Successioni numeriche

Una successione numerica è una funzione che associa ad ogni numero naturale $n \in N$ un numero reale:

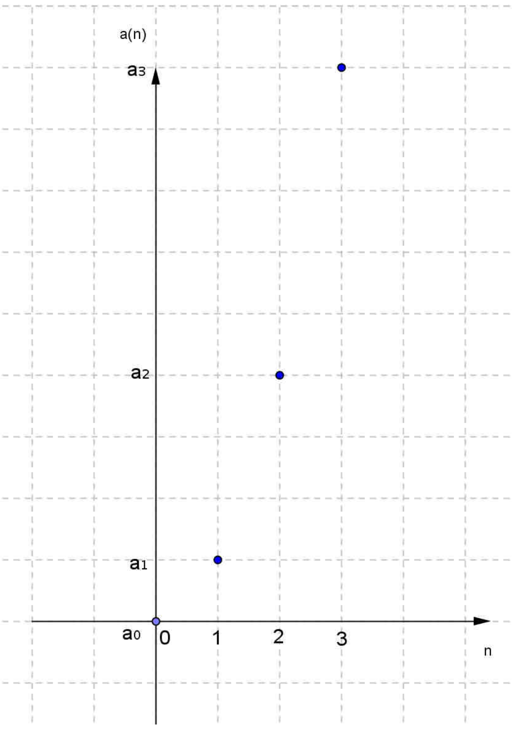
$$a : N \to R$$
$$a : n \to a(n)$$

$a(n)$ viene spesso indicato con a_n e viene chiamato termine n-esimo della successione.

Esempi

1) $a : n \to n^2$

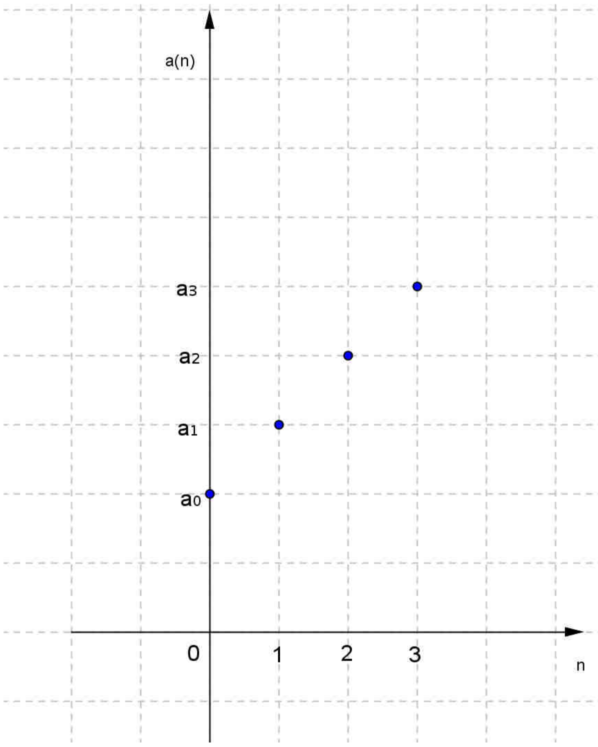
Abbiamo: 0,1,4,9,16….Per indicare questa successione possiamo anche scrivere $a_n = n^2$:



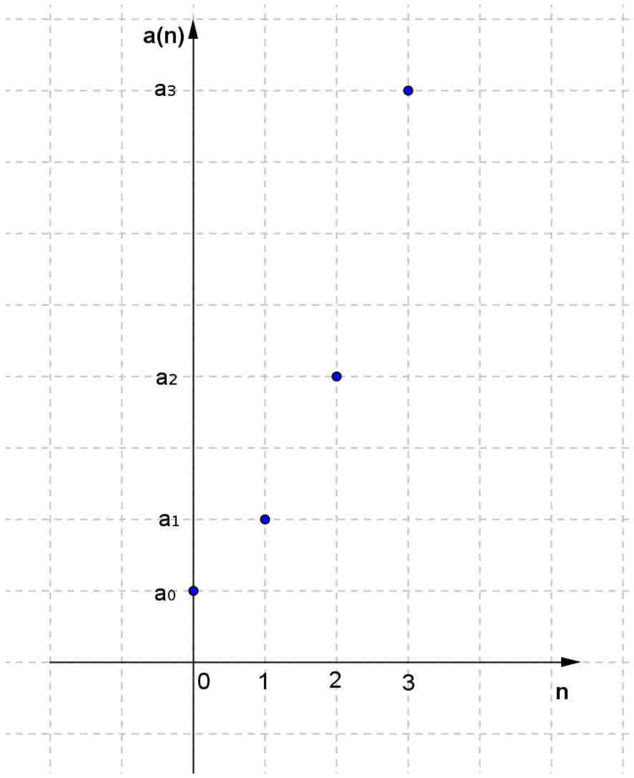
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2^2 = 4$$
$$ecc.$$

2) $a : n \to n+2$

$$a_0 = 2$$
$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 4$$
$$ecc.$$



3) $a : n \rightarrow 2^n$



$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 = 4$$
$$a_3 = 2^3 = 8$$

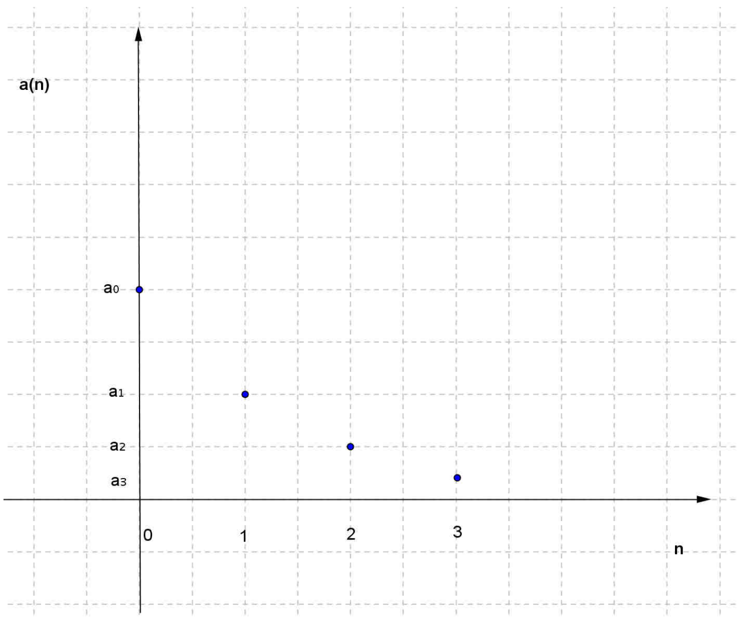
Nota

Alcune successioni vengono definite assegnando il termine iniziale a_0 e la relazione tra il termine a_n e il termine successivo a_{n+1} e in questo caso si dice che la successione è definita "per ricorrenza".

Esempio: consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} \end{cases}$$

Abbiamo:



$$a_0 = 2$$
$$a_1 = \frac{2}{2} = 1$$
$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{4}$$
$ecc.$

Progressioni aritmetiche

Una progressione aritmetica è una successione in cui la differenza d tra un termine e il precedente è costante, cioè una successione in cui si assegna il primo termine a_0 e d (che sta per "differenza" e che viene chiamata "ragione " della successione):

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$$

Esempi

1) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$

Abbiamo: 2,6,10,14,18,22…..

In questo caso osserviamo che si tratta di una successione crescente (ogni termine è maggiore del precedente).

2) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases}$

Abbiamo: 2,-2 ,-6 ,-10 ,-14 …..
In questo caso la successione è decrescente (ogni termine è minore del precedente).

