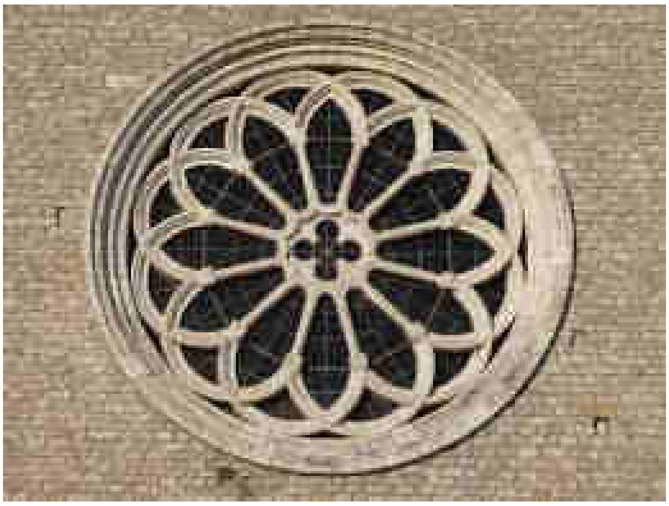
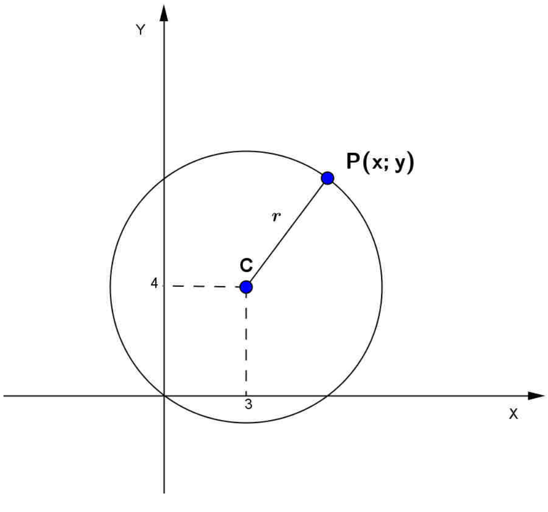
La circonferenza nel piano cartesiano



Abbiamo già studiato la circonferenza di raggio *r* e centro C come l'insieme di punti per i quali la distanza da C è uguale a *r* : ora vogliamo studiare la circonferenza nel piano cartesiano.

Consideriamo la circonferenza in figura in cui il centro è $C(3;4)$ e il raggio $r = 5$: se indichiamo con $P(x; y)$ un punto della circonferenza avremo, per definizione, che la distanza tra P e C è uguale a 5.



Per scrivere l'equazione che rappresenta questa circonferenza basterà scrivere la proprietà di tutti i suoi punti cioè $\overline{PC} = 5$

Avremo $$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 5$$

ed elevando al quadrato entrambi i membri avremo:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

In generale l'equazione di una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(x_C ; y_C)$ e raggio r sarà quindi

$$\boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2}$$

Sviluppando otteniamo

$$x^2-2x_C x+x_C{}^2+y^2-2y_C y+y_C{}^2-r^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x_C x-2y_C y+x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=0$$

Si pone
$$\begin{cases} -2x_C=a \rightarrow x_C=-\dfrac{a}{2} \\ -2y_C=b \rightarrow y_C=-\dfrac{b}{2} \\ x_C{}^2+y_C{}^2-r^2=c \rightarrow r=\sqrt{x_C{}^2+y_C{}^2-c} \end{cases}$$

Quindi abbiamo $\quad x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad \begin{cases} C\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2}\right) \\ r=\sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{b}{2}\right)^2-c} \end{cases}$

Osservazioni

Abbiamo visto che l'equazione di una circonferenza è molto diversa da quella di una retta: è un'equazione di 2° grado in cui i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali (se sono diversi da 1 si può dividere tutta l'equazione per il valore del coefficiente di x^2 e y^2) e in cui manca il termine *xy*.Inoltre, per avere una circonferenza "reale", dovrà essere

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c \geq 0 \qquad \left(\text{ ricorda che } r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}\right)$$

Se r = 0 la circonferenza "degenera" in un solo punto.

Esempi

1) $x^2+y^2=1$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e $r = 1$.
   In generale $x^2+y^2=r^2$ e l'equazione della circonferenza di centro $C(0,0)$ e raggio r.

2) $2x^2+2y^2-4x+2y=0 \rightarrow x^2+y^2-2x+y=0$ è l'equazione della circonferenza di centro $C(1;-\frac{1}{2})$ e raggio $r=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3) $x^2+y^2+4=0$ non rappresenta una circonferenza reale perché $r=\sqrt{-4}\notin\Re$.

4) $x^2+y^2+ax+by=0$ è l'equazione di una circonferenza passante per l'origine (c = 0).

Problemi

1) Determina l'equazione della circonferenza avente **centro C assegnato** e **passante per un punto A assegnato**.

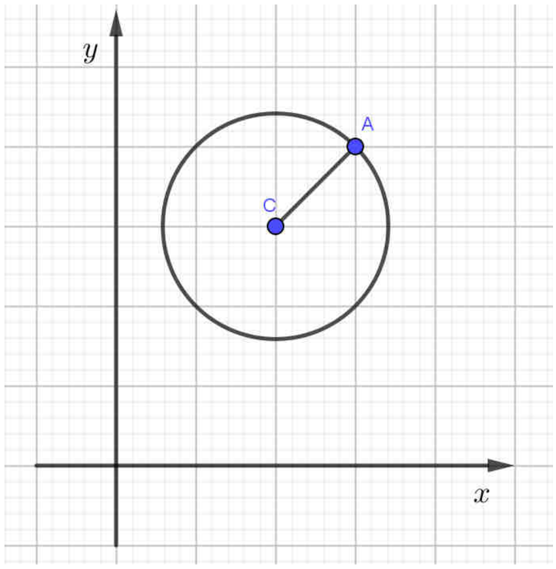
E' chiaro che basterà calcolare raggio = $\overline{AC}$.

Esempio: determina l'equazione della circonferenza avente centro $C(2;3)$ e passante per il punto $A(3;4)$.

Abbiamo $\overline{CA} = \sqrt{2}$.

Quindi l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$$



2) **Determina l'equazione della circonferenza C passante per tre punti A,B,C non allineati** (è come cercare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$).

Il centro della circonferenza si può trovare intersecando l'asse del segmento AB con l'asse del segmento BC: così facendo, infatti, troviamo un punto che è equidistante da A,B,C e quindi è il centro della circonferenza.

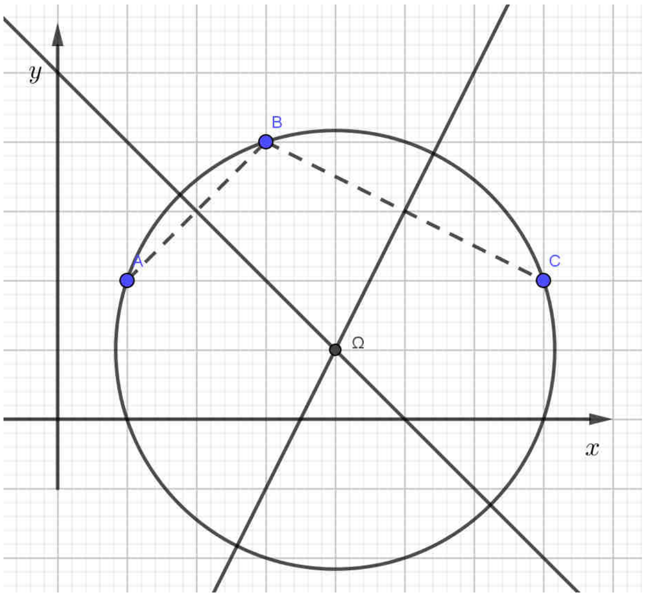
Per trovare il raggio basta calcolare la distanza del centro trovato da uno qualsiasi dei tre punti.

