Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado è una disequazione del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ oppure } ax^2 + bx + c < 0$$

(oppure $ax^2 + bx + c \geq 0$ o $ax^2 + bx + c \leq 0$)

I) Cominciamo considerando disequazioni in cui $\boxed{a > 0}$

Esempio 1 $\boxed{x^2 - 4x + 3 > 0}$

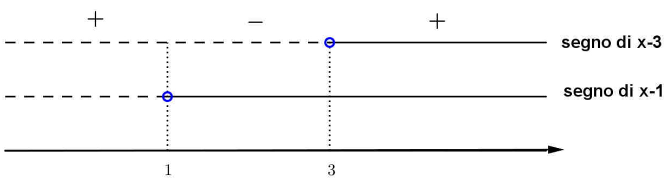
Consideriamo l'equazione di secondo grado corrispondente (detta equazione "**associata**"):

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

Quindi, ricordando che se $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni x_1 , x_2 allora $ax^2 + bx + c$ si scompone in $a(x - x_1)(x - x_2)$, abbiamo $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ e per determinare il segno di $x^2 - 4x + 3$ possiamo studiare il segno di $(x-1)$ ed il segno di $(x-3)$.

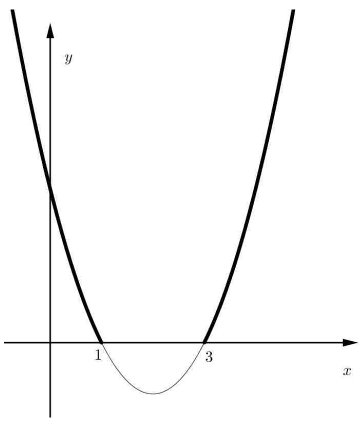
$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$
$$x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 3$$

Rappresentiamo la situazione con il cosiddetto "**grafico dei segni**" in cui indichiamo con una **linea continua il segno positivo** e con una **linea tratteggiata il segno negativo**.



Allora per la regola dei segni del prodotto avremo $x^2 - 4x + 3 > 0 \rightarrow \quad x < 1 \quad \cup \quad x > 3$
(valori esterni alle soluzioni dell'equazione associata)

Interpretazione grafica
Possiamo disegnare la parabola "associata" alla disequazione, cioè la parabola $y = x^2 - 4x + 3$: il vertice risulta $V(2;-1)$ e naturalmente le intersezioni con l'asse x si ottengono dalle soluzioni dell'equazione precedente e sono $(1;0)$, $(3;0)$. Quindi risolvere la disequazione $x^2 - 4x + 3 > 0$ equivale a individuare **la zona della parabola che si trova al di sopra dell'asse *x*** ed infatti osservando il grafico abbiamo che:



$$y > 0 \quad \rightarrow \quad x < 1 \cup x > 3$$

Esempio 2 $\boxed{x^2+2x+1>0}$

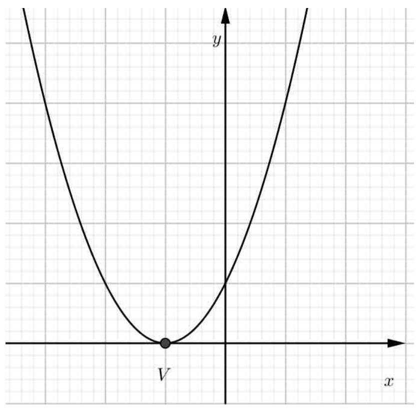
In questo caso l'equazione associata ha $\Delta = 0$ ed infatti si tratta del quadrato di un binomio:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

È chiaro quindi che la disequazione è verificata $\forall x \in R$ eccetto $x=-1$ in cui il trinomio si annulla e quindi scriveremo $\forall x \in \Re, x \neq -1$.

Graficamente osserviamo che la parabola $y=x^2+2x+1$, rivolta verso l'alto, è tangente all'asse delle *x* nel suo vertice $(-1;0)$ e quindi

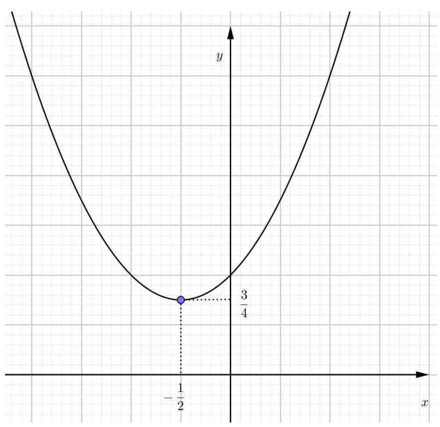
$$y>0 \quad \forall x \in \Re, x \neq -1$$



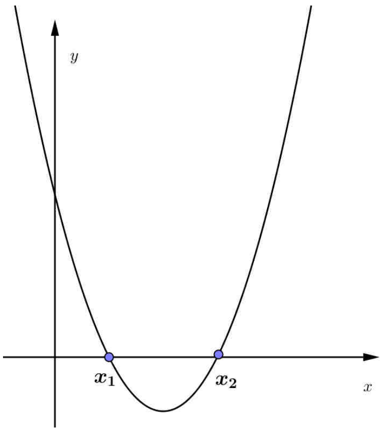
Esempio 3 $\boxed{x^2+x+1>0}$

Considerando l'equazione associata $x^2+x+1=0$: in questo caso abbiamo Δ = 1 – 4 < 0 e quindi non ci sono soluzioni reali.
Graficamente abbiamo la parabola $y=x^2+x+1$ che ha vertice $V\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ ed è rivolta verso l'alto: si ha perciò

$$y>0 \quad \forall x \in R$$

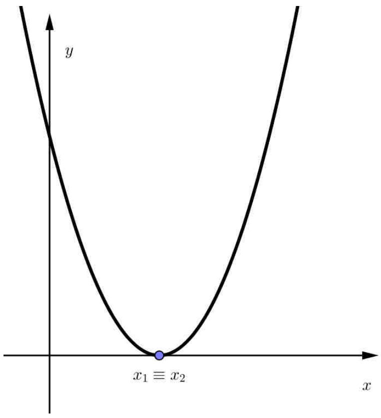


Riassumiamo le soluzioni delle disequazioni in cui $\boxed{a>0}$
Parabola rivolta verso l'alto



