Complementi di algebra

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

Equazioni con valori assoluti

Esempi

1) $|x-1|=2$

È chiaro che ci sono due casi:

$$x-1=2 \Rightarrow x=3 \text{ oppure } x-1=-2 \Rightarrow x=-1$$

2) $|x-1|=-2$?

In questo caso non c'è nessuna soluzione poiché il valore assoluto è sempre positivo o nullo e non può essere uguale a -2.

3) $|x-1|=2x+3$

Ci sono due casi:

- se $x-1 \geq 0 \Rightarrow x-1=2x+3$
- se $x-1<0 \Rightarrow -(x-1)=2x+3$

Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1=2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<0 \\ -(x-1)=2x+3 \Rightarrow -x+1=2x+3 \Rightarrow 3x=-2 \end{cases}$$

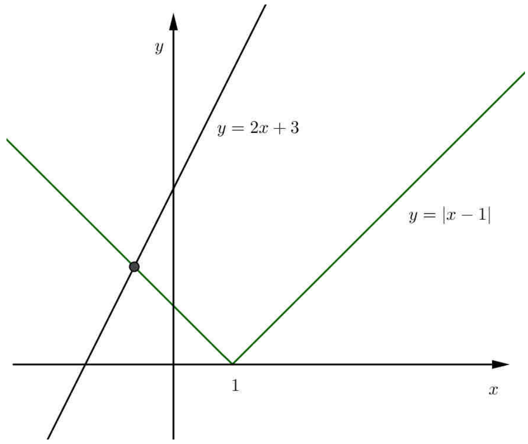
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x=-4 \end{cases} \cup \begin{cases} x<1 \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi poiché $x=-4$ non è maggiore o uguale a 1 la soluzione non è accettabile e abbiamo solo $x=-\frac{2}{3}$ come soluzione dell'equazione ($-\frac{2}{3}<1$).

NOTA

Possiamo anche risolvere graficamente l'equazione intersecando il grafico di $y=|x-1|$ con il grafico di $y=2x+3$.

$$y = \begin{cases} x-1 & se \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$$



Si osserva che l'unica intersezione si trova tra $y = -x+1$ e $y = 2x+3$ e che

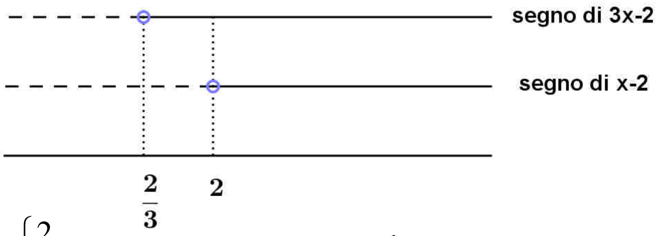
$$-x+1 = 2x+3 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

4) $|x-2| = |3x-2|$

Studiamo i segni di $x-2$ e $3x-2$:

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$



Quindi

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ -(x-2) = -(3x-2) \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{2}{3} < x \leq 2 \\ -(x-2) = 3x-2 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ x-2 = 3x-2 \end{cases}$$

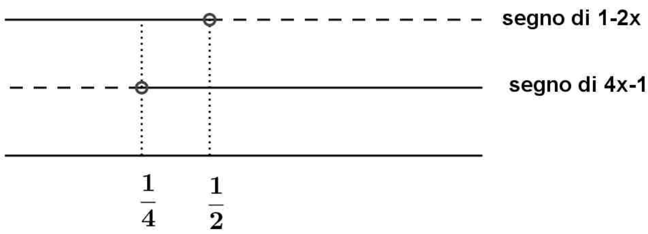
$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{2}{3} < x \leq 2 \\ x = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ x = 0 \quad non \quad accettabile \end{cases}$$

Quindi ho soluzioni: $x = 0 \quad e \quad x = 1$

5) $|4x-1| - |1-2x| = 4x-2$

$$4x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

$$1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ -(4x-1)-(1-2x) = 4x-2 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 4x-1-(1-2x) = 4x-2 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 4x-1+1-2x = 4x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{3} \quad non \quad acc. \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ x = 0 \quad non \quad acc. \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Quindi ho solo la soluzione $x = 1$.