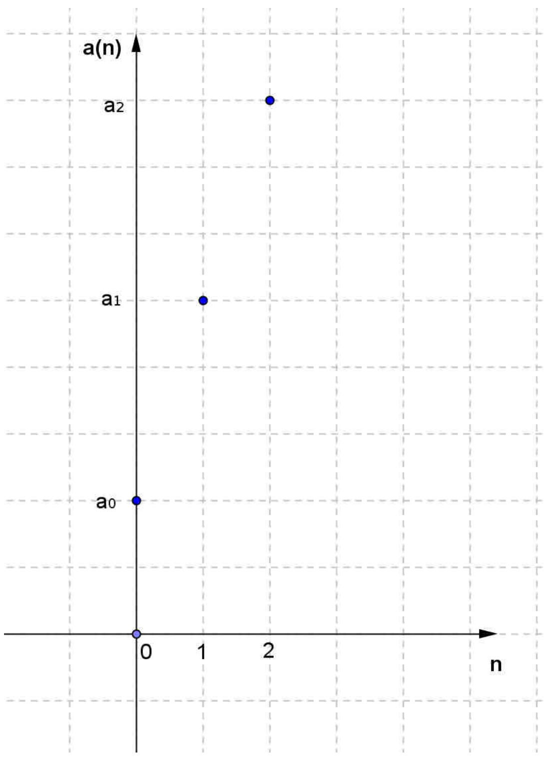
Osservazione

Il termine a_n di una progressione aritmetica di primo termine a_0 e ragione d risulta

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

Infatti abbiamo: a_0 ; $a_0 + d$; $(a_0 + d) + d = a_0 + 2 \cdot d$; ecc.
Quindi il grafico di una progressione aritmetica sarà formato da punti allineati.

Per esempio in figura è rappresentato il grafico della progressione $a_n = 2 + 3 \cdot n$ avente $a_0 = 2$ e ragione $d = 3$.



Problema

Data una progressione aritmetica, come risulta la somma dei suoi primi n termini?

Consideriamo per esempio la successione aritmetica di termine $a_0 = 2$ e ragione $d = 3$.
Quanto risulta la somma dei suoi primi 10 termini cioè quanto risulta

$$S_{10} = 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \ ?$$

Possiamo osservare che riscrivendo la somma S in ordine inverso e sommando membro a membro abbiamo:

$$S_{10} = 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29$$
$$S_{10} = 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2$$
$$2\cdot S_{10} = 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \Rightarrow S_{10} = \frac{31\cdot 10}{2}$$

In generale quindi abbiamo:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + ...a_{n-1}$$
$$S_n = a_{n-1} + a_{n-2} + ...a_0$$
$$2\cdot S_n = (a_0 + a_{n-1})\cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_0 + a_{n-1})\cdot n}{2}$$

Un aneddoto

Il grande matematico Gauss quando era bambino riuscì a calcolare la somma dei primi 100 numeri naturali (che il maestro aveva dato da calcolare perché i suoi studenti passassero un po' di tempo….) proprio osservando che la somma del primo e dell'ultimo dava 101 così come la somma del secondo e del penultimo ecc. e quindi calcolando semplicemente $\frac{101\cdot 100}{2}$.

Esercizio

Se consideriamo n come il numero di secondi , qual è la successione $s(n)$ che esprime le posizioni occupate da un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v rispetto ad un fissato sistema di riferimento partendo da una posizione iniziale $s(0)$?

$$s(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Progressioni geometriche

Una progressione geometrica è una successione in cui il rapporto tra un termine e il precedente è costante, cioè una successione in cui si assegna il primo termine a_0 e q (che sta per "quoziente" e viene chiamata "ragione" della progressione) :

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = q \cdot a_n \end{cases}$$

Esempi

1) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo: 2, 6 ,18 , 54 , 162 …..
Osserviamo che la successione è crescente ($q > 1$ e il primo termine è positivo).

2) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo : $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$
Osserviamo che la successione è decrescente ($0 < q < 1$ e il primo termine è positivo).

3) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = -3 \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo: 2 , -6 , 18 , -54 , 162 ….
Osserviamo che i termini della successione sono alternativamente positivi e negativi.

4) $\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo: -2 , -6 ,-18 ,-54 ,-162 …..