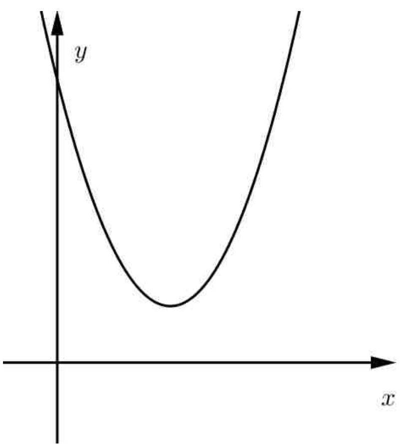
$\Delta > 0$
$ax^2+bx+c>0 \rightarrow x<x_1 \cup x>x_2$ (**valori esterni**)
$ax^2+bx+c<0 \rightarrow x_1<x<x_2$ (**valori interni**)

$(ax^2+bx+c\geq 0 \rightarrow x\leq x_1 \cup x\geq x_2)$
$(ax^2+bx+c\leq 0 \rightarrow x_1\leq x\leq x_2)$



$\Delta = 0$
$ax^2+bx+c>0 \rightarrow \forall x\in \Re, x\neq x_1$
$ax^2+bx+c<0 \rightarrow nessuna\ \ soluzione\ \ reale$

$(ax^2+bx+c\geq 0 \rightarrow \forall x\in \Re)$
$(ax^2+bx+c\leq 0 \rightarrow x=x_1)$



$\Delta < 0$
$ax^2+bx+c>0 \rightarrow \forall x\in \Re$
$ax^2+bx+c<0 \rightarrow nessuna\ \ soluzione\ \ reale$

$(ax^2+bx+c\geq 0 \rightarrow \forall x\in \Re)$
$(ax^2+bx+c\leq 0 \rightarrow nessuna\ \ soluzione\ \ reale)$

II) Consideriamo adesso disequazioni in cui $\boxed{a<0}$

Esempio 1 $\boxed{-x^2+2x>0}$

Per risolvere l'equazione associata $-x^2+2x=0$ mettiamo in evidenza la x:

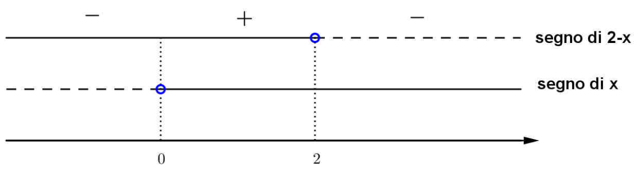
$$-x^2+2x=x(-x+2)$$

quindi $-x^2+2x=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \cup x=2$.

Per determinare il segno di $-x^2+2x$ studiamo il segno di x e di $2-x$:

$$x>0$$
$$2-x>0 \quad \rightarrow \quad x<2$$

Il grafico dei segni è :

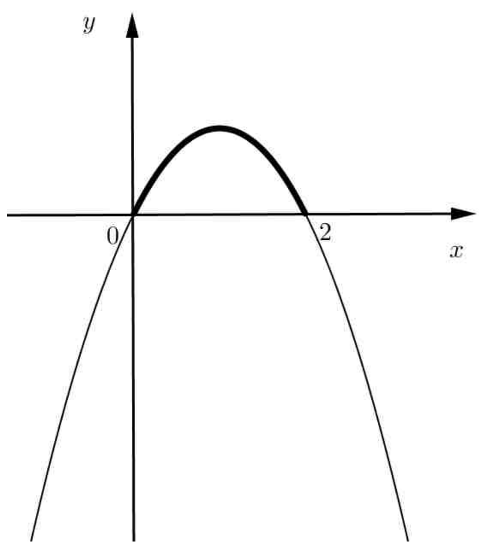


Quindi $-x^2+2x>0 \quad \rightarrow \quad 0<x<2$
(**valori interni alle soluzioni dell'equazione associata**)

Interpretazione grafica

Disegniamo la parabola $y=-x^2+2x$: questa volta la **parabola è rivolta verso il basso** e quindi