Disequazioni con valori assoluti

Esempi

1) $|x-2|>1$

Dovrà essere $x-2<-1 \cup x-2>1$ (ricorda che $|x|>a \Leftrightarrow x<-a \cup x>a$)

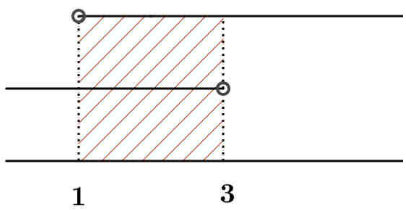
Quindi avremo
$$\begin{array}{ccc} x-2<-1 & \cup & x-2>1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x<1 & \cup & x>3 \end{array}$$

2) $|x-2|<1$

Ricordando che $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$ abbiamo: $-1<x-2<1$

Quindi

$$\begin{cases} x-2<1 \\ x-2>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>1 \end{cases}$$



Intersechiamo le soluzioni delle due disequazioni. Otteniamo alla fine: $1<x<3$

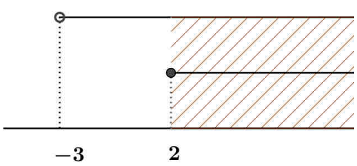
3) $|x-2|<-3$

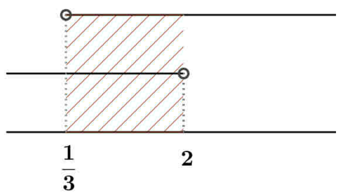
È chiaro che non ci sono soluzioni poiché il valore assoluto è sempre maggiore o uguale a zero e non può essere minore di -3.

4) $|x-2|<2x+1$

Dobbiamo distinguere due casi, a seconda del segno di $x-2$:

$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x-2<2x+1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2<0 \\ -(x-2)<2x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ x>-3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2<0 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$





$$x\ge 2 \quad \cup \quad \frac{1}{3}<x<2 \quad \rightarrow \quad x>\frac{1}{3}$$

Nota: se nella disequazione sono presenti più valori assoluti si procede in modo analogo a quanto visto nel caso delle equazioni.

ESERCIZI

1. Risolvi le seguenti equazioni contenenti valori assoluti:

a) $|3-x|=4$ [-1;7]

b) $|1+x|=2x$ [1]

c) $|3-4x|=x-1$ [impossibile]

d) $5x-|1-2x|=x+1$ [$\frac{1}{3}$]

e) $|x|=|3x+4|$ [-2;-1]

f) $|2x-5|=x-2$ [3;$\frac{7}{3}$]

g) $|3-x|-|7-2x|=4+2x$ [-8]

h) $|3-2x|+|5-x|=7-2x$ [$\frac{5}{3}$; 1]

2. Risolvi le seguenti disequazioni di primo grado contenenti valori assoluti:

a) $|5-2x|>4+x$ [$x<\frac{1}{3}\cup x>9$]

b) $|3+2x|<4x+1$ [$x>1$]

c) $|x-4|\le 1+|x|$ [$x\ge\frac{3}{2}$]

d) $|3-2x|-x<|x|$ [$x>\frac{3}{4}$]

e) $|5-x|\ge 7-x$ [$x\ge 6$]

f) $|x+2|\ge\frac{1}{2}x+3$ [$x\le-\frac{10}{3}\cup x\ge 2$]

g) $|4x+1|\le|2x+1|$ [$-\frac{1}{3}\le x\le 0$]

h) $|x+1|<|2x-4|$ [$x<1\cup x>5$]

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Come per le equazioni di 2° grado, esistono formule risolutive anche per le equazioni di 3° e 4° grado ma non le studieremo perché sono troppo complesse,mentre si può dimostrare che non ci sono formule risolutive generali per le equazioni di grado superiore al quarto.

Noi consideriamo solo alcuni tipi particolari di equazioni di grado superiore al secondo che possono essere risolte attraverso la scomposizione in fattori.

Esempi

1) $x^3 - 2x^2 = 0$

Per risolvere questa equazione basta "raccogliere" x^2:

$x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow$ (per la legge di annullamento del prodotto) $x^2 = 0 \quad \cup \quad x - 2 = 0$

Quindi $x_1 = x_2 = 0 \qquad \cup \qquad x_3 = 2$
L'equazione data ha quindi 3 soluzioni reali di cui due coincidenti.

2) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$

Possiamo effettuare un raccoglimento parziale:

$x^2(x-2) + 2(x-2) = 0$
$(x-2)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \cup \quad x^2 + 2 = 0$

Quindi avrò solo la soluzione reale $x_1 = 2$ poiché $x^2 + 2 = 0$ non ha soluzioni reali.

