ ; $2{,}45 \cdot 10^{6}$ ; $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ ]

37) Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri:

23500000; 0,000042; 0,00051

[ $2{,}35 \cdot 10^{7}$ ; $4{,}2 \cdot 10^{-5}$ ; $5{,}1 \cdot 10^{-4}$ ]

# Problemi

38) Un negozio effettua, durante il periodo dei saldi, uno sconto del 25% sui capi d'abbigliamento. Se un capo costava €50, quanto si risparmia?


[€12,5]

39) In un sondaggio relativo al ballottaggio tra 2 candidati (A,B) per l'elezione a sindaco, sono state intervistate 1000 persone: il 50% ha detto che voterà per il candidato A, 200 persone hanno indicato B e alcuni non hanno dato nessuna preferenza. Qual è la percentuale degli indecisi?

[30%]

40)

Per fare una crostata si usano 300g di farina, 150g di zucchero e 50g di burro. Quali sono le percentuali dei vari ingredienti sul totale?

[60%,30%,10%]

41) Un triangolo isoscele ABC di base AB ha il perimetro di 16 cm e i lati obliqui misurano 5 cm. Traccia dal punto medio M del lato AC il segmento MM' parallelo ad AB. Determina l'area del trapezio ABM'M.

[ $Area(ABM'M) = 9cm^2$ ]

42) Un rettangolo ABCD ha dimensioni $a = 12$ e $b = 9$. Se diminuiamo $a$ del 50% e $b$ del 50% di quanto diminuisce l'area?

[ 75% ]

43) Considera il rettangolo dell'esercizio precedente: se diminuiamo *a* del 50% e *b* del 30% di quanto diminuisce l'area?

[ 65% ]

44) In una classe di 25 studenti 2 giocano a pallavolo, 5 a basket, 10 praticano il calcio, 1 segue corsi di danza e 7 non praticano nessuno sport. Calcola le relative percentuali (percentuale di studenti che praticano la pallavolo ecc.).

[ 8% ; 20% ; 40% ; 4% ; 28% ]

45) Un capo di abbigliamento costa 100 euro: all'inizio dei saldi viene scontato del 50% e negli ultimi giorni viene applicato (al prezzo già scontato) un ulteriore ribasso del 30%. A quanto viene venduto il capo alla fine dei ribassi?

[35 euro ]

46) Un elettrodomestico costa 200 euro: se viene venduto a 120 euro quale sconto è stato applicato ?

[ 40% ]

47) In una scuola di 800 alunni l'80% vengono promossi a Giugno e il 4% degli studenti vengono respinti. Quanti studenti vengono "rimandati" in una o più materie?

[ 128 ]

# VERIFICA DI RICAPITOLAZIONE
## Insiemi numerici

1) Se scriviamo $(a+b)+c=a+(b+c)$ quale proprietà abbiamo applicato?

2) Completa:

$3^2 \cdot 3^4 = \ldots\ldots$ $\qquad 2^3 \cdot 3^3 = \ldots\ldots$ $\qquad 12^5 : 2^5 = \ldots\ldots$ $\qquad (2^3)^4 = \ldots\ldots$

$5^6 : 5^2 = \ldots\ldots$ $\qquad 5^0 = \ldots\ldots$

3) Determina $MCD(18,21)$ e $m.c.m.(18,21)$ sia con il metodo della scomposizione in fattori primi dei due numeri che considerando gli insiemi dei divisori e dei multipli comuni.

4) a) Scrivi il numero $(17)_{10}$ in base 2;
b) Scrivi in base 10 il numero $(1101)_2$

5) Riporta sulla retta numerica i seguenti numeri: -4 , 5 , $\frac{13}{4}$ , $-\frac{7}{2}$ , $\frac{19}{4}$ .

6) Calcola:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{\frac{1}{2}}{2}$$

7) Calcole le seguenti potenze con esponente intero negativo

$$\left(\frac{1}{2}-3\right)^{-1} \quad ; \quad \left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad ; \quad \left(1-\frac{7}{6}\right)^{-3}$$

8) Trasforma le frazioni in numeri decimali e per ciascun numero decimale scrivi la frazione generatrice: $\frac{3}{4}$ ; $\frac{5}{3}$ ; $\frac{5}{6}$ ; $2{,}7$ ; $2{,}\overline{7}$ ; $2{,}3\overline{7}$

9) In un trapezio isoscele ABCD la base minore sta alla base maggiore come 1: 4 e la loro somma è 10 cm. Determina perimetro e area del trapezio sapendo che l'altezza misura 4 cm.

10) In una classe di 30 studenti il 10% pratica il nuoto, 12 studenti giocano a basket e 9 studenti giocano a calcio. Quanti sono gli studenti che praticano il nuoto ? Qual è la percentuale degli studenti che praticano basket? E la percentuale di quelli che giocano a calcio?