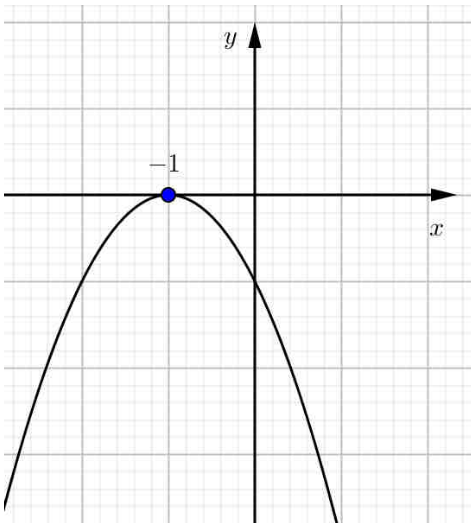
$$y>0 \rightarrow 0<x<2$$



Esempio 2 $\boxed{-x^2-2x-1>0}$

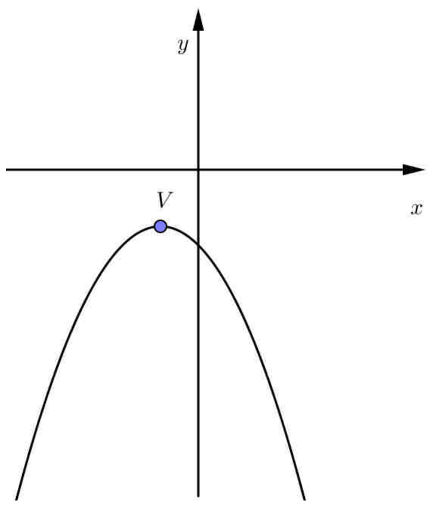
In questo caso abbiamo che l'equazione associata ha $\Delta=0$.
Infatti $\quad -x^2-2x-1=-\left(x^2+2x+1\right)=-(x+1)^2$

Quindi la disequazione non ha **nessuna soluzione** ed infatti la parabola è rivolta verso il basso ed ha vertice in $(-1;0)$.



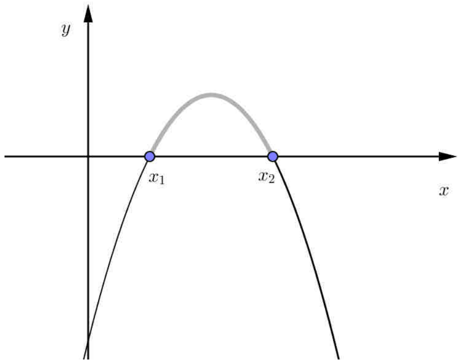
Esempio 3 $\boxed{-x^2-x-1>0}$

In questo caso abbiamo che l'equazione associata ha $\Delta<0$ e quindi non ci sono soluzioni reali: quindi la parabola associata, che è rivolta verso il basso ed ha vertice $V\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$, non interseca l'asse x e **la disequazione non ha nessuna soluzione.**



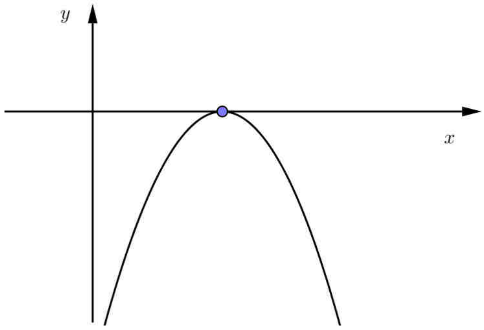
Riassumiamo le soluzioni delle disequazioni in cui $\boxed{a<0}$

Parabola rivolta verso il basso



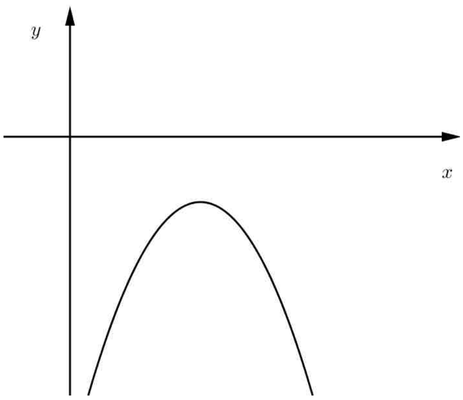
$\Delta > 0$
$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow x_1 < x < x_2$
$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow x < x_1 \cup x > x_2$

$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow x_1 \leq x \leq x_2)$
$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow x \leq x_1 \cup x \geq x_2)$



$\Delta = 0$
$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \textit{nessuna soluzione reale}$
$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \forall x \in \Re, x \neq x_1$

$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow x = x_1)$
$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \forall x \in \Re)$



$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \textit{nessuna soluzione reale}$
$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \forall x \in \Re$

$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \textit{nessuna soluzione reale})$
$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \forall x \in \Re)$

Nota importante

Quando in una disequazione si ha $a < 0$ conviene moltiplicare per –1 ed invertire la diseguaglianza riconducendosi al caso di $a > 0$.
In questo modo possiamo fare riferimento sempre al caso della parabola rivolta verso l'alto.

Vediamo come si poteva procedere nel caso degli ultimi tre esempi:

1) $-x^2 + 2x > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 0 \rightarrow 0 < x < 2$
2) $-x^2 - 2x - 1 > 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 < 0 \rightarrow (x+1)^2 < 0 \rightarrow \textit{nessuna soluzione reale}$;
3) $-x^2 - x - 1 > 0 \rightarrow x^2 + x + 1 < 0 \rightarrow \textit{nessuna soluzione reale}$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Esempio 1

Consideriamo la disequazione $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