3) $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

Proviamo a cercare un valore di x che annulla $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$
Vediamo che $P(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ e quindi $x^3 - 2x^2 + 1$ è divisibile per $x - 1$ ed effettuando la divisione abbiamo che

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$$

Allora le soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4) $4x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

Nota: ricordiamo che se il coefficiente del termine di grado massimo del polinomio $P(x)$ (a coefficienti interi) è uguale a 1, il valore che eventualmente annulla $P(x)$ va ricercato tra i divisori del termine noto (nel nostro esempio potevamo provare solo +1 e -1) ma se invece il coefficiente del termine di grado massimo è diverso da 1 si provano le frazioni del tipo

$$\frac{\text{divisore del termine noto}}{\text{divisore del termine di grado massimo}}$$

In questo caso il valore che eventualmente annulla il polinomio va ricercato tra $\dfrac{\text{divisori di 1}}{\text{divisori di 4}}$

Proviamo a sostituire $x = -\frac{1}{2}$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{8}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -2x^2 & & +1 & x+\frac{1}{2} \\
-4x^3 & -2x^2 & & & \overline{4x^2-4x+2} \\
\hline
// & -4x^2 & & +1 & \\
 & +4x^2 & +2x & & \\
\hline
 & // & +2x & +1 & \\
 & & -2x & -1 & \\
\hline
 & & // & // &
\end{array}$$

Quindi: $$4x^3 - 2x^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(4x^2 - 4x + 2\right)$$

Poiché $4x^2 - 4x + 2 = 0$ non ha soluzioni reali ($\Delta < 0$), l'equazione ha solo la soluzione reale $x_1 = -\frac{1}{2}$

5) E*quazioni "binomie"*

- Come si risolve $x^4 = 32$?

  Le soluzioni sono $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{32} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2\sqrt[4]{2}$
  poiché sia $\sqrt[4]{32}$ che $-\sqrt[4]{32}$ elevati alla quarta danno 32

  E se avessi avuto $x^4 = -32$?
  E' chiaro che in questo caso non c'è nessuna soluzione.

Quindi se ho $\boxed{x^n = a \text{ con } \mathbf{n\ pari}}$ avrò : **se** $a \geq 0$ due soluzioni opposte $\pm\sqrt[n]{a}$
se $a < 0$ nessuna soluzione reale

- Come si risolve $x^5 = 32$?

  La soluzione è $x = \sqrt[5]{32}$ cioè $x = 2$ poiché $32 = 2^5$.

  E se avessi avuto $x^5 = -32$?

  In questo caso la soluzione è $x = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

Quindi se ho $\boxed{x^n = a \text{ con } \mathbf{n\ dispari}}$ avrò: $x = \sqrt[n]{a}$

6) E*quazioni "trinomie"*

- Considera l'equazione $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

  Se poniamo $x^2 = z$ e sostituiamo, otteniamo un'equazione di 2°grado

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 \qquad z_2 = 3$$

  Quindi
$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$
$$x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$$

- Considera l'equazione $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

  Se poniamo $x^3 = z$ abbiamo

$$z^2 - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 3 \qquad z_2 = -1$$

  Quindi
$$x^3 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{3}$$
$$x^3 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1$$

In generale se l'equazione si presenta nella forma

$$\boxed{a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0}$$
(n intero positivo, $a \neq 0$)

possiamo porre $\boxed{x^n = z}$ e risolvere l'equazione di 2° grado in z

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

risolvendo infine $x^n = z_1 \cup x^n = z_2$ (se z_1, z_2 esistono)

Nota: nel caso di $n = 2$ l'equazione viene anche chiamata "**biquadratica**".

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

1) $x^4 - 4x^2 = 0$ $[0;\ \pm 2]$

2) $x - x^5 = 0$ $[0;\ \pm 1]$

3) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ $[0;\ 3]$

4) $4x^3 + 4x^2 - x = 1$ $\left[-1;\ \pm\frac{1}{2}\right]$

5) $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$ $\left[0;\ \frac{1}{2};\ -\frac{4}{3}\right]$

6) $4x^3 + 3x^2 - 8x - 6 = 0$ $\left[\pm\sqrt{2};\ -\frac{3}{4}\right]$

7) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ $\left[\pm\sqrt{3};\ \frac{1}{3}\right]$

8) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

9) $x^3 - 7x + 6 = 0$ $[-3;\ 1;\ 2]$

10) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$ $[1;\ 3]$

11) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 1\right]$

12) $2x^3 - 5x - 6 = 0$ $[2]$

13) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$ $\left[-2;\ \frac{1}{3};\ 1\right]$