I termini sono tutti negativi e la successione è decrescente.

5) $\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot a_n \end{cases}$

Abbiamo: $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{27} \ldots$
I termini sono tutti negativi e la successione è crescente.

Osservazione

Il termine a_n di una progressione geometrica di primo termine a_0 e ragione q risulta

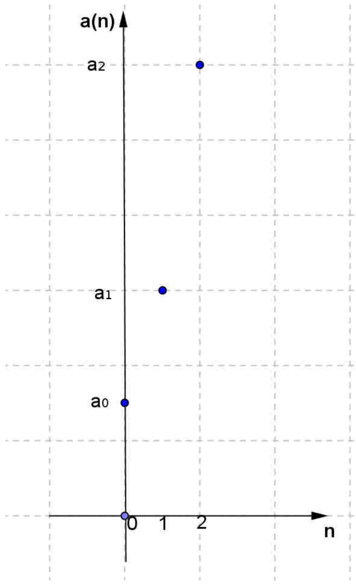
$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Infatti abbiamo : a_0 , $a_0 \cdot q$, $(a_0 \cdot q) \cdot q = a_0 \cdot q^2$ ecc.

Se per esempio consideriamo la progressione geometrica con $a_0 = 3$ e $q = 2$ abbiamo:

$$3\ ,\ \ 3 \cdot 2\ ,\ 3 \cdot 2^2\ ,\ \ 3 \cdot 2^3, \ldots.$$

Il grafico cresce rapidamente.



Problema

Come possiamo calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica (a_0, q) *?*

Poniamo $S_n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \ldots. + a_0 \cdot q^{n-1}$

Se moltiplichiamo per q abbiamo: $S_n \cdot q = a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \ldots. + a_0 \cdot q^n$

Calcoliamo ora $S_n \cdot q - S_n$: osserviamo che abbiamo

$$S_n \cdot q - S_n = a_0 \cdot q^n - a_0$$

poiché gli altri termini si annullano.
Allora possiamo scrivere:

$$S_n \cdot (q-1) = a_0 \cdot (q^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_0 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$$

Se per esempio consideriamo la progressione geometrica con $a_0 = 3$ e $q = 2$ abbiamo

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 1023 = 3069$$

Un aneddoto

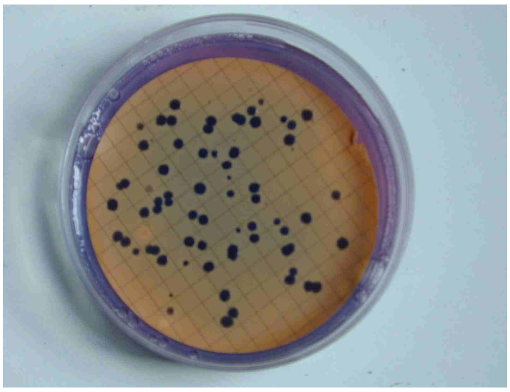
Una leggenda narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse come ricompensa al re di Persia di avere tanti chicchi di grano quanti se ne poteva disporre su una scacchiera ponendo:

1 chicco nella prima casella, due chicchi nella seconda, quattro chicchi nella terza e così via fino alla 64° casella.

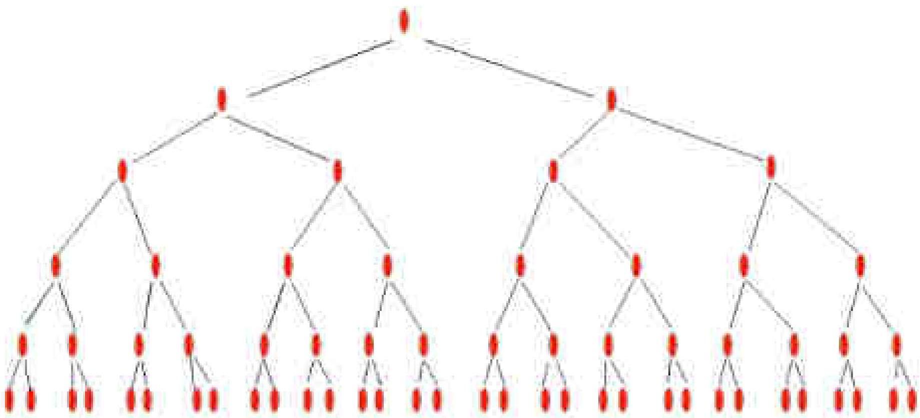
Inizialmente il re pensò che l'inventore si fosse accontentato di poco ma quando si accorse che avrebbe dovuto dargli $S_{64} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ chicchi la leggenda narra che, preso dall'ira, decise di tagliargli la testa!