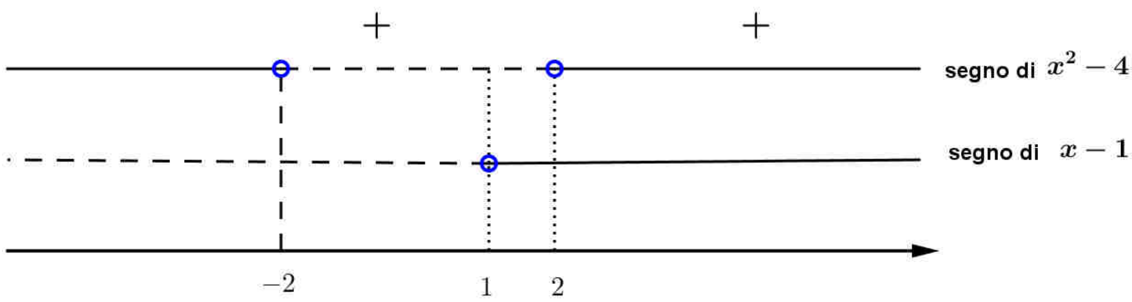
Proviamo a scomporre il polinomio (raccoglimento parziale):

$$x^2(x-1) - 4(x-1) > 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(x^2-4) > 0$$

Possiamo quindi studiare il segno dei singoli fattori

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$
$$x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \cup x > 2$$

Riportiamo questi risultati nel "grafico dei segni":



Abbiamo quindi $(x-1)(x^2-4) > 0$ per $-2 < x < 1 \cup x > 2$.

Esempio 2

Consideriamo la disequazione $x^3 - 2x^2 + 1 < 0$

Scomponiamo utilizzando la regola di Ruffini:

$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$

$$
\begin{array}{cccc|l}
x^3 & -2x^2 & & +1 & x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & x^2 & & & x^2 - x - 1 \\
\cline{1-2}
 & -x^2 & & +1 & \\
 & +x^2 & -x & & \\
\cline{2-4}
 & // & -x & +1 & \\
 & & +x & -1 & \\
\cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}
$$

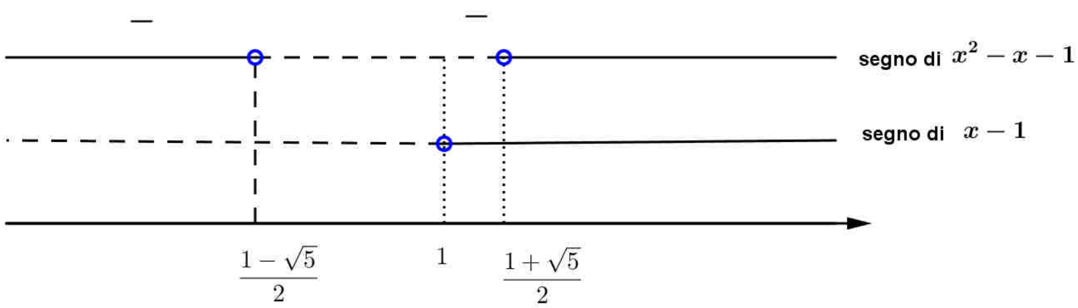
Quindi $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$

Studiamo il segno dei singoli fattori (si imposta sempre il fattore >0)

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$

$$x^2 - x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \left(x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \qquad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cup x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Riportiamo questi risultati nel "grafico dei segni":



Poiché la disequazione è $x^3 - 2x^2 + 1 < 0$, la soluzione è

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cup 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esempio 3

Consideriamo la disequazione $x^3 - 1 > 0$

Sappiamo che possiamo scomporre il polinomio dato come differenza di cubi per cui

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Studiamo il segno dei singoli fattori

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$
$$x^2 + x + 1 > 0 \quad (a > 0, \Delta < 0) \rightarrow \forall x \in R$$

Quindi $x^3 - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

Osservazione
Quando in un prodotto un fattore è positivo $\forall x \in R$, possiamo anche non considerarlo perché non fa cambiare il segno del prodotto.

Esempio 4

Consideriamo la disequazione $x^3 + 2x^2 \leq 0$

Basta mettere in evidenza:

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2) \leq 0$$

Poiché $x^2 \geq 0 \ \forall x \in R$ possiamo anche non considerarlo e studiare solo il segno di $(x+2)$:

$$x^2(x+2) \leq 0 \rightarrow (x+2) \leq 0 \rightarrow x + 2 \leq 0 \rightarrow x \leq -2$$

Disequazioni fratte

Esempio

Risolviamo la seguente disequazione fratta:

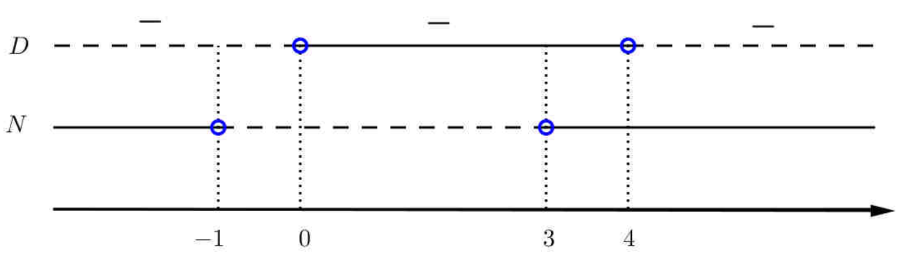
$$\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore:

N>0 $\quad x^2 - 2x - 3 > 0 \quad (x_{1,2} = 1 \pm 2) \rightarrow x < -1 \cup x > 3$

D>0 $\quad 4x - x^2 > 0 \rightarrow x(4 - x) > 0, \quad (x_1 = 0, x_2 = 4) \rightarrow 0 < x < 4$

Grafico dei segni:



Poiché dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$ la soluzione sarà: $x < -1 \cup 0 < x < 3 \cup x > 4$.