14) $\frac{1}{4}x^3 - 2 = 0$ $[2]$

15) $3x^3 + 375 = 0$ $[-5]$

16) $x^7 + 1 = 0$ $[-1]$

17) $(3x+5)^4 - 16 = 0$ $\left[-1;\ -\dfrac{7}{3}\right]$

18) $(x^4 - 1)^8 = 1$ $\left[0;\ \pm\sqrt[4]{2}\right]$

19) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ $[\pm 1;\ \pm 2]$

20) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ $[\pm 1]$

21) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$ $[-3;\ 2]$

22) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ $[-1;\ 2]$

23) $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$ $\left[\pm 1;\ \pm\sqrt{3}\right]$

24) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $[\pm 2;\ \pm 3]$

25) $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$ $[\pm 4]$

26) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ [impossibile]

27) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ $\left[\pm\dfrac{1}{2};\ \pm\sqrt{3}\right]$

28) $x^4 - 5x^2 - 24 = 0$ $\left[\pm 2\sqrt{2}\right]$

29) $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$ $\left[\pm 2\sqrt{2};\ \pm 2\right]$

30) $\dfrac{1}{x^2} - 3 = \dfrac{1+x^2}{x^2-2}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \pm 1\right]$

SISTEMI DI SECONDO GRADO
di 2 equazioni in 2 incognite

Esempio 1

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Poiché il grado di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni del sistema, si tratta di un sistema di 2° grado. Per risolverlo possiamo ricavare un'incognita dall'equazione di 1° grado e sostituire nell'altra equazione.

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ (1-y)^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - 2y + y^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 2y^2 - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad y(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Abbiamo trovato quindi **due soluzioni** $(1;0)$ $(0;1)$

Esempio 2

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = \sqrt{2} \quad \rightarrow x = \sqrt{2} - y \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\sqrt{2} - y\right)^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 2 - 2\sqrt{2}y + y^2 + y^2 = 1 \\ x = \sqrt{2} - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 - 2\sqrt{2}y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{2}y - 1\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{1,2} = \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

In questo caso abbiamo solo **una soluzione** (è in realtà una soluzione "doppia", cioè sono due soluzioni coincidenti)

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ cioè } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

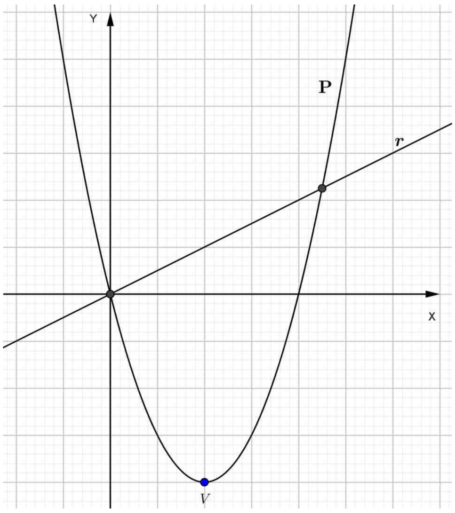
Esempio 3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 2 \quad \rightarrow x = 2 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-y)^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 4 - 4y + y^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 2y^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

Poiché $2y^2 - 4y + 3 = 0$ non ha soluzioni reali $(\Delta < 0)$ il sistema **non ha soluzione**.

Problema: consideriamo la parabola $P: y = x^2 - 4x$ e la retta $r: y = \frac{1}{2}x$.

Come si determinano i loro punti di intersezione?



$P: y = x^2 - 4x$

$r: y = \frac{1}{2}x$

Disegniamo la parabola (completiamo il quadrato ed individuiamo il vertice…)

$y = x^2 - 4x \rightarrow y + 4 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow y + 4 = (x-2)^2 \qquad V(2;-4)$

Le sue intersezioni con l'asse x sono $(0;0)$ $(4;0)$

Disegniamo la retta $r: y = \frac{1}{2}x$

Si vede facilmente che un punto di intersezione tra *P* e *r* è $(0;0)$ ma come possiamo determinare le coordinate dell'altro punto di intersezione?