Esempio: determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(7;2)$.

- Determiniamo l'asse di AB: il punto medio ha coordinate $(2;3)$ e l'inclinazione dell'asse è $m = -1$ e quindi abbiamo
  $y - 3 = -(x-2) \rightarrow y = -x + 5$
- Determiniamo l'asse di BC: il punto medio ha coordinate $(5;3)$ e l'inclinazione è $m = 2$ e quindi abbiamo
  $y - 3 = 2(x-5) \rightarrow y = 2x - 7$

Intersechiamo i due assi indicando con Ω il centro della circonferenza (non possiamo usare la lettera C perché faremo confusione con il punto C assegnato).

$$\Omega\begin{cases} y=-x+5 \\ y=2x-7 \end{cases} \rightarrow .....\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$



A questo punto determiniamo il raggio calcolando , per esempio, la distanza $\overline{A\Omega}=\sqrt{10}$ e in conclusione l'equazione della circonferenza risulta:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

Naturalmente possiamo anche sviluppare i calcoli:

$$x^2-8x+16+y^2-2y+1=10 \rightarrow x^2+y^2-8x-2y+7=0$$

NOTA

Questo problema può essere risolto anche sostituendo le coordinate dei tre punti nell'equazione generale $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e risolvendo il sistema.

$$\begin{matrix} A(x_A,y_A)\rightarrow \\ B(x_B,y_B)\rightarrow \\ C(x_C,y_C)\rightarrow \end{matrix}\begin{cases} x_A^{\ 2}+y_A^{\ 2}+ax_A+by_A+c=0 \\ x_B^{\ 2}+y_B^{\ 2}+ax_B+by_B+c=0 \\ x_C^{\ 2}+y_C^{\ 2}+ax_C+by_C+c=0 \end{cases}$$

Le incognite sono *a,b,c*.

I calcoli sono in genere più faticosi e quindi **è preferibile il primo metodo**.

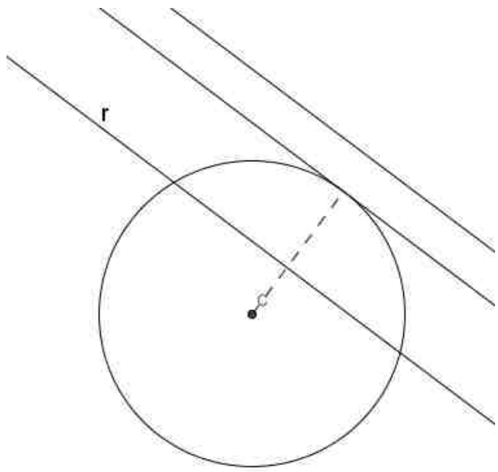
Retta e circonferenza

Una retta r può essere esterna, tangente o secante ad una circonferenza $\mathcal{C}$.

La retta è esterna quando $d(C,r) > raggio$

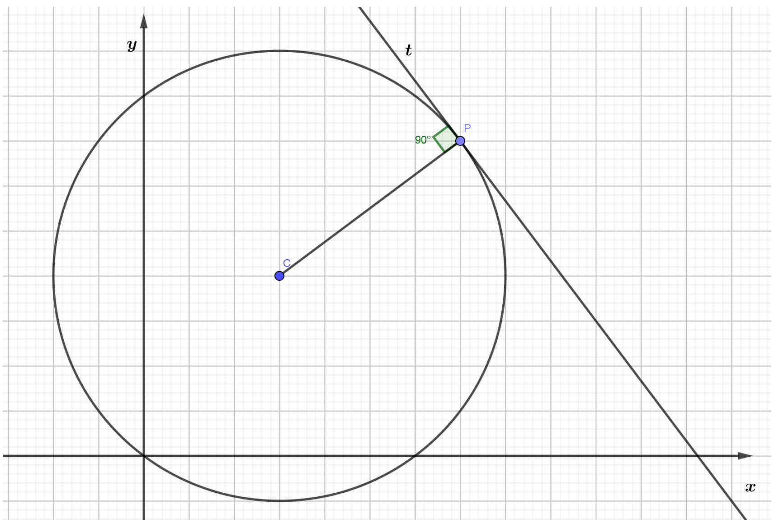
La retta è tangente quando $d(C,r) = raggio$

La retta è secante quando $d(C,r) < raggio$



Rette tangenti ad una circonferenza

1) Risolviamo il seguente problema: data la circonferenza $\mathcal{C}$ in figura e considerato il suo punto $P(7;7)$ **determinare la retta** t **tangente in P alla circonferenza** $\mathcal{C}$**.**

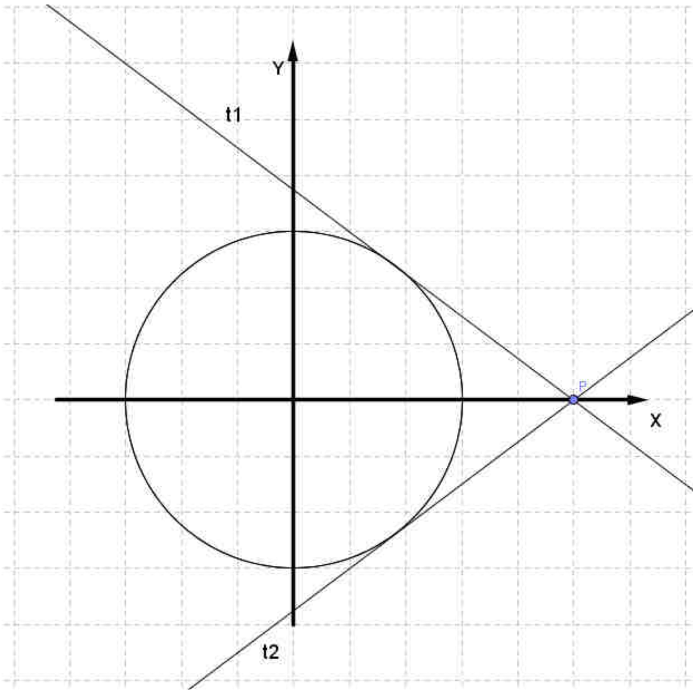


Possiamo, nel fascio di rette passanti per P, individuare quella la cui distanza da C è uguale a 5 (raggio di $\mathcal{C}$), ma c'è un procedimento più veloce.