Scheda 1

Colonie di batteri



La mitosi è un processo legato alla divisione cellulare. Attraverso la mitosi una cellula si divide in due cellule figlie che risultano geneticamente e morfologicamente identiche tra loro e alla cellula madre. La maggior parte dei batteri si riproduce mediante il meccanismo della scissione cellulare, ovvero della mitosi. Una volta che una cellula ha raggiunto una certa dimensione, si divide in due cellule identiche, di massa pari a circa la metà di quella originaria. Intanto anche le due cellule figlie crescono fino a dividersi ulteriormente e così via....



Un dato batterio si riproduce ogni ora circa, proliferando in colonie molto grandi.

Supponiamo di poter osservare l'evoluzione di una popolazione di questi batteri e che all'inizio della nostra osservazione sia costituita da $N_0 = 1000$ batteri. Come risulta il numero dei batteri che popolano la colonia al tempo t (misurando t in ore)?

N(0) = 1000

N(1) = …………………

$N(2) =$ …………………

Quindi $N(t) =$ ……………..

Prova a disegnare il grafico di $N(t)$ nel piano cartesiano.

Scheda 2

Interesse semplice o composto?

Quando versiamo dei soldi in banca riceviamo un compenso che è l'interesse.
L'interesse è il prezzo che la banca paga per poter disporre del nostro denaro e può essere:

- *Interesse Semplice*: se per esempio abbiamo depositato 100 euro e l'interesse è semplice del 5% guadagneremo 5 euro all'anno e quindi dopo 10 anni, per esempio, avremo $5 \cdot 10$ euro in più rispetto al capitale depositato.
- *Interesse Composto*: l'interesse è calcolato alla fine di ogni anno e si capitalizza, cioè si aggiunge al capitale depositato.

  Quindi se abbiamo depositato 100 euro e l'interesse è del 5% composto il primo anno guadagneremo 5 euro ma il secondo anno guadagneremo il 5% di 100+5=105 euro quindi 5,25 euro ecc.

Supponiamo di aver depositato in banca 1000 euro e che la banca applichi un interesse i = 2%.

Calcola il capitale $C(1)$, $C(2)$ … C(t) dopo 1, 2 anni ….*t* anni nel caso che si tratti di:

a) interesse semplice

$C(1) = ...$
$C(2) = ...$
$C(t) = ...$

b) interesse composto

$C(1) = ...$
$C(2) = ...$
$C(t) = ...$

Traccia i grafici corrispondenti : è chiaro che è più conveniente l'interesse ……….

Generalizza: se indichiamo con i l'interesse (per esempio $i = 2\% = 0{,}02$) e con C_0 il capitale iniziale (cioè al tempo 0) scrivi come risulta il capitale $C(t)$ dopo *t* anni

a) interesse semplice $C(t) = ...$

b) interesse composto $C(t) = ...$

Scheda 3

Scala musicale temperata

Nella scala musicale temperata l'intervallo di un'ottava (per esempio da Do al Do di frequenza doppia) viene diviso in 12 intervalli uguali chiamati semitoni temperati cioè il rapporto tra la frequenza di due note consecutive (esempio Do e Do diesis, Do diesis e Re ecc.) è costante.