Basterà risolvere il sistema formato dall'equazione di *P* e di *r*

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Si tratta di un **sistema di 2° grado** (in cui l'incognita y è già "ricavata" e basterà sostituire nell'equazione di *P*)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 9x = 0 \quad \rightarrow \quad x(2x-9) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = \frac{9}{2} \\ y_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Quindi i punti di intersezione tra *P* e *r* sono $O(0;0)$ $P\left(\frac{9}{2};\frac{9}{4}\right)$

Nota: se la retta *r* è tangente alla parabola *P* otteniamo solo una soluzione (in realtà due coincidenti) mentre se *r* è esterna alla parabola *P* non ci sono punti di intersezione e il sistema è impossibile. Anche se *r* è parallela all'asse *y* e *P* è con asse parallelo ad asse *y*, c'è un solo punto di intersezione.

ESERCIZI

I) Determina i punti di intersezione tra retta e parabola e disegnane il grafico

a) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ [nessuna intersezione]

b) $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = -2x^2 + 2x + 4 \end{cases}$ $[(1;4)]$

c) $\begin{cases} y = 5 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ $[(-2;5) \;\; ; \;\; (4;5)]$

d) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$ $[(3;0) \;\; ; \;\; (-1;-8)]$

II) Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado in 2 incognite

a) $\begin{cases} x^2 + y = -8 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ $[(1;-9)]$

b) $\begin{cases} 3x - y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $[(1;1) \;\; ; \;\; (6;-4)]$

c) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 19 - xy = (x + y)^2 \end{cases}$ $[(-1;-3) \;\; ; \;\; (1;3)]$

d) $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + xy + 4 = 0 \end{cases}$ $[(0;2) \;\; ; \;\; (2;4)]$

e) $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ $[(2;4) \;\; ; \;\; (4;2)]$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $[(0;1) \;\; ; \;\; (1;0)]$

g) $\begin{cases} xy = \dfrac{3}{4} \\ x + y = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \;\; ; \;\; \left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right]$

III) Problemi risolubili con sistemi di secondo grado

1) Un rettangolo ha l'area di 12 m^2 e il perimetro di 14 m. Determina la lunghezza dei suoi lati.

$$[3m;\ \ 4m]$$

2) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 10 m e il perimetro 24 m. Determina la lunghezza dei cateti.

$$[6m;\ \ 8m]$$

3) In un triangolo rettangolo l'area è 96 cm^2 e la somma dei cateti è 28 cm. Determina la lunghezza dei cateti.

$$[12cm;\ \ 16cm]$$

4) In un cerchio di raggio 25 cm è inscritto un rettangolo il cui perimetro è 140 cm. Calcola l'area del rettangolo.

$$[1200cm^2]$$

5) Un triangolo isoscele ha il perimetro di 16 cm e l'altezza di 4 cm. Determina la lunghezza dei lati.

$$[6cm;\ \ 5cm;\ \ 5cm]$$

6) In un rombo l'area misura 96 l^2 e la somma delle diagonali è 28 l. Determina il lato del rombo.

$$[10l]$$

7) Un rettangolo ha il perimetro che misura 28 r. Sapendo che il raggio della circonferenza circoscritta misura 5 r, determina i lati del rettangolo.

$$[6r;\ \ 8r]$$

EQUAZIONI IRRAZIONALI

Un'equazione ad una incognita si dice irrazionale quando contiene radicali nel cui radicando compare l'incognita. Vediamo degli esempi.

Equazioni irrazionali con radici quadrate

1) $\sqrt{x+7} = x+1$

Se eleviamo al quadrato entrambi i membri otteniamo:

$$x+7=(x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad x+7=x^2+2x+1 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=-3 \ \cup \ x_2=2$$

Verifichiamo se le soluzioni trovate sono soluzioni dell'equazione di partenza.

$$x=-3 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{-3+7}=2 & (primo \quad membro) \\ -3+1=-2 & (secondo \quad membro) \end{cases}$$

$$x=2 \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2+7}=3 & (primo \quad membro) \\ 2+1=3 & (secondo \quad membro) \end{cases}$$

Quindi solo $x=2$ è soluzione dell'equazione irrazionale.

Nota

Elevando al quadrato entrambi i membri non si ottiene un'equazione equivalente, cioè con le stesse soluzioni dell'equazione di partenza.
Infatti se partiamo dall'equazione $A(x)=B(x)$ ed eleviamo al quadrato entrambi i membri abbiamo

$$A^2(x)=B^2(x) \Leftrightarrow [A(x)-B(x)]\cdot[A(x)+B(x)]=0$$

e quindi le soluzioni di $A^2(x)=B^2(x)$ sono le soluzioni dell'equazione $A(x)-B(x)=0$ (che è l'equazione di partenza $A(x)=B(x)$) ma anche quelle dell'equazione $A(x)+B(x)=0$

Per decidere se le soluzioni sono accettabili dobbiamo necessariamente fare la verifica?