Basta infatti osservare **che la retta *t* risulterà perpendicolare al raggio CP** e quindi:

$$m_{CP} = \frac{3}{4} \rightarrow m_t = -\frac{4}{3} \rightarrow t: y - 7 = -\frac{4}{3}(x - 7)$$

2) Risolviamo adesso il seguente problema: data la circonferenza C in figura e considerato il punto P(5;0), **determinare le rette t_1 e t_2 tangenti alla circonferenza uscenti da P.**



$C: x^2+y^2=9$

P(5,0)

Consideriamo la generica retta passante per P

$$y = m(x-5) \rightarrow mx - y - 5m = 0$$

Dobbiamo cercare le rette che hanno distanza 3 (raggio=3) dal centro di C (0,0) e quindi

$$\frac{|-5m|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \rightarrow |-5m| = 3\sqrt{m^2+1}$$

Elevando al quadrato:

$$25m^2 = 9(m^2+1)$$

$$16m^2 = 9 \rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \rightarrow m = \pm\frac{3}{4}$$

Quindi

$$t_1 : \quad y = -\frac{3}{4}(x-5)$$

$$t_2 : \quad y = \frac{3}{4}(x-5)$$

La condizione di tangenza

Questo problema poteva essere risolto anche in un altro modo.

Ricordiamo che se intersechiamo una retta con una circonferenza possiamo avere:

nessun punto di intersezione — se r è esterna a $\mathcal{C}$

1 solo punto di intersezione (o meglio due punti coincidenti) — se r è tangente a $\mathcal{C}$

2 punti di intersezione — se r è secante a $\mathcal{C}$

Algebricamente questo significa che risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \text{equazione circonferenza C} \\ \text{equazione retta r} \end{cases}$$

troveremo un'equazione di 2° grado il cui Δ sarà:

$\Delta < 0$ se r è esterna a $\mathcal{C}$

$\Delta = 0$ se **r è tangente a $\mathcal{C}$** : questa viene detta "**condizione di tangenza**"

$\Delta > 0$ se r è secante a $\mathcal{C}$

Quindi il problema poteva essere risolto impostando il sistema tra la circonferenza e la generica retta passante per P e poi imponendo che il discriminante dell'equazione che si ottiene dopo aver sostituito sia nullo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \rightarrow x^2 + m^2(x^2 - 10x + 25) = 9 \rightarrow (1+m^2)x^2 - 10m^2x + 25m^2 - 9 = 0 \\ y = m(x-5) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\Delta}{4} = 25m^4 - (1+m^2)(25m^2 - 9) = 0}$$

Svolgendo i calcoli abbiamo:

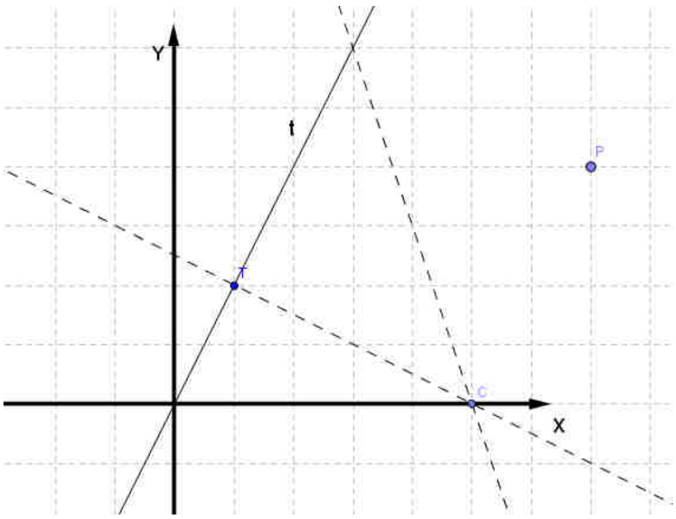
$$25m^4 - 25m^2 + 9 - 25m^4 + 9m^2 = 0 \rightarrow 16m^2 = 9 \rightarrow m^2 = \frac{9}{16} \rightarrow m = \pm\frac{3}{4}$$

Altri problemi sulla circonferenza

1) Determina la circonferenza **avente centro C assegnato e tangente ad una retta t assegnata**.
Per esempio: C(1;3) t: y=-x ($\rightarrow$x+y=0).
Basterà calcolare raggio = distanza (centro, tangente)
Nel nostro caso $r = \frac{|1+3|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$$\mathcal{C} \ : \ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$$

2) Determina l' equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ **tangente in un punto T ad una retta assegnata t e passante per un punto P assegnato**.
Per esempio: t: y=2x T(1;2) P(7;4)



Possiamo individuare il centro C della circonferenza intersecando l' asse del segmento TP con la retta per T perpendicolare a t

$$\begin{cases} asse_{TP} : y-3 = -3(x-4) & \Rightarrow y = -3x+15 \\ perp.\cdot per \cdot T \cdot a \cdot t : y-2 = -\frac{1}{2}(x-1) & \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow C(5;0)$$

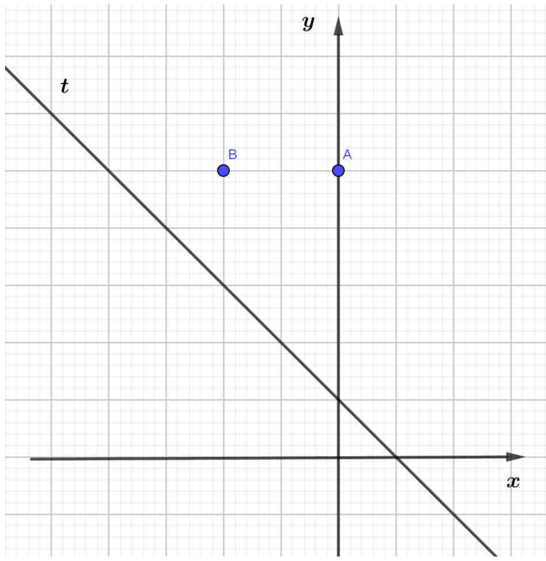
Naturalmente $r = \overline{TC} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$$\mathcal{C} \ : \ (x-5)^2 + y^2 = 20$$

(*) Questo problema si può risolvere anche considerando l'equazione generale $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e imponendo il passaggio per T, per P e la condizione di tangenza a t (si ottiene un sistema di 3 equazioni nelle incognite *a,b,c*).

3) Determina l'equazione della circonferenza C **tangente ad una retta t assegnata e passante per due punti A e B assegnati**.

Per esempio t: $y=-x+1$ e A(0;5) B(-2;5).



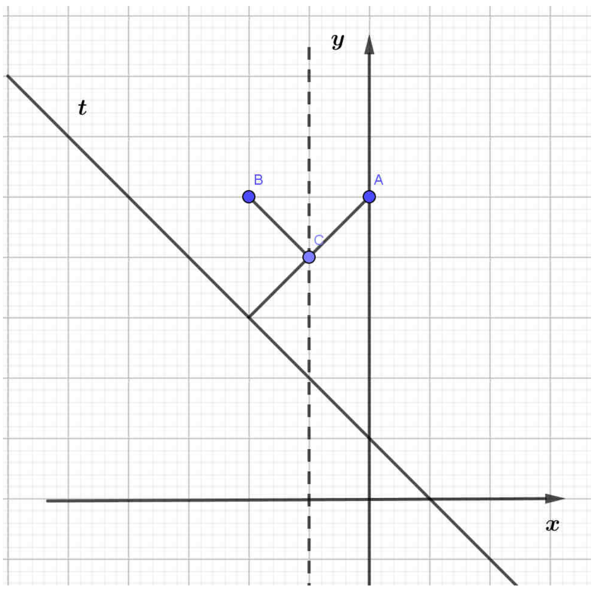
Se la circonferenza deve passare per A e B il suo centro dovrà appartenere all'asse del segmento AB che risulta la retta di equazione $x=-1$.