NOTA 1

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} \leq 0$, dobbiamo considerare tra le soluzioni anche x =–1 e x = 3, ma non x = 0 e x = 4 perché per quei valori il denominatore si annulla (C.E. della frazione algebrica: $x \neq 0, x \neq 4$).
La soluzione risulta quindi:

$$x \leq -1 \cup 0 < x \leq 3 \cup x > 4$$

NOTA2

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$, il procedimento sarebbe stato lo stesso solo che alla fine, dal grafico dei segni, avremmo considerato i valori di x che danno segno complessivo positivo.

La soluzione di $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$ risulta quindi:

$$-1 < x < 0 \cup 3 < x < 4$$

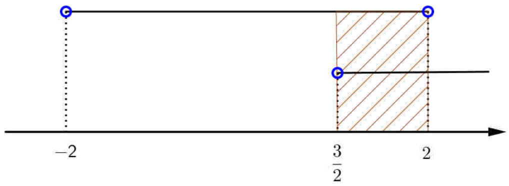
Sistemi di disequazioni

Esempio 1

Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} 2x-3>0 \\ x^2-4<0 \end{cases}$

Dobbiamo risolvere ciascuna disequazione del sistema ed intersecare le soluzioni per ottenere le soluzioni "comuni".

$$\begin{cases} 2x-3>0 & \rightarrow \quad x>\dfrac{3}{2} \\ x^2-4<0 & \rightarrow \quad -2<x<2 \end{cases}$$



quindi la soluzione del sistema è $\dfrac{3}{2}<x<2$.

NOTA IMPORTANTE

Quando si intersecano le soluzioni delle disequazioni **non si deve mai aggiungere il tratteggio!**

Il tratteggio indica "segno negativo" nel grafico dei segni ma in questo caso **non stiamo facendo un grafico dei segni**!

Esempio 2

Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^2-2x<0 \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+4}>0 \end{cases}$

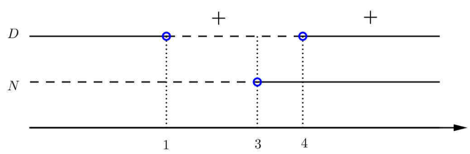
Per la prima disequazione abbiamo $x(x-2)<0$, quindi $0<x<2$

Per la seconda disequazione dobbiamo studiare i segni di numeratore e denominatore:

N>0 $x-3>0 \quad \rightarrow \quad x>3$

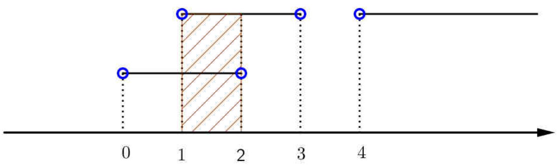
D>0

$x^2-5x+4>0 \quad (x_{1,2}=\dfrac{5\pm 3}{2} \rightarrow x_1=1, x_2=4) \rightarrow x<1 \cup x>4$



Quindi la soluzione della seconda disequazione è : $1<x<3 \cup x>4$.

A questo punto dobbiamo intersecare le soluzioni della prima e della seconda disequazione. Le soluzioni comuni sono:



Perciò la soluzione del sistema è: $1<x<2$.

Esempio 3

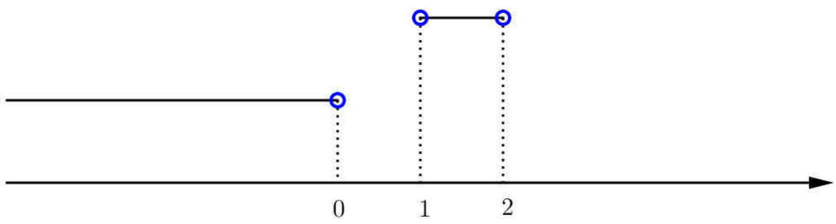
Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} < 0 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$

Prima disequazione: $\dfrac{x^2+1}{x} < 0$

Osservo che $x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in R$ e quindi la disequazione ha come soluzione $x < 0$.

Seconda disequazione: $x^2 - 3x + 2 < 0 \ (x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2) \rightarrow 1 < x < 2$.

Grafico per individuare le soluzioni "comuni"

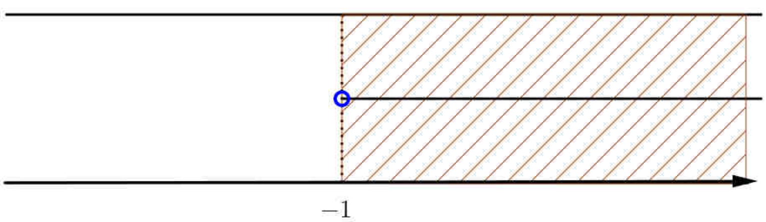


Quindi non ci sono soluzioni comuni: $S = \varnothing$ (l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto) per cui il sistema è "impossibile".

Esempio 4

Risolviamo il sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^3 + 1 > 0 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(x^2 - x + 1) > 0 \rightarrow x > -1 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in R \end{cases}$ ($x^2 - x + 1$ è sempre positivo)



Pertanto la soluzione è $x > -1$.