Se chiamiamo f_0 la frequenza assegnata al Do (di una determinata ottava), come possiamo ricavare le frequenze delle note successive (Do diesis, Re, Re diesis, Mi, Fa, Fa diesis, Sol , Sol diesis, La , La diesis, Si, Do)?

<u>Suggerimento:</u> ricorda che la frequenza del Do successivo dovrà essere $f_{12} = 2 \cdot f_0$ e che $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ è costante cioè le frequenze sono in progressione geometrica.

Riesci a determinare la ragione di questa progressione geometrica?

……

……

ESERCIZI

1) ***Tasso alcolemico***

Il tasso alcolemico nel sangue indica la quantità (in grammi) di alcool puro presente in 1 litro di sangue: se una persona ha un tasso alcol emico di 1 *g/l* vuol dire che ha 1 grammo di alcool puro per litro di sangue.

Sapendo che in media il fegato riesce a smaltire l'alcool riducendo il tasso alcolemico del 30% ogni ora, se una persona ha inizialmente (dopo una bevuta) un tasso alcolemico $a_0 = 1{,}5(g/l)$ scrivi la successione che descrive il tasso alcolemico in funzione del tempo misurato in ore cioè calcola a_n (tasso alcolemico dopo *n* ore).

Dopo quante ore il tasso è minore di $0{,}5(g/l)$ (limite previsto in genere per chi è alla guida di un veicolo)?

[$a_n = 1{,}5 \cdot (0{,}7)^n$; dopo circa 3 ore]

Nota: fai una ricerca su qual è il tasso alcolemico fissato per legge oltre il quale ci sono multe per guida in stato di ebbrezza e controlla bevendo cosa e quanto si può raggiungere questo limite.

2) ***Rimbalzi***

Supponiamo che una palla venga lasciata cadere da un'altezza iniziale $h_0 = 1{,}4(m)$ e che ad ogni rimbalzo perda il 20% della sua energia. Come risulta l'altezza h_n della palla dopo *n* rimbalzi?
Qual è l'altezza raggiunta dopo il 5° rimbalzo ?

Se una palla identica, al 6° rimbalzo, raggiunge l'altezza di 0,5 m , da quale altezza era stata lasciata cadere ? Approssima i risultati alla seconda cifra decimale.

[$h_n = 1{,}4 \cdot (0{,}8)^n$; 0,46 m ; 1,91 m]

3) ***Allenamento in bicicletta***

a)Un ciclista programma un allenamento stabilendo di percorrere il giorno iniziale 30 Km e nei giorni successivi il 10% in più del giorno precedente. Ponendo $a_0 = 30$ come risulta a_n ?
Se l'allenamento dura 10 giorni, quanti chilometri in totale ha percorso?

b) Se invece l'allenamento avesse previsto di aumentare di 3 Km al giorno come risulterebbe a_n e quanti chilometri in totale si sarebbero percorsi in 10 giorni?

Nota: a_n rappresenta i Km percorsi dopo n+1 giorni di allenamento se consideriamo anche il giorno iniziale.

[*a*) $a_n = 30 \cdot (1{,}1)^n$; circa 478 Km ; *b*) $a_n = 30 + 3n$; circa 435 Km]

4) ***Decadimento radioattivo***

Alcune sostanze, dette radioattive, si trasformano in altre sostanze (si dice che "decadono") e il tempo in cui la sostanza si dimezza (metà della sua massa iniziale si è trasformata) viene chiamato "tempo di dimezzamento" ed è diverso da sostanza a sostanza radioattiva.

Per esempio lo iodio-131 ha un tempo di dimezzamento di 8 giorni: se inizialmente hai 200 g di iodio-131 dopo 24 giorni quanti grammi sono rimasti? E dopo 50 ?

[25 g ; 3,125 g]

5) ***Ninfee***
Le ninfee di un lago impiegano 1 giorno per raddoppiare la propria superficie: se all'inizio occupano 10 m^2 e il lago ha una superficie di 320 m^2, dopo quanti giorni le ninfee avranno occupato l'intera superficie del lago?

[n=5]