Quindi possiamo dire che il centro dovrà essere del tipo

$$C(-1;y)$$

Ma perché la circonferenza sia tangente alla retta t **la distanza di C da t dovrà essere uguale al raggio** $\overline{CA}$ (o $\overline{CB}$).

Dopo aver scritto l'equazione della tangente in forma implicita $x+y-1=0$, possiamo impostare questa uguaglianza:



$$d(C,t)=\overline{CA}$$

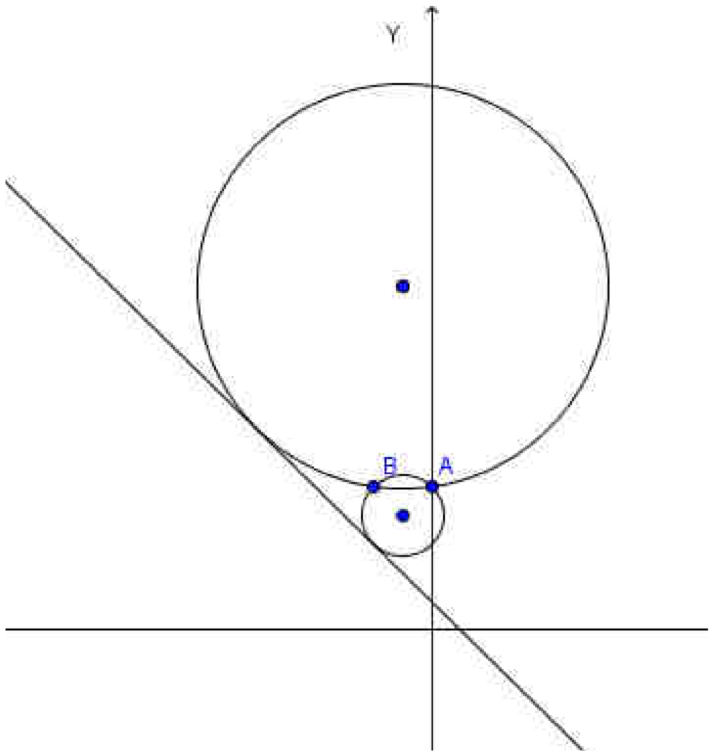
$$\frac{|-1+y-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{1+(y-5)^2}\rightarrow\frac{|y-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{y^2-10y+26}$$

$$\frac{(y-2)^2}{2}=y^2-10y+26.....$$

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione:

$$y^2-16y+48=0\rightarrow y_{1,2}=8\pm4$$

In conclusione abbiamo due centri $C_1(-1;4)$, $C_2(-1;12)$ e quindi **due circonferenze** che risultano tangenti a *t* e passanti per A e B.



Nota: questo problema poteva anche essere in modo "algebrico" nel seguente modo: consideriamo l'equazione generale di una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e imponiamo il passaggio per i punti A e B e la condizione di tangenza.

$$\begin{array}{l} passaggio \cdot per \cdot A \rightarrow \\ passaggio \cdot per \cdot B \rightarrow \\ (*) cond. \tan genza \rightarrow \end{array} \begin{cases} 25 + 5b + c = 0 \\ 4 + 25 - 2a + 5b + c = 0 \\ \Delta = (a - b - 2)^2 - 8(1 + b + c) = 0 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \begin{cases} x^2 + (1 - x)^2 + ax + b(1 - x) + c = 0 \rightarrow 2x^2 + (a - b - 2)x + 1 + b + c = 0 \\ .... \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo **due terne di soluzioni** (a, b, c)cioè due circonferenze che soddisfano le condizioni richieste.

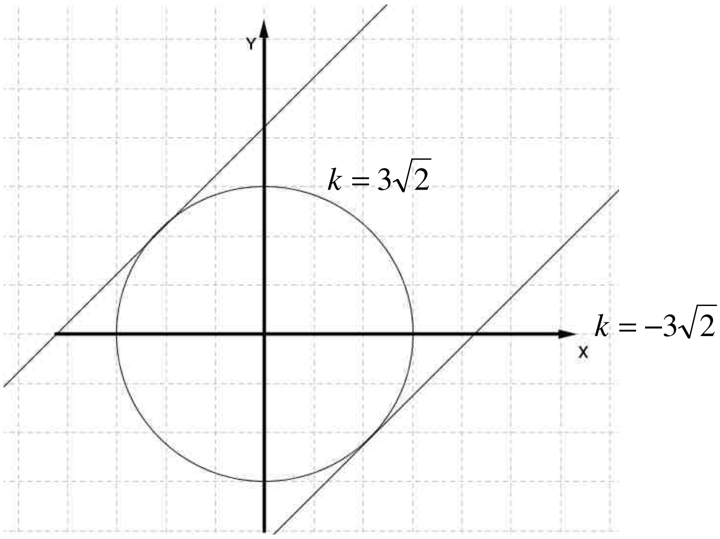
In particolare in questo caso abbiamo

$(2;-8;15) \rightarrow C_1(-1;4)$ e $(2;-24;95) \rightarrow C_2(-1;12)$.

Circonferenza e fascio di rette

Esempio 1

a) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}:\ y = x + k$ intersecano la circonferenza $\mathcal{C}:\ x^2 + y^2 = 9$.



Si tratta di un fascio di rette parallele aventi $m = 1$.

Per determinare le rette del fascio che intersecano la circonferenza basterà determinare le rette del fascio che sono tangenti alla circonferenza , cioè le rette del fascio che hanno distanza dal centro (0;0) uguale al raggio della circonferenza cioè uguale a 3.

Per prima cosa dobbiamo scrivere l'equazione delle rette del fascio in forma implicita:

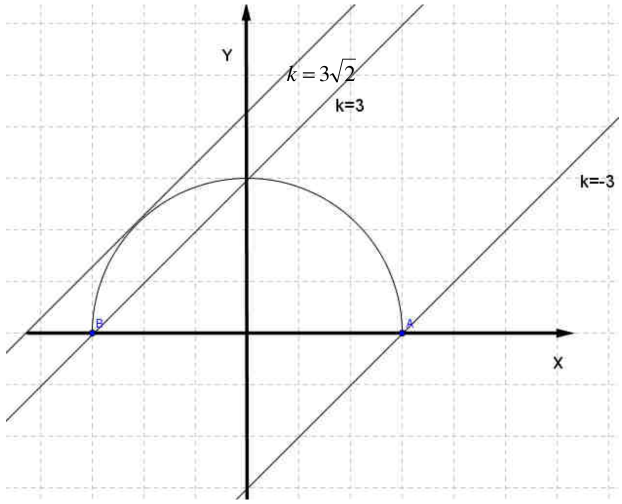
$$\mathcal{F}:\ x - y + k = 0$$

Calcoliamo la distanza tra la generica retta del fascio e il centro della circonferenza $C(0;0)$ e poniamo questa distanza uguale a 3:

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow k = \pm 3\sqrt{2}$$

Quindi quando $-3\sqrt{2} \le k \le 3\sqrt{2}$ le rette del fascio intersecano $\mathcal{C}$.

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio precedente intersecano la semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$ situata nel 1° e 2° quadrante ($y \geq 0$) e **in quanti punti**.



In questo caso occorre determinare il valore di k delle rette del fascio passanti per A e B.