ESERCIZI

I) Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$ $[x < -2 \cup x > -1]$

2) $x^2 + x - 6 > 0$ $[x < -3 \cup x > 2]$

3) $x^2 - 2x + 10 > 0$ $[\forall x \in R]$

4) $x^2 - 2x - 8 > 0$ $[x < -2 \cup x > 4]$

5) $x^2 + 4x + 5 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

6) $-x^2 + 3x - 2 > 0$ $[1 < x < 2]$

7) $x(x+3) \leq -2x$ $[-5 \leq x \leq 0]$

8) $-x^2 + 9 \leq 0$ $[x \leq -3 \cup x \geq 3]$

9) $x^2 + 10x + 34 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

10) $-x(x-4) < 3$ $[x < 1 \cup x > 3]$

11) $9x^2 + 4 > 0$ $[\forall x \in R]$

12) $81x^2 + 18x + 1 \leq 0$ $\left[x = -\frac{1}{9}\right]$

13) $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$ $[-4 \leq x \leq -2]$

14) $6x^2 + x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right]$

15) $x^2 - 8x + 20 > 0$ $[\forall x \in R]$

16) $\frac{1}{2}(x-1) \leq x^2 - x$ $\left[x \leq \frac{1}{2} \cup x \geq 1\right]$

17) $9x^2 - 30x + 25 > 0$ $\left[\forall x \in R - \left\{\frac{5}{3}\right\}\right]$

18) $-x^2 - 3 \geq 0$ [*nessuna soluzione reale*]

19) $x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{15}{8} > 0$ $\left[x < -\frac{3}{4} \cup x > \frac{5}{2} \right]$

20) $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 < 0$ $\left[\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2} \right]$

21) $x^2 - 6x + 1 > 0$ $[x < 3 - 2\sqrt{2} \cup x > 3 + 2\sqrt{2}]$

22) $3x^2 + 8x - 3 < 0$ $\left[-3 < x < \frac{1}{3} \right]$

23) $2x^2 - 4x - 1 > 0$ $\left[x < \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \cup x > \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right]$

24) $x^2 + 3x + 8 > 0$ $[\forall x \in R]$

25) $-x^2 + 3x - 10 > 0$ $[nessuna\ \ soluzione\ \ reale]$

26) $-x^2 + 2x + 4 > 0$ $\left[1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5} \right]$

27) $-2x^2 + 4x + 6 \geq 0$ $[-1 \leq x \leq 3]$

28) $x^2 - 6x + 12 > 0$ $[\forall x \in R]$

29) $7x^2 - 12x - 4 > 0$ $\left[x < -\frac{2}{7} \cup x > 2 \right]$

30) $-12x^2 + 4x + 1 < 0$ $\left[x < -\frac{1}{6} \cup x > \frac{1}{2} \right]$

31) $4x^2 - 3x + 1 < 0$ $[nessuna\ \ soluzione\ \ reale]$

32) $3x^2 + x + 2 < 0$ $[nessuna\ \ soluzione\ \ reale]$

33) $x^2 - 6x + 9 > 0$ $[\forall x \in R - \{3\}]$

34) $-2x^2 + x + 1 > 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1 \right]$

35) $-5x^2 + 4x + 1 \leq 0$ $\left[x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1 \right]$

36) $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$ $[\forall x \in R]$

37) $8x^2 - 24x + 18 \leq 0$ $\left[x = \frac{3}{2} \right]$

38) $-27x^2+18x-3\geq 0$ $\left[x=\frac{1}{3}\right]$

39) $x^2-2x<0$ $[0<x<2]$

40) $1-x^2\geq 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $[-2\leq x\leq 0]$

41) $\frac{13+9x^2}{9}-\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{3}(4x+1)>0$ $[\forall x\in R]$

42) $-6x+\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)-9(-1)^2<0$ $\left[x<-\frac{7}{2}\cup x>-\frac{5}{2}\right]$

43) $\frac{1-x+x^2}{2}+\frac{x(3x+16)}{8}-\frac{3x^2+2}{4}\leq x^2+\frac{5x-4}{3}$ $\left[x\leq-\frac{4}{3}\cup x\geq\frac{8}{7}\right]$

44) $\left(\frac{1}{3}+x\right)^2-\frac{1}{3}\geq x-\frac{1}{4}$ $[\forall x\in R]$

45) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\left[x\leq-1\cup x\geq\frac{1}{2}\right]$

46) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\leq x-\frac{1}{4}$ $\left[x=\frac{5}{6}\right]$

47) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)>\frac{x}{12}(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)$ $\left[x<-\frac{1}{3}\cup x>\frac{3}{4}\right]$

48) $x^2\geq\frac{1}{2}(x+1)$ $\left[x<-\frac{1}{2}\cup x>1\right]$

49) $\frac{1}{2}x\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}x^2\right)+x-\frac{1}{6}<\frac{5}{6}x$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

50) $(x+1)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}(x+1)\leq 0$ $\left[x=-\frac{3}{4}\right]$

51) $2\left(5-\frac{13}{8}x\right)>(x+2)^2$ $\left[-8<x<\frac{3}{4}\right]$

52) $\sqrt{3}x^2-x+\frac{1}{2}\geq x\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ $\left[x\leq\frac{\sqrt{3}}{3}\cup x\geq 1\right]$

II) Risolvere graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado

53) $x^2 - 1 > 0$ $[\, x < -1 \cup x > 1 \,]$

54) $4 - x^2 < 0$ $[\, x < -2 \cup x > 2 \,]$

55) $x^2 - 2x + 1 < 0$ [*nessuna soluzione reale*]

56) $x^2 + x - 6 > 0$ $[\, x < -3 \cup x > 2 \,]$

57) $-x^2 - 2x < 0$ $[\, x < -2 \cup x > 0 \,]$

58) $x^2 - 4x + 6 > 0$ $[\, \forall x \in R \,]$

59) $x^2 + 4x + 3 < 0$ $[\, -3 < x < -1 \,]$

60) $x^2 + 5 > 0$ $[\, \forall x \in R \,]$

61) $x^2 - 8x > 0$ $[\, x < 0 \cup x > 8 \,]$

62) $-x^2 + 16 \le 0$ $[x \le -4 \cup x \ge 4]$

III) Risolvere le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo

63) $3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 < 0$ $\left[x < -\frac{2}{3} \right]$