## SCHEDA PER IL RECUPERO
INSIEMI NUMERICI, BASI DI NUMERAZIONE

1. Per i seguenti numeri indica a quale insieme numerico appartengono:

$$5 \quad ; \quad -\frac{2}{3} \quad ; \quad -3 \quad ; \quad \sqrt{2} \quad ; \quad \frac{7}{3}$$

2. Sviluppa la seguente espressione numerica:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(-\frac{2}{3}\right)^2+5^0-\left(\frac{2}{3}\right):\left(\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2^3 \qquad [-\frac{3}{10}]$$

3. Trova la frazione generatrice dei seguenti numeri decimali:

$$1{,}2 \quad ; \quad 2{,}\overline{3} \quad ; \quad 1{,}1\overline{4} \qquad [\ \frac{12}{10} \quad ; \quad \frac{7}{3} \quad ; \quad \frac{103}{90}\ ]$$

4. Indicata quale proprietà è stata utilizzata nelle seguenti uguaglianze:

$$a+b=b+a$$
$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$
$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \qquad (c\neq 0)$$

5. Scrivi il risultato delle seguenti divisioni:

$5:0=$.............. ; $0:5=$............ ; $0:0=$...............

$\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=$................. ; $\frac{1}{4}:2=$........... ; $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=$..............

6. Scrivi in base 2 i seguenti numeri (scritti in base 10):

12 ; 34 ; 18 $\qquad [(1100)_2 \quad ; \quad (100010)_2 \quad ; \quad (10010)_2\ ]$

7. Scrivi in base 10 i seguenti numeri scritti in base 2:

1001 ; 11011 ; 111 $\qquad$ [ 9 ; 27 ; 7 ]

# TEST

1) Choose one of the symbol $>$ $=$ $<$ above to complete each of the following statements.

a. 74% ________ $\frac{5}{7}$ b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ________ 8

2) Simplify:

a. $\left(\frac{1}{p}\right)^{0}$ b. $(r^2)^{-3}$

3) In a sale, the price of a boat was reduced from \$21 000 to \$ 16 800. Calculate the reduction as a percentage of the original price.

4) Mrs Duval makes one litre of ice cream. She eats $\frac{1}{8}$ litre and her children eat $\frac{3}{5}$ litre. Without using your calculator, find what fraction of a litre of ice cream is left. Show all your working clearly.

5) Write the following in order, staring with the smallest.

$$0.43 \quad \frac{4}{9} \quad 41\%$$

6) In a geography text book, 35% of the pages are coloured. If there are 98 coloured pages, how many pages are there in the whole book?

7) A town has 3500 families who own a car. If this represents 28% of the families in the town, how many families are there in total?

8)In a test Isabel scored 88%. If she got three questions incorrect, how many did she get correct?

9) If $\frac{3}{5}$ of the people in a theatre buy a snack during the interval, and of those who buy a snack $\frac{5}{7}$ buy ice cream, what fraction of the people in the theatre buy ice cream?

10) The angles in a triangle are in the ratio 3:4:8

a) Show that the smallest angle of the triangle is 36°.

b) Work out the other two angles of the triangle.

11) Denzil picks 800 tomatoes. 4% of the 800 tomatoes are damaged. How many of these tomatoes are **not** damaged?

12) (a) The running costs for a papermill are \$ 75 246.
This amount is divided in the ratio labour costs : materials = 5 : 1
Calculate the labour costs.

(b) In 2012 the company made a profit of \$ 135 890. In 2013 the profit was \$ 150 675.
Calculate the percentage increase in the profit from 2012 to 2013.

(c) The profit of \$ 135 890 in 2012 was an increase of 7% on the profit in 2011.
Calculate the prof in 2011.

13) Jane and Kate share \$240 in the ratio 5:7 .

(a) Show that Kate receives \$140.
(b) Jane and Kate each spend \$20.
Find the new ratio Jane's remaining money : Kate's remaining money. Give your answer in its simplest form.

14) Denzil sells 750 of his tomatoes.

(a) The mean mass of a tomato is 66 g.
Calculate the mass of the 750 tomatoes in kilograms.
(b) Denzil sells his tomatoes at \$1.40 per kilogram.
Calculate the total amount he receives from selling all the 750 tomatoes.
(c) The cost of growing these tomatoes was \$33.Calculate his percentage profit.

15) Ahmed, Batuk and Chand share \$1000 in the ratio 8 : 7 : 5.
Calculate the amount each receives.

16) Mrs Singh and Mr Patel are teachers.
They take their two classes to the theatre to see a play.

(a) Mrs Singh has 20 girls in her class.The ratio of girls : boys = 5 : 3.
Show that Mrs Singh has 32 students in her class.
(b) Mr Patel has 40 students in his class.The ratio of girls : boys = 3 : 2 .
For the 72 students in the two classes, work out the ratio of total number of girls : total number of boys . Give your answer in its simplest form.

17) The Smith family paid \$5635 for a holiday in India.
The total cost was divided in the ratio travel : accommodation : entertainment = 10 : 17 : 8.

(a) Calculate the percentage of the total cost spent on entertainment.
(b) Show that the amount spent on accommodation was \$2737
(c) Mr Smith, his wife and their three children visit a theme park.

The tickets cost 2500 Rupees for and adult and 1000 Rupees for a child.

(1 Rupee = \$0. 0152). Calculate the total cost of the tickets in dollars.