$k_A \quad A(0;3) \qquad 0 = 3 + k \rightarrow k = -3$

$k_B \quad B(-3;0) \qquad 0 = -3 + k \rightarrow k = 3$

Quindi:

per $-3 \leq k < 3$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 1 solo punto;

per $3 \leq k \leq 3\sqrt{2}$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 2 punti (il punto di tangenza viene contato due volte).

Nota: il problema poteva essere proposto anche come soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1 soluzione per $-3 \leq k < 3$

2 soluzioni per $3 \leq k \leq 3\sqrt{2}$

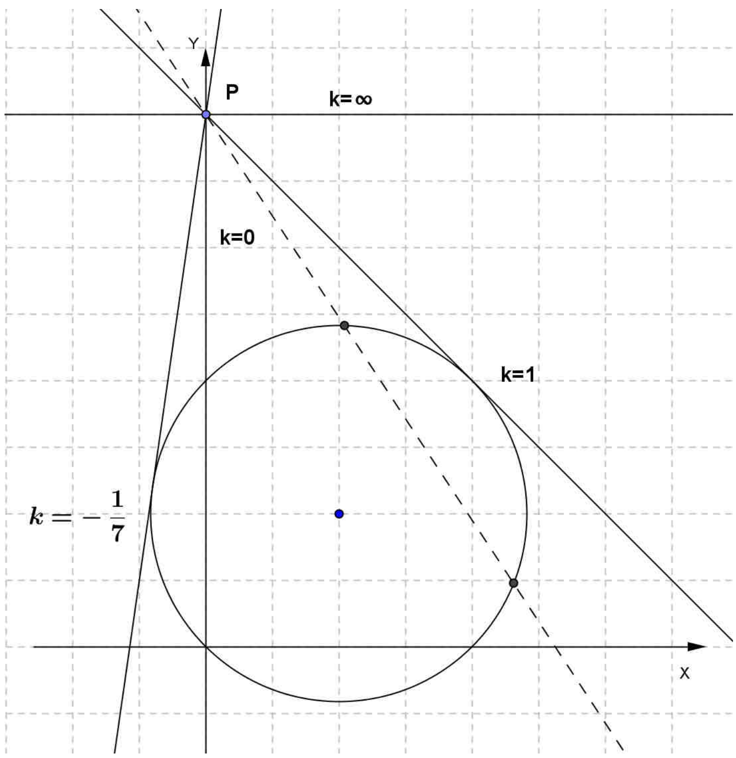
Esempio 2

a) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}: x+ky-8k=0$ intersecano la circonferenza $\mathcal{C}: x^2+y^2-4x-4y=0$.

Studiando il fascio si trova che si tratta di un fascio di rette passanti per P(0;8) e che le generatrici sono le rette : $\begin{array}{l} k=0 \rightarrow x=0 \\ k=\infty \rightarrow y=8 \end{array}$

Determiniamo i valori di k corrispondenti alle rette tangenti: applicando la formula della distanza dal centro C(2;2) della circonferenza e ponendola uguale a $2\sqrt{2}$ (raggio) otteniamo i valori $k_1=1$ e $k_2=-\frac{1}{7}$.

Quindi quando $-\frac{1}{7} \le k \le 1$ le rette del fascio intersecano la circonferenza (in due punti).



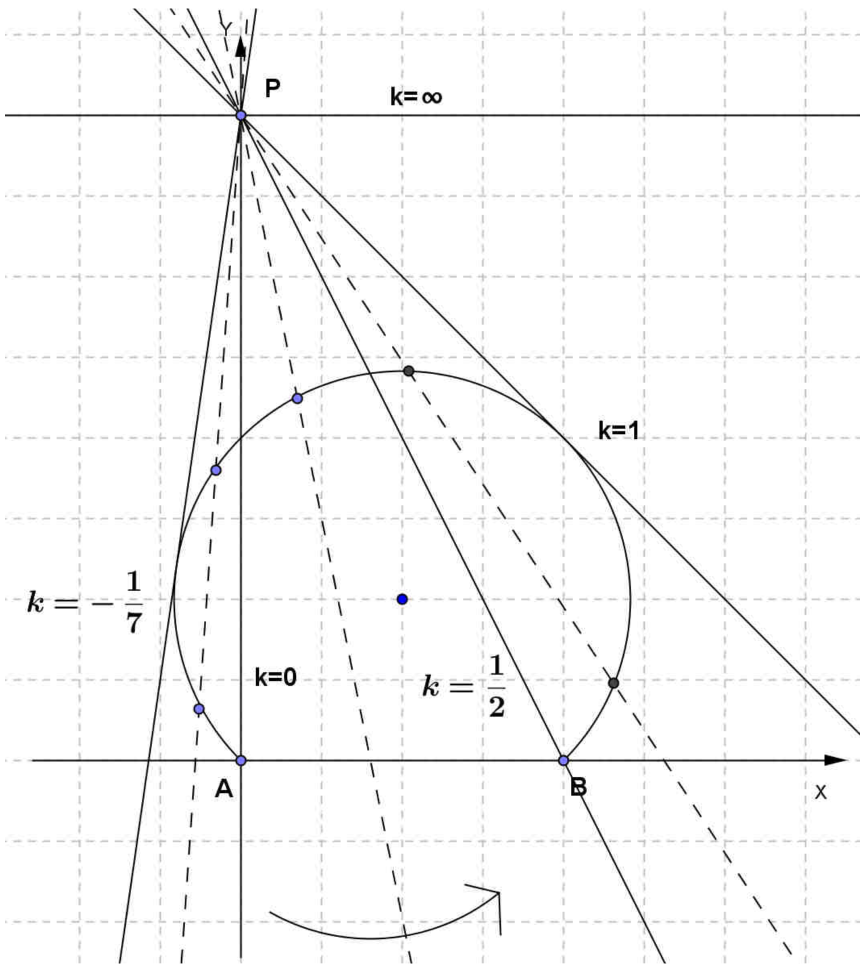
b) Determina per quali valori di k le rette del fascio precedente intersecano la semicirconferenza $\overset{\frown}{AB}$ situata nel 1° e 2° quadrante ($y \geq 0$) e in quanti punti.

Sostituendo le coordinate di A(0;0) troviamo il valore $k_A = 0$ della retta per A e sostituendo quelle di B(4;0) troviamo il valore $k_B = \frac{1}{2}$ della retta del fascio passante per B.

Quindi:

per $-\frac{1}{7} \leq k \leq 0 \cup \frac{1}{2} \leq k \leq 1$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 2 punti;

per $0 < k < \frac{1}{2}$ le rette del fascio intersecano la semicirconferenza in 1 punto.



ESERCIZI

1) Disegna le circonferenze aventi le seguenti equazioni:

a) $x^2+y^2=4$

b) $x^2+y^2-2x-2y=0$

c) $x^2+y^2-4y+3=0$

d) $3x^2+3y^2-6x=0$

e) $x^2+y^2+1=0$

f) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

2) Determina l'equazione della circonferenza sapendo che:

a) ha centro C(1;1) e passa per P(3;2); $[(x-1)^2+(y-1)^2=5]$

b) passa per (0;0) , A(4;2) B(2;2) ; $[(x-3)^2+(y+1)^2=10]$

c) passa per (0;0) A(-2;4) B(6;0) ; $[(x-2)^2+(y-4)^2=25]$

d) passa per A(1;-1) B(1;3) C(-3;3) ; $[(x+1)^2+(y-1)^2=8]$

e) passante per O(0;0) e A(4;0) e avente il centro appartenente alla retta di equazione $y=\frac{1}{2}x+1$; $[(x-2)^2+(y-2)^2=8]$

f) ha centro C(0;0) ed è tangente alla retta t: y=-x+3; $\left[x^2+y^2=\frac{9}{2}\right]$

g) è tangente alla retta t: $y=-x$ nel punto T(0;0) e passa per A(0;2) ;
$[x^2+y^2-2x-2y=0]$

h) è tangente alla retta t: $y=2x-1$ nel punto T(1;1) e passa per A(1;-1)
$[(x-3)^2+y^2=5]$

3) Determina la tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ nel suo punto T(0;2).