64) $x^4 + x^3 < 0$ $[\, -1 < x < 0 \,]$

65) $x^4 - 2x^2 \ge 0$

66) $x^4 - 1 > 0$ $[\, x < -1 \cup x > 1 \,]$

67) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 > 0$ $\left[-1 < x < \frac{1}{2} \cup x > 1 \right]$

68) $6x^3 + x^2 - 11x - 6 \ge 0$ $\left[-1 \le x \le -\frac{2}{3} \cup x \ge \frac{3}{2} \right]$

69) $x^2 - 2x^3 \le 0$ $\left[x \ge \frac{1}{2} \quad \cup \quad x = 0 \right]$

70) $x^3 + 1 > 0$ $[\, x > -1 \,]$

IV) **Risolvere le seguenti disequazioni fratte**

71) $\dfrac{x}{9x^2-6x}>0$ $\left[x>\dfrac{2}{3}\right]$

72) $\dfrac{x^2+4x-5}{2x-3}<0$ $\left[x<-5 \cup 1<x<\dfrac{3}{2}\right]$

73) $\dfrac{x^2-2x+1}{6x}>0$ $[x>0, x\neq 1]$

74) $\dfrac{3}{x-2}+x+2\geq 0$ $[-1\leq x\leq 1 \cup x>2]$

75) $\dfrac{x^2+1}{2x^2}>0$ $[\ \forall x\in R-\{0\}]$

76) $\dfrac{5-x^2}{5x+x^2}\leq 0$ $\left[x<-5 \cup -\sqrt{5}\leq x<0 \cup x\geq \sqrt{5}\right]$

77) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-8}<0$ $[-4<x<1]$

78) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-7x+6}\geq 0$ $[x\leq -1 \cup 1<x\leq 4 \cup x>6]$

79) $-\dfrac{(x^2-x+2)}{x-1}+4>0$ $[x<1 \cup 2<x<3]$

80) $\dfrac{6+x}{x}<\dfrac{2}{x+1}$ $[-3<x<-2 \cup -1<x<0]$

81) $1\leq \dfrac{14}{3(x+2)}+\dfrac{4}{3x-3}$ $[-2<x\leq 0 \cup 1<x\leq 5]$

82) $\dfrac{3}{x^2-2x+1}+\dfrac{3+x}{x-1}>0$ $[x<-2 \cup x>0\ e\ x\neq 1]$

83) $\dfrac{2x}{x^2-9}>\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{x-2}{x^2-6x+9}$ $\left[-3<x<1 \cup x>\dfrac{3}{2}\right]$

84) $\dfrac{81-x^4}{x^2-3x}\geq 0$ $[-3\leq x<0]$

V) **Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni**

85) $\begin{cases} 2x - x^2 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x + 6 - x^2 > 0 \end{cases}$ $[-1 < x < 0 \cup 2 < x < 3]$

86) $\begin{cases} 3 + x^2 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \end{cases}$ $[3 < x < 4]$

87) $\begin{cases} x^2 - 5x - 7 > 0 \\ -x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

88) $\begin{cases} 8x^2 + 6x - 9 > 0 \\ x^2 + 8x \leq 0 \end{cases}$ $\left[-8 \leq x < -\frac{3}{2}\right]$

89) $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 3x} \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ $[x > 3]$

90) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 7x - 3x^2 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$ $\left[\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}\right]$

91) $\begin{cases} -x^2 + x + 2 < 0 \\ \dfrac{x+2}{2} \geq 1 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases}$ $[x > 7]$

92) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 > 0 \\ x(x+2) < 8 \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases}$ $[-4 < x < -3]$

93) $\begin{cases} 3 - x^2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ x + 4x^2 - 3 < 0 \end{cases}$ $\left[-1 < x < -\frac{1}{2}\right]$

VI) **Risolvere i seguenti problemi**

94) ***Problema svolto***

Consideriamo un'equazione di secondo grado contenente un parametro reale *k*, per esempio

$$x^2+(k+1)x+2-k=0$$

Possiamo chiederci per quali valori del parametro *k* l'equazione ha soluzioni reali, cioè per quali valori di *k* si ha $\Delta \geq 0$.

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione:

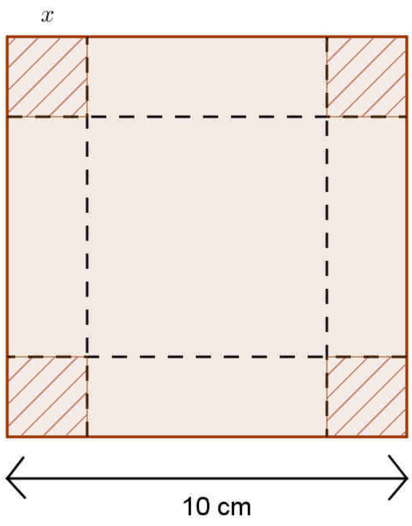
$$(k+1)^2-4(2-k)\geq 0 \quad \rightarrow \quad k^2+2k+1-8+4k\geq 0 \rightarrow k^2+6k-7\geq 0$$

da cui si ricava($k_{1,2}=-3\pm 4 \rightarrow k_1=-7, k_2=1$)

$$k\leq -7 \cup k\geq 1$$

95) ***Problema guidato***

Da una lamiera quadrata di lato 10 cm vogliamo ritagliare quatto quadrati uguali di lato *x* (vedi figura) in modo che, ripiegando lungo i lati tratteggiati, si possa costruire una "scatola". Per quali valori di *x* la scatola ha superficie maggiore di 84 cm^2?