Il secondo membro, essendo uguale ad una radice quadrata, dovrà essere necessariamente positivo o nullo e quindi **basterà mettere la condizione**

$$x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$$

Quindi confrontando le soluzioni con questa condizione possiamo stabilire, anche senza eseguire la verifica con la sostituzione, che $x=-3$ non è accettabile.

2) $\sqrt{x+7}-1=x$

Per prima cosa dobbiamo "isolare" il radicale, e quindi abbiamo

$$\sqrt{x+7}=x+1$$

Quindi si procede come nell'esempio precedente.

3) $\sqrt{3x-2}=x$

Risolviamo il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} 3x-2=x^2 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione $3x-2=x^2$ otteniamo le soluzioni $x_1=1$ $x_2=2$ che risultano entrambe accettabili (essendo verificata la condizione $x\geq 0$).

4) $\sqrt{3x-2}=2$

La **concordanza di segno tra i due membri** in questo caso è automaticamente soddisfatta poiché la radice quadrata (positiva) ha sempre lo stesso segno di 2 (numero positivo).

In conclusione in questo caso basta elevare al quadrato entrambi i membri e risolvere:

$$3x-2=4 \Rightarrow x=2$$

5) $\sqrt{3x-2}=-2$

In questo caso non c'è concordanza di segno tra i due membri e quindi non c'è nessuna soluzione.

6) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3}$

In questo caso la concordanza del segno tra i due membri è automaticamente verificata ma **dobbiamo porre la condizione di esistenza dei due radicali.**

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$$

Elevando al quadrato entrambi i membri otteniamo

$$2x+1 = x-3 \Rightarrow x = -4$$

Quindi la soluzione non è accettabile e l'equazione non ha nessuna soluzione.

7) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+1} - 1$

Le condizioni da imporre sarebbero piuttosto complesse (esistenza dei radicali e la concordanza del segno dei due membri) e quindi in questo caso conviene semplicemente verificare con la sostituzione se le soluzioni ottenute elevando al quadrato entrambi i membri sono o meno accettabili.

$$x-2 = x+1+1-2\cdot\sqrt{x+1} \to 2\cdot\sqrt{x+1} = 4 \to \sqrt{x+1} = 2 \to x+1 = 4 \to x = 3$$

Verifichiamo se x=3 è soluzione dell'equazione data:

$$x = 3 \to \sqrt{3-2} = 1 \qquad (primo \quad membro)$$
$$x = 3 \to \sqrt{3+1} - 1 = 2 - 1 = 1 \qquad (secondo \quad membro)$$

Quindi $x = 3$ è soluzione dell'equazione data.

NOTA

Tutto quello che abbiamo detto per le radici quadrate vale per qualsiasi **radice di indice pari**, cioè per risolvere l'equazione irrazionale

$$\sqrt[2n]{A(x)} = B(x)$$

impostiamo il sistema :

$$\begin{cases} A(x) = B^{2n}(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$

Equazioni irrazionali con radici cubiche

Esempio

Consideriamo l'equazione

$$\sqrt[3]{x-x^3 =} = 1-x$$

Eleviamo entrambi i membri al cubo in modo da eliminare la radice.

Abbiamo:

$$x-x^3 = (1-x)^3 \quad \Rightarrow \quad \ldots\ldots x_1 = 1 \;\; x_2 = \frac{1}{3}$$

Dobbiamo verificare se le soluzioni sono accettabili?

No, perché **elevando al cubo entrambi i membri otteniamo un'equazione equivalente** (cioè con le stesse soluzioni).
Infatti:

$$A^3(x) = B^3(x) \Leftrightarrow A^3(x) - B^3(x) = 0 \Leftrightarrow [A(x)-B(x)] \cdot \left[A^2(x) + A(x)\cdot B(x) + B^2(x)\right] = 0$$

e per la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni sono date dalla soluzione di $A(x)-B(x)=0$ (che è l'equazione iniziale) e di $A^2(x)+A(x)\cdot B(x)+B^2(x)=0$ che ha come uniche soluzioni $A(x)=B(x)=0$.

Dobbiamo porre condizioni di esistenza del radicale?

No, perché per la radice cubica il radicando può essere sia negativo che positivo o nullo.