[$y = -2x + 2$]

4) Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 25$ determina la retta tangente nel suo punto T(3;4) e le tangenti uscenti dal punto $P(0;-\frac{25}{4})$.

[$t: 3x + 4y - 25 = 0 \quad t_{1,2}: y = \pm\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$]

5) Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ determina le rette tangenti ad essa uscenti da (0;0).

[$y = x \;\; ; \;\; y = -\frac{1}{7}x$]

6) Determina la retta tangente in (0;0) alla circonferenza di equazione $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

[$y = -\frac{3}{4}x$]

7) Data $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 4$ determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}: y = x + k$ intersecano la circonferenza.

[$-2\sqrt{2} \le k \le 2\sqrt{2}$]

8) Data $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 9$ determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $x + y - 5 + ky = 0$ intersecano la circonferenza.

[$k \le -\frac{7}{3} \cup k \ge \frac{1}{3}$]

9) Data la circonferenza di equazione $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ determina per quali valori di k le rette del fascio:
a) $\mathcal{F}_1: y = -x + k$
b) $\mathcal{F}_2: x - 8 + k(2x - y - 4) = 0$
intersecano la circonferenza.

$\left[5 - 5\sqrt{2} \le k \le 5 + 5\sqrt{2}\,;\; k \le -\frac{4}{5} \cup k \ge 0\right]$

10) Data la circonferenza C: $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$, determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $y = x + k$ intersecano:

a) l'intera circonferenza ; [$-4 \le k \le 4$]

b) la parte di circonferenza che si trova nel 3° e 4° quadrante ($y \le 0$) (specificando il numero delle intersezioni).

[1 intersezione per $-4 < k \le 0$ e 2 intersezioni coincidenti per $k = -4$]

11) Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, determina per quali valori di k le rette del fascio

$$\mathcal{F}: \; y - 4 + k(x + y - 6) = 0$$

intersecano la circonferenza.

$[-2 \le k \le -\frac{2}{3}]$

12) Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ 2x + y + k = 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

[1 soluzione per $-8 < k \le -4$; 2 soluzioni per $-4\sqrt{5} \le k \le -8$]

13)

a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ tangente in $T(1;2)$ alla retta $t: y = 2x$ e passante per il punto $A(7;4)$. Disegnala ed indica con C il suo centro.

b) Determina le tangenti alla circonferenza uscenti dal punto P(15;0) e indicati con T_1 e T_2 i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero PT_1CT_2.

c) Nel fascio di rette di equazione $y = 2x + k$ determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano $\mathcal{C}$.

[$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0$; $t_{1,2}: y = \pm\frac{1}{2}(x - 15)$; area (PT_1CT_2) = 40 ; $-20 \le k \le 0$]

14) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ tangente in (0;0) alla retta $t: y = \frac{3}{4}x$ e avente il centro C appartenente alla retta $y = -x - 1$.

b) Determina i punti P appartenenti a t tali che $area(\overset{\Delta}{OPC}) = 25$.

[$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ $P_1(8;6)$ $P_2(-8;-6)$]

15) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta e della circonferenza inscritta al triangolo di vertici O(0;0) , A(4;0) e B(0;3).

[$x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$]

16) Determina l'equazione della circonferenza tangente alla retta t: y=-1 e passante per i punti A (1;1) e B (1;7).

$$[x^2+y^2-10x-8y+16=0 \quad ; \quad x^2+y^2+6x-8y=0]$$

17) Determina l'equazione della circonferenza tangente alla retta t: $y=x-1$ e passante per i punti A (-2;1) e B (0;3).

$$[2x^2+2y^2+x-5y-3=0]$$

18) Determina l'equazione della circonferenza tangente all'asse x e passante per i punti A (1;2) e B (3;4).

$$[x^2+y^2+10x-20y+25=0 \quad ; \quad x^2+y^2-6x-4y+9=0]$$

19) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A(0;2) B(2;0) e O(0;0).

b)Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: y=x+k intersecano $\mathcal{C}$.

c)Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$ intersecano la parte di $\mathcal{C}$ con y ≥ 0. Specificare in quanti punti.

[$\mathcal{C}$: $x^2+y^2-2x-2y=0$; $-2\le k\le 2$; 1 intersezione per $-2<k<0$, 2 intersezioni per $0\le k\le 2 \cup k=-2$]

20) a) Determina l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A(-1; 3) e B(1; -1) e il cui centro appartiene alla retta di equazione $2x-y+1=0$.

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $x-y-3+k(x-3)=0$ intersecano la circonferenza e per quali valori (e in quanti punti) intersecano la $\mathcal{C}$ con $y\ge 0$.

[$\mathcal{C}$: $x^2+y^2-2y-4=0$; $-3\le k\le -\frac{1}{2}$; 2 intersezioni per $-3\le k\le -1$]

21) Determina l'equazione della circonferenza tangente agli assi coordinati e passante per $A(1;-2)$. [$x^2+y^2-10x+10y+25=0$; $x^2+y^2-2x+2y+1=0$]

22) a) Determina l'equazione della circonferenza avente centro C(2; 1) e tangente alla retta $t: y=x+2$.

b) Determina per quali valori di k le rette del fascio $\mathcal{F}$: $y=x+k$ staccano sulla circonferenza una corda di lunghezza 2.

[$\mathcal{C}$: $2x^2+2y^2-8x-4y+1=0$; $k_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}$]

APPROFONDIMENTO

Fasci di circonferenze

Supponiamo di avere due circonferenze

$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \mathcal{C}_2 : \; x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

Se consideriamo l'equazione

$$k(x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1) + x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

cioè
$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (ka_1 + a_2)x + (kb_1 + b_2)y + kc_1 + c_2 = 0$$

è chiaro che sarà, al variare di k, con $k \neq -1$, ancora una circonferenza (reale quando $x_c^{\,2} + y_c^{\,2} - c \geq 0$).Si parla quindi di fascio di circonferenze generato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Per $k = 0$ si ottiene $\mathcal{C}_2$, mentre per $k = \infty$ si ottiene $\mathcal{C}_1$ (ragionamento analogo a quello svolto per i fasci di rette). Naturalmente a seconda di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si otterranno vari tipi di fasci.

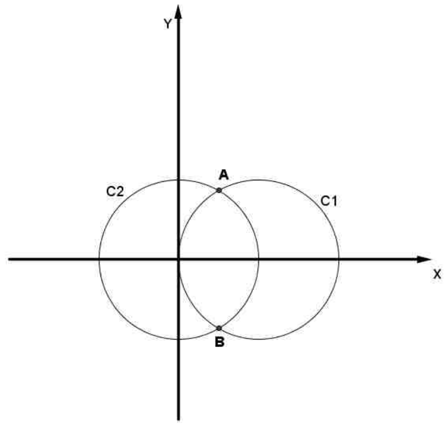
Esempio 1: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ secanti

Consideriamo per esempio le circonferenze in figura e studiamo il fascio da esse generato.

