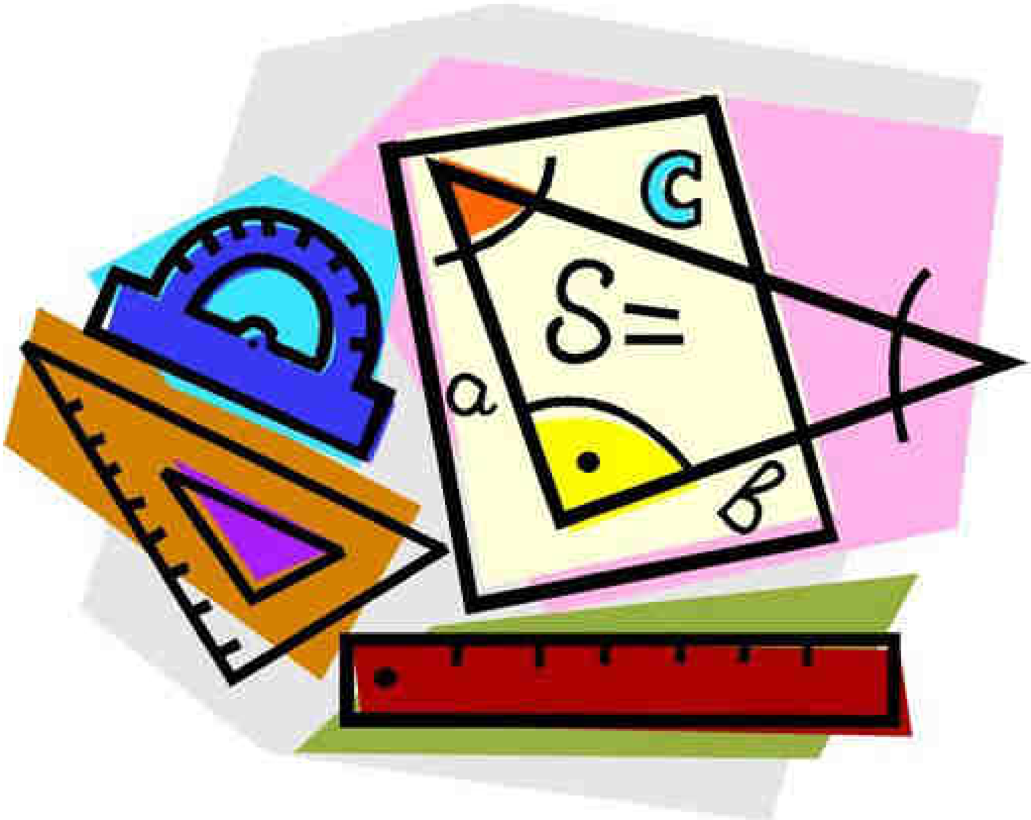
Ripasso di algebra e geometria del biennio



I) Risolvi le seguenti equazioni

1) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad [\, x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \,]$

2) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $\quad [\, x_1 = -2 \,;\; x_2 = -3 \,]$

3) $-x^2 + 4x - 3 = 0$ $\quad [\, x_1 = 1 \,;\; x_2 = 3 \,]$

4) $x^2 + x + 1 = 0$ $\quad$ [nessuna soluzione reale]

5) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ $\quad [\, x_{1,2} = \pm 2 \,;\; x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \,]$

6) $|2x - 3| - |x + 1| = 2x$ $\quad [\, x = \frac{2}{5} \,]$

7) $|x + 1| = 4$ $\quad [\, x_1 = 3 \,;\; x_2 = -5 \,]$

8) $\sqrt{4 - 3x} + 2x = -4$ $\quad [x = -4]$

9) $\sqrt{5 - 2x} - \sqrt{x + 1} = 0$ $\quad [x = \frac{4}{3}]$

10) $\sqrt[3]{4x^2 + 8x^3 - 2x} = 2x - 1$ $\quad [x = \frac{1}{4}]$

11) $\sqrt[3]{x^3 - 4x + 8} - x = 0$ $\quad [x = 2]$

12) $\sqrt[4]{2x^2 - 1} = x$ $\quad [x = 1]$

II) Risolvi le seguenti disequazioni

1) $x-3x^2>0$ $\quad[0<x<\frac{1}{3}]$

2) $4x^2-4x+1>0$ $\quad[\Re-\left\{\frac{1}{2}\right\}]$

3) $x^2-9\geq 0$ $\quad[x\leq -3\cup x\geq 3]$

4) $x^2-10x+32<0$ $\quad$[nessuna sol. reale]

5) $-x^2+4x-3>0$ $\quad[1<x<3]$

6) $x^2+4<0$ $\quad$[nessuna sol. reale]

7) $\dfrac{x-x^2}{x^2-5x+6}>0$ $\quad[0<x<1\cup 2<x<3]$

8) $\dfrac{1-x^2}{4+x^2}<0$ $\quad[x<-1\cup x>1]$

9) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-25}>0$ $\quad[x<-5\cup x>5]$

10) $|4x+1|<2x+3$ $\quad[-\frac{2}{3}<x<1]$

11) $\dfrac{x-3}{\sqrt{2x-x^2}-x}>0$ $\quad[1<x<2]$

12) $\dfrac{3x^2-7x}{\sqrt{x^2-4}}>0$ $\quad[x<-2\cup x>\frac{7}{3}]$

13) $\sqrt{x^2-5x+6}<\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ $\quad[\frac{5}{3}<x\leq 2\cup 3\leq x<\frac{19}{5}]$

14) $\sqrt{x^2+4}+x^2>(x+1)\cdot(x+2)$ $\quad[x<0]$

III) Risolvi i seguenti sistemi

1) $\begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ 3x - 8y = -1 \end{cases}$ [(-3; -1)]