In conclusione quindi **per risolvere l'equazione irrazionale data basta elevare al cubo entrambi i membri dell'equazione.**

NOTA

Questo vale in generale per tutte le equazioni con radicali di indice dispari del tipo

$$\sqrt[2n+1]{A(x)} = B(x)$$

che si risolvono semplicemente elevando a *2n+1* entrambi i membri dell'equazione.

ESERCIZI

1) $x+\sqrt{22-3x}=6$ $\qquad [x=2]$

2) $\sqrt{4-x}=x-2$ $\qquad [x=3]$

3) $\sqrt{3x-2}=\dfrac{3x+2}{5}$ $\qquad [x_1=1\cup x_2=6]$

4) $2\cdot\sqrt{1-5x}=5-x$ $\qquad [x_1=-3\cup x_2=-7]$

5) $\sqrt{x^2-25}+\sqrt{x^2-10x}=0$ $\qquad$ [*impossibile*]

6) $\sqrt[3]{x^3-6x+2}=x$ $\qquad [x=\dfrac{1}{3}]$

7) $\sqrt[5]{x^5-x^2+4}=x$ $\qquad [x=\pm 2]$

8) $\sqrt[3]{x+5}=x-1$ $\qquad [x=3]$

9) $\sqrt[4]{1-x}=x-1$ $\qquad [x=1]$

10) $\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{x+7}=0$ $\qquad [x=-\dfrac{3}{2}]$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALALI

Disequazioni con radici quadrate (o di indice pari)

Esempi

1) $\sqrt{4-9x^2} > 2+x$

Osserviamo che si richiede che $2+x$ sia minore di una radice quadrata (che è positiva) e quindi potrebbe essere sia negativo che positivo.

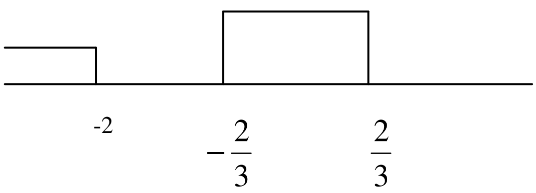
- Se $2+x<0$ la diseguaglianza sarà sicuramente verificata purché la radice quadrata $\sqrt{4-9x^2}$ esista cioè quando $4-9x^2 \geq 0$.

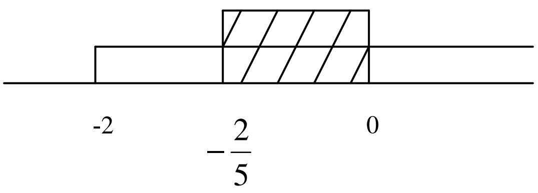
- Se $2+x \geq 0$ dobbiamo elevare al quadrato entrambi i membri (ma in questo caso non importa porre $4-9x^2 \geq 0$ poiché se deve essere $4-9x^2 > (2+x)^2$ allora $4-9x^2$ è sicuramente positivo).

Quindi per risolvere questa disequazione dobbiamo risolvere**:**

$$\begin{cases} 2+x<0 \\ 4-9x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 4-9x^2 > (2+x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-2 \\ -\dfrac{2}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -2 \\ -\dfrac{2}{5} < x < 0 \end{cases}$$





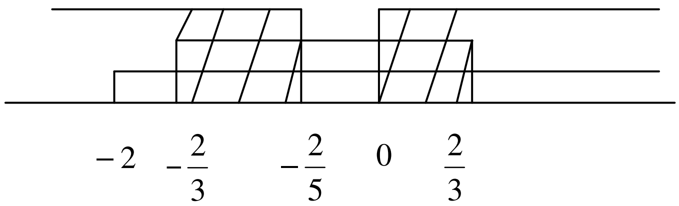
nessuna soluzione $\cup$ $-\dfrac{2}{5} < x < 0$

Quindi la soluzione della disequazione è: $-\dfrac{2}{5} < x < 0$

2) $\sqrt{4-9x^2} < 2+x$

In questo caso $2+x$ dovendo essere maggiore di una radice quadrata (positiva, quando esiste) dovrà essere positivo e quindi abbiamo:

$$\begin{cases} 2+x>0 \\ 4-9x^2 \geq 0 \\ 4-9x^2 < (2+x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x<-\frac{2}{5} \cup x>0 \end{cases}$$



Quindi la soluzione della disequazione è: $-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{2}{5} \quad \cup \quad 0 < x \leq \frac{2}{3}$