$\mathcal{C}_1 \;:\; x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad C_1(1;0) \quad r_1 = 1$

$\mathcal{C}_2 :\; x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad C_2(0;0) \quad r_2 = 1$

$\mathcal{F} : \qquad k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (k \neq -1)$



Qualunque sia il valore assegnato a k $(k \neq -1)$, si otterrà una circonferenza anch'essa passante per A e B: infatti sia sostituendo le coordinate di A che di B si otterrà $k \cdot 0 + 0 = 0$.

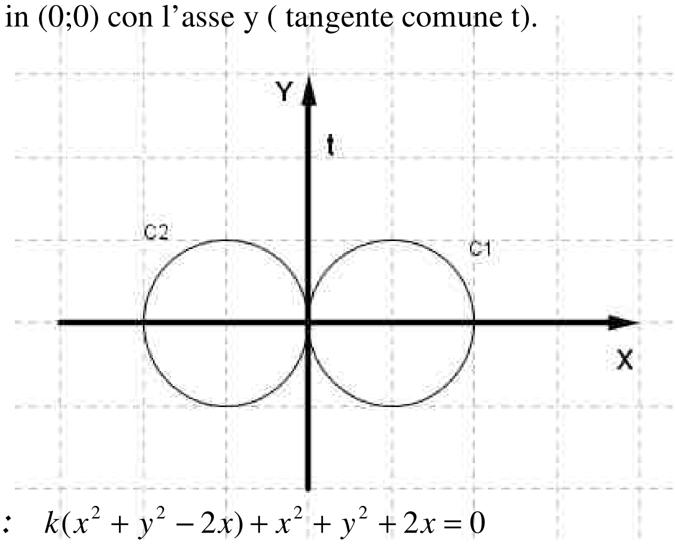
(*) Osserviamo che, per qualunque valore di k, con k ≠ -1, si ottengono circonferenze reali. Infatti:

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2kx - 1 = 0 \qquad \to x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}x - \frac{1}{k+1} = 0$$

$$C(\frac{k}{k+1};0) \quad r = \sqrt{\frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1}} = \sqrt{\frac{k^2 + k + 1}{(k+1)^2}} \qquad \frac{k^2 + k + 1}{(k+1)^2} > 0 \;\; \forall k \neq -1$$

Esempio 2: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tangenti

Consideriamo le circonferenze in figura, tangenti in (0;0) con l'asse y (tangente comune t).



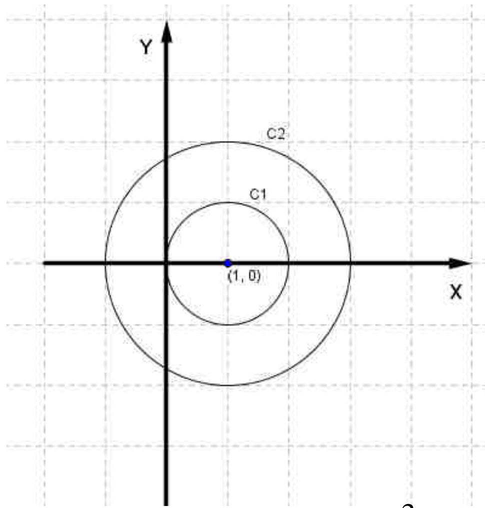
$\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ C_1 (1;0) r_1=1

$\mathcal{C}_2$: $x^2 + y^2 + 2x = 0$ C_1(-1;0) r_2=1

Consideriamo il fascio generato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$: $\mathcal{F}$: $k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 + 2x = 0$

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2x(1-k) = 0 \qquad\qquad r = \sqrt{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2}$$

Si osserva che intersecando una qualunque circonferenza del fascio con la retta t : x=0 si ottiene solo, come soluzione (0;0) e quindi tutte le circonferenze del fascio sono tangenti in (0;0) all'asse y. Il fascio generato da due circonferenze tangenti in T ad una retta t è costituito da circonferenze tangenti in T a t (che si ottiene per $k = -1$).



Esempio 3 : $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ concentriche

Consideriamo le circonferenze in figura:

$\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$\mathcal{C}_2$: $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ $C_2(1;0)$ $r_2 = 2$

$\mathcal{F}$: $k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

Sviluppando : $(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2x(k+1) - 3 = 0 \quad \rightarrow (k \neq -1): \quad x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{k+1} = 0$

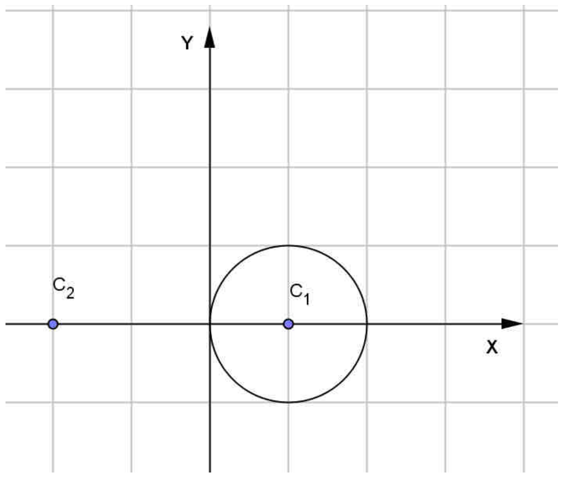
Osserviamo che C(1 ; 0) cioè che tutte le circonferenze hanno lo stesso centro di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e

Quindi avremo circonferenze $r = \sqrt{1 + \frac{3}{k+1}} = \sqrt{\frac{k+4}{k+1}}$ reali solo se

$$\frac{k+4}{k+1} \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -4 \cup k > -1 \ (k \neq -1)$$

Esempio 4: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ non aventi punti in comune e non concentriche

Consideriamo le circonferenze in figura:



$\mathcal{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ $\quad C_1(1;0) \qquad r_1 = 1$

$\mathcal{C}_2$: $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$ $\quad C_2(-2;0) \quad r_2 = 0$

Consideriamo

$\mathcal{F}$: $\quad k(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

Sviluppando : $\quad (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2x(2-k) + 4 = 0$

Dividendo per $k+1 \quad (k \neq -1)$: $\quad x^2 + y^2 + \dfrac{2(2-k)}{k+1}x + \dfrac{4}{k+1} = 0$

$$C\left(\frac{k-2}{k+1};0\right) \qquad\qquad r = \sqrt{\frac{(k-2)^2}{(k+1)^2} - \frac{4}{k+1}}$$

Quindi ho circonferenze reali solo se $\dfrac{(k-2)^2}{(k+1)^2} - \dfrac{4}{k+1} \geq 0$ cioè, sviluppando i calcoli, quando

$$k \leq 0 \cup k \geq 8 \text{ con } k \neq -1$$

Nota: abbiamo considerato i fasci di circonferenze ottenuti “combinando” le equazioni di due circonferenze. **Ma cosa si ottiene “combinando” l’equazione di una circonferenza con l’equazione di una retta**?

$$\mathcal{F}: \quad k(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$kx^2 + ky^2 + (ka_1 + {}_2)x + (kb_1 + b_2)y + kc_1 + c_2 = 0$$

Se $k \neq 0$ (e verifica la condizione di realtà per il raggio), **ottengo quindi un fascio di circonferenze** ed è semplice dimostrare che:

- se r e $\mathcal{C}$ sono secanti si ottiene un fascio di circonferenze secanti (passanti per i punti di intersezione tra r e $\mathcal{C}$);

- se r e $\mathcal{C}$ sono tangenti si ottiene un fascio di circonferenze tangenti nel punto di tangenza tra r e $\mathcal{C}$ (r è la tangente comune);

- se r e $\mathcal{C}$ non hanno punti in comune si ottiene un fascio di circonferenze che non intersecano né r né $\mathcal{C}$ e il cui centro appartiene alla retta passante per il centro C di $\mathcal{C}$ e perpendicolare alla retta r.