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ [(1; 2) (2; 1)]

3) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$ [(-1; 1 ; 2)]

4) $\begin{cases} x(x - 2y) = 0 \\ 4x + y = 18 \end{cases}$ [(0; 18) (4; 2)]

5) $\begin{cases} 3x^2 - 4x < 7 \\ \dfrac{4x - 6}{3} < 1 \end{cases}$ $[-1 < x < \frac{9}{4}]$

6) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases}$ $[2 < x < 3]$

7) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x} > 0 \\ \dfrac{3}{1 - x} > 0 \end{cases}$ $[0 < x < 1]$

8) $\begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^4 - x^2 - 2} \le 0 \\ (x + 1)(x - 2) \ge 0 \end{cases}$ $[-\sqrt{2} < x \le -1]$

IV) Risolvi i seguenti problemi

1) Dato un triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$ di lato l, determina la lunghezza del segmento $\overline{MN}$ parallelo al lato AB tale che $area(\overset{\Delta}{MNC}) = \frac{1}{9} area(\overset{\Delta}{ABC})$.

[$\overline{MN} = \frac{l}{3}$]

2) Dato un triangolo equilatero $\overset{\Delta}{ABC}$ di lato l, determina la lunghezza del segmento $\overline{MN}$ parallelo al lato AB tale che $area(MNBA) = area(\overset{\Delta}{MNC})$.

[$\overline{MN} = \frac{l}{\sqrt{2}}$]

3) Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di cateti $\overline{AC} = 3a$ e $\overline{CB} = 4a$, determina sul cateto AC un punto P tale che, detto H il piede della perpendicolare tracciata da P ad AB, si abbia $area(\overset{\Delta}{APH}) = \frac{1}{4} area(\overset{\Delta}{ABC})$.

[$\overline{AP} = \frac{5}{2}a$]

4) Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, determina su essa un punto P tale che, condotta la corda PQ parallela ad AB, sia abbia $2p(ABQP) = 5r$.

[$\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = r$]

5) Dato il triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ con base $\overline{AB} = 10a$ e lati obliqui $\overline{AC} = \overline{CB} = 13a$, determina sul lato AC un punto P tale che, tracciata per P la parallela alla base AB e detto Q il suo punto di intersezione con BC, sia abbia $area(ABQP) = \frac{1}{2} area(\overset{\Delta}{ABC})$.

[$\overline{PQ} = 5\sqrt{2}a$]

6) Considera un rombo ABCD avente perimetro $2p = 20a$ e area $A = 24a^2$. Determina le diagonali del rombo e il raggio r della circonferenza inscritta.

[$6a$; $8a$; $r = \frac{12}{5}a$]

7) Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, determina un punto P sul prolungamento del diametro dalla parte di B tale che, condotta da P la tangente alla semicirconferenza e detto T il punto di tangenza, si abbia $area(\overset{\Delta}{OPT}) = r^2$ dove O è il centro della semicirconferenza.

[$\overline{OP} = \sqrt{5}r$]

8) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, determina sul diametro AB un punto P tale che, tracciata per P la corda CD perpendicolare al diametro AB, si abbia $area(ACBD) = \sqrt{3}r^2$.

[posto $\overline{AP} = x$ si ha $x_1 = \frac{r}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}r$]

9) Dato un triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con cateti $\overline{AC} = 3a$ e $\overline{AB} = 4a$, determina sul cateto AC un punto P tale che, tracciato il segmento PQ parallelo ad AB (con Q appartenente all'ipotenusa) e il segmento QR perpendicolare ad AB (R su AB) si abbia $area(PQRA) = 3a^2$.

[$\overline{CP} = \frac{3}{2}a$]

10) Considera il triangolo equilatero ABC inscritto in una circonferenza di diametro $2r$. Determina un punto P sul lato AB tale che $area(\overset{\Delta}{APC}) = \frac{1}{2}area(\overset{\Delta}{PBC})$.

[$\overline{AP} = \frac{1}{3}\sqrt{3}r$]

11) Considera un trapezio rettangolo ABCD avente altezza $\overline{AD} = 4a$ e base minore $\overline{CD} = 3a$. Sapendo che la diagonale minore AC risulta perpendicolare al lato obliquo BC, determina sul lato obliquo un punto P tale che, tracciato il segmento PQ parallelo ad AC (Q su AB) si abbia $area(\overset{\Delta}{PQB}) = area(AQPC)$.

[$\overline{PB} = \frac{10}{3}\sqrt{2}a$]

ESERCITAZIONE

Risolvi le seguenti equazioni, disequazioni e sistemi di equazioni:

1) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

2) $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$

3) $\sqrt{(x-1)^2 + 2 - x} + 2x = 1$

4) $|2x-1| - |x+3| = x - 2$

5) $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{6 + 5x - x^2} < 0$

6) $|x+3| > |2x-5| + x$

7) $4 - x > \sqrt{6x - x^2 + 16}$

8) $\sqrt{4x^2 + 3x - 1} > 2x - 3$

9) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 36 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + 2y = z \\ 2x - y + z = 1 \\ \dfrac{1}{2}x + 3y = 2z \end{cases}$

Problema 1

Dato un triangolo rettangolo ABC avente cateti $\overline{AB} = 4a$ e $\overline{AC} = 3a$, determina su AB un punto P tale che, detta Q la proiezione ortogonale di P su BC, si abbia $area(PBQ) = \dfrac{1}{3} area(APQC)$.

Problema 2

Un triangolo isoscele ABC di base AB è inscritto in una circonferenza di raggio r. Sapendo che la base AB è uguale all'altezza CH relativa alla base, determina la lunghezza della base AB e dei lati obliqui.