L'area della base della scatola risulta $(10-2x)^2$. Le quattro pareti della scatola hanno area $4(10-2x)x$, quindi:

$(10-2x)^2+4(10-2x)x>84 \rightarrow$ ……………………….

Poiché $x>0$ perché………………………………,
allora la soluzione è ………………………………..

Oppure (più semplicemente): $100-4x^2>84$ da cui si ha…………………………………

96) Per quali valori di m l'equazione $x^2 - 2(m-2)x + 9 = 0$ ha soluzioni reali?

$$[m \le -1 \cup m \ge 5]$$

97) Per quali valori di k l'equazione $x^2 - kx + 2x - \dfrac{k^2 - 5k}{4} = 0$ ha due soluzioni reali distinte?

$$\left[k < \frac{1}{2} \cup k > 4\right]$$

98) Per quali valori di a l'equazione $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ non ammette soluzioni reali?

$$[a < 1 \cup a > 6]$$

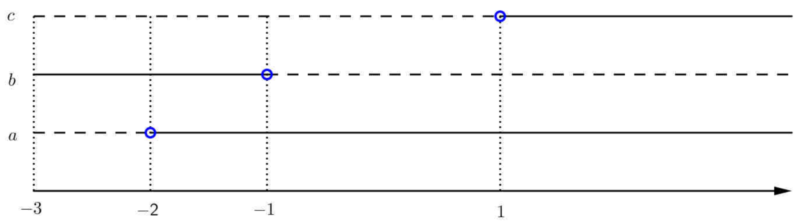
99) ***Problema svolto***

Per quali valori di k l'equazione $(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0$ ha radici reali e positive?

Innanzitutto calcoliamo $\dfrac{\Delta}{4} = (k+1)^2 + (k+2)(1-k) = ... = k+3$; quindi affinché si abbiano radici reali occorre che $\dfrac{\Delta}{4} \ge 0 \leftrightarrow k \ge -3$.

Per il segno delle soluzioni possiamo studiare il segno dei coefficienti e ricordare che, per la regola di Cartesio, ad una variazione corrisponde una radice positiva.

$a : (k+2) > 0 \leftrightarrow k > -2$
$b : -2(k+1) > 0 \leftrightarrow k < -1$
$c : -(1-k) > 0 \leftrightarrow k > 1$



Quindi ho due variazioni (vale a dire due soluzioni positive) per

$$-3 \le k < -2 \cup k > 1$$

100) Determina per quali valori di k l'equazione $(k-5)x^2 - 4kx + k - 2 = 0$ ammette due soluzioni reali e negative.

$$[1 \le k < 2]$$

101) Determina per quali valori di a l'equazione $(2a+3)x^2 - (a+4)x + 1 = 0$
a) ha soluzioni reali;
b) ha due soluzioni positive.

$$\left[\forall a \in R;\ a > -\frac{3}{2}\right]$$

102) Data l'equazione $x^2 - 2(k-2)x + k^2 = 0$, determinare per quali valori di k l'equazione:

a) ammette soluzioni reali
b) ammette soluzioni negative

$[k \le 1; \quad k \le 1, k \ne 0]$

103) Per quali valori di k le soluzioni di $(k-2)x^2 + (2k+1)x + 3 = 0$ sono discordi?

$[k < 2]$

104) Data l'equazione $(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0$, determinare per quali valori di k:

a) ha soluzioni reali e distinte;
b) ha soluzioni reali e positive;
c) ha soluzioni reali e negative;
d) ha soluzioni reali e discordi.

$[a) k > -3, k \ne 2; b) -3 < k < -2 \cup k > 1; c) \nexists k \in R; d) -2 < k < 1]$

105) Un rettangolo ha l'area di 50 cm^2. Quanto deve misurare la sua base b affinché il perimetro non superi i 30 cm?

$[5 \le b \le 10]$

106) In un triangolo rettangolo la differenza tra i cateti è 1 cm. Quale deve essere la misura x del cateto minore in modo che l'area non superi i 15 cm^2?

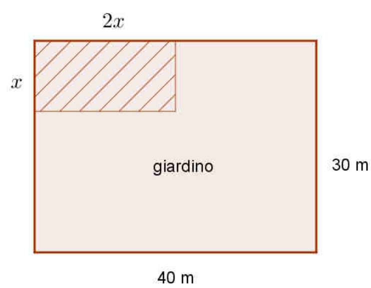
$[0 < x \le 5\, cm]$

107) Considera due circonferenze concentriche di raggi 4 cm e $x\ cm$ con $x < 4$. Come deve essere il raggio x perché l'area della circonferenza interna sia minore di $\frac{1}{4}$ dell'area della circonferenza di raggio 4?

$[0 < x < 2\, cm]$

108) In un appezzamento rettangolare di terreno 30 m x 40 m si vuole costruire una casa come in figura qui sotto.

Quale deve essere x (in metri) in modo che il giardino abbia una superficie di almeno 1000 m^2?



$[0 < x \le 10m]$

109) In un trapezio rettangolo la base minore è uguale all'altezza e la base maggiore supera di 2 cm la base minore. Quale deve essere la misura della base minore x perché l'area del trapezio non superi i 20 cm^2?

$[0 < x \le 4\ cm]$