Problemi svolti

1) Come si può scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze passanti per A(0; 4) e B(0; 0)?

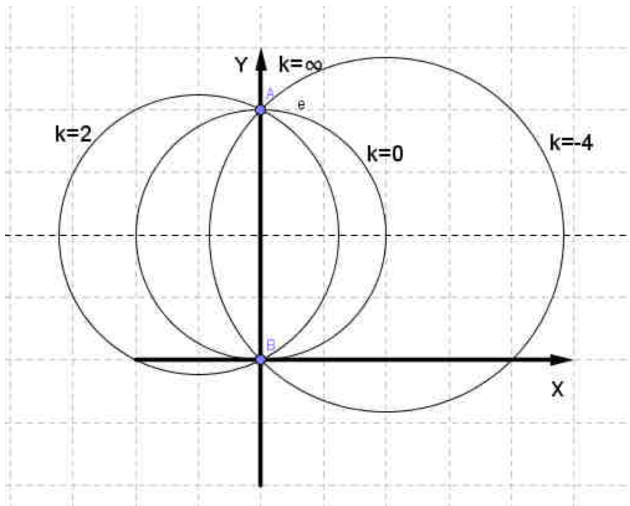
Possiamo combinare una circonferenza per A e B , per esempio quella di diametro AB:

$$\mathscr{C}: \ x^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

con la retta per A e B che in questo caso è l'asse y cioè la retta di equazione $x = 0$.

In conclusione una possibile equazione del fascio risulta

$$\mathcal{F}: \ x^2 + y^2 - 4y + kx = 0$$



Osservazioni

Il centro della circonferenza del fascio è $C(-\frac{k}{2};2)$ cioè appartiene all'asse di AB ($y = 2$).

Nota: potevamo risolvere questo problema anche considerando l'equazione generica di una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e imponendo il passaggio per A e B

$$\begin{cases} 16 + 4b + c = 0 \rightarrow b = -4 \\ c = 0 \end{cases}$$

L'equazione del fascio sarà: $F_C : x^2 + y^2 + ax - 4y = 0$ dove il parametro è a ed è praticamente uguale a quella che avevamo ricavato precedentemente.

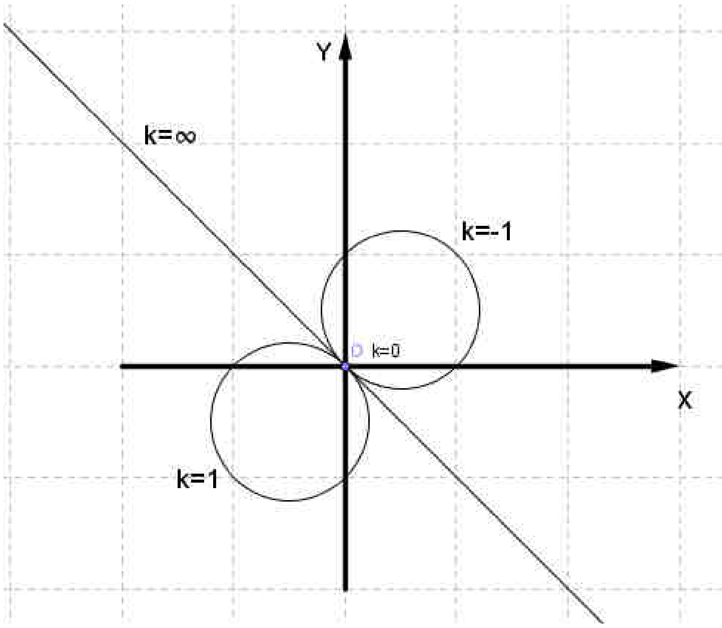
2) Come si può scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze tangenti in T(0; 0) alla retta $t: y = -x$?

Possiamo combinare l'equazione di una circonferenza tangente in T alla retta t con l'equazione di t.

Per semplificare i calcoli possiamo scegliere come circonferenza tangente la circonferenza (degenere) di raggio nullo e centro T(0; 0) $\rightarrow x^2 + y^2 = 0$

Abbiamo quindi

$$x^2 + y^2 + k(x + y) = 0$$



3) Come si può scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze aventi centro C(1;2)?

In questo caso possiamo semplicemente usare l'equazione

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

dove r sarà il parametro.
oppure considerare l'equazione generale della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e porre

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 & \rightarrow a = -2 \\ -\frac{b}{2} = 2 & \rightarrow b = -4 \end{cases}$$

da cui abbiamo che l'equazione del fascio risulta

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - c = 0$$

Calcoliamo il raggio

$$r = \sqrt{1+4-c} = \sqrt{5-c}$$

Avremo circonferenze reali quando

$$5 - c \geq 0 \quad \rightarrow \quad c \leq 5$$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

1) a) Determina l'equazione della circonferenza **C** avente centro C(3,-1) e tangente alla retta t: 3x+y+2 =0. Disegnala e determina le coordinate del punto T di tangenza.

[$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$; $T(0;-2)$]

b) Nel fascio di rette **F**: y = $-\frac{1}{3}x + k$ determina per quali valori di k le rette intersecano la circonferenza **C.**

[$-\frac{10}{3} \leq k \leq \frac{10}{3}$ **]**

2) a) Determina l'equazione della circonferenza **C** tangente in T(0,1) alla retta t : $y = -x + 1$ e passante per $(-4;1)$. Disegnala ed indica con C il suo centro.

[$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0$]

b) Determina le equazioni delle tangenti alla circonferenza uscenti dal punto P(-2,-5) e, detti T_1 e T_2 i punti di tangenza, determina l'area del quadrilatero TT_1PT_2.

[$y = x - 3$; $y = -x - 7$; $\mathrm{A}(TT_1PT_2) = 12$]

3) a) Determina l'equazione della circonferenza **C** passante per i punti A (6, -5) B(-1, 2) C(6,1). Disegnala ed indica con Ω il suo centro.

[$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$]

b) Dopo aver studiato il fascio di rette di equazione

F : 2x – y +9 + k (y + 1)= 0

determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano la circonferenza.

[$k \leq -\frac{5}{3} \cup k \geq \frac{5}{2}$]

4) Dato il fascio di circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + k(x + y - 3) = 0$$

a) studialo e disegna le generatrici;

[fascio circonferenze secanti in A(1;2) e B(2;1) $\forall k \in \Re$]

b) determina il valore di k per il quale si ottiene la circonferenza di centro (2;2) e disegnala;

[$k = -2$]

c) determina per quali valori di k si ottengono circonferenze di raggio $\sqrt{5}$ e disegnale.

[$k_1 = -4$ $k_2 = 2$]