3) $\sqrt{x^2-1} > 2$

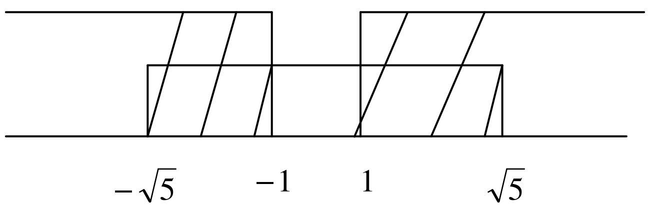
In questo caso dobbiamo confrontare la radice quadrata con un numero.
Poiché il numero è positivo dobbiamo elevare semplicemente al quadrato entrambi i membri della disequazione (è inutile porre anche $x^2-1 \geq 0$ poiché $x^2-1>4$ è una richiesta più forte):

$$x^2-1>4 \quad \Rightarrow \quad x^2-5>0 \quad \Rightarrow \quad x<-\sqrt{5} \cup x>\sqrt{5}$$

4) $\sqrt{x^2-1} < 2$

In questo caso oltre ad elevare al quadrato è necessario anche mettere la condizione di esistenza del radicando:

$$\begin{cases} x^2-1<4 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \\ x \leq -1 \cup x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{5}<x\leq -1 \ \cup \ 1 \leq x < \sqrt{5}$$



Nota: quello che abbiamo detto per le disequazioni con radici quadrate vale in generale quando abbiamo radici con indice pari.

Disequazioni con radici cubiche (o di indice dispari)

Analogamente a quanto visto per le equazioni irrazionali, anche nel caso delle disequazioni con radici cubiche (o in generale di indice dispari), quando ci siamo riportati alla forma

$$\sqrt[3]{A(x)} > B(x) \text{ oppure } \sqrt[3]{A(x)} < B(x)$$

possiamo semplicemente elevare al cubo entrambi i membri.

Esempio

Consideriamo la seguente disequazione irrazionale

$$\boxed{\sqrt[3]{x} < x}$$

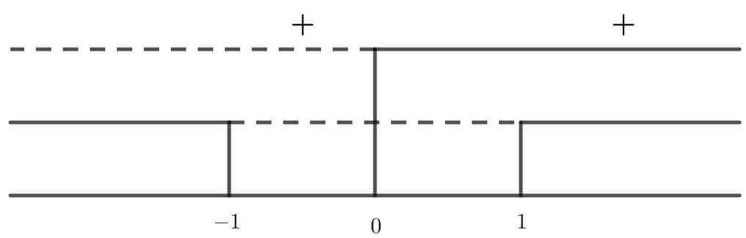
Eleviamo al cubo entrambi i membri e svolgiamo i calcoli:

$$x < x^3 \rightarrow x^3 - x > 0 \rightarrow x\left(x^2 - 1\right) > 0$$

Per risolvere l'ultima disequazione dobbiamo studiare il segno dei singoli fattori del prodotto:

$$x > 0$$
$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \cup x > 1$$

Riportiamo le soluzioni in un grafico dei segni:



Abbiamo in conclusione che le soluzioni della disequazione sono:

$$-1 < x < 0 \cup x > 1$$

ESERCIZI

1) $\sqrt{3-x+x^2} > x$ $[\, x<3 \,]$

2) $x+6 > \sqrt{4x-x^2}$ $[\, 0 \le x \le 4 \,]$

3) $\sqrt{x^2-x} > x$ $[\, x<0 \,]$

4) $x+\sqrt{x^2+4x+8} > 0$ $[\, x>-2 \,]$

5) $\sqrt{3x-2} > 4$ $[x>6]$

6) $\sqrt{1-x}+2>0$ $[x \le 1]$

7) $\sqrt{x^2-x-6} < \frac{1}{2}x+1$ $[3 \le x < \frac{14}{3}]$

8) $\sqrt{4x^2-4x-8} > x+1$ $[x<-1 \cup x>3]$

9) $\sqrt{x^2+1} < -2x-1$ $[x<-\frac{4}{3}]$

10) $\sqrt{x+9}+\sqrt{9x+x^2} > 0$ $[x \ge 0]$

11) $3x+\sqrt{6x^2-6} < 4\cdot(x-1)$ [*impossibile*]

12) $\sqrt{16-x^2}-x \ge 4$ $[-4 \le x \le 0]$

13) $2 \le x+\sqrt{x^2-1}$ $[x \ge \frac{5}{4}]$

14) $\sqrt[3]{x-1} > 2$ $[\, x>9 \,]$

15) $\sqrt[3]{x-2} < -1$ $[\, x<1 \,]$