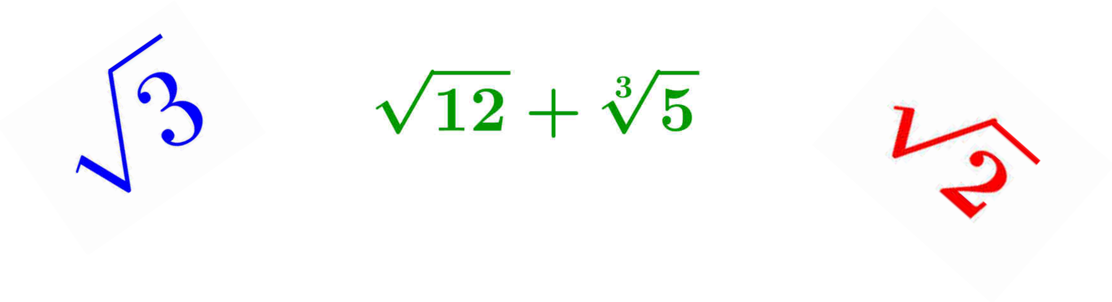
I radicali



I) Consideriamo l'operazione che associa ad un numero il suo quadrato

$$x \rightarrow x^2$$

Per esempio:

$$3 \rightarrow 3^2 = 9$$
$$(-3) \rightarrow (-3)^2 = 9$$
$$2 \rightarrow 2^2 = 4$$
$$(-2) \rightarrow (-2)^2 = 4$$

Possiamo definire l'operazione inversa? È possibile, dato un numero a, individuare un numero di cui a è il quadrato?

$$? \leftarrow 9$$
$$? \leftarrow -5$$

1° osservazione
Ci accorgiamo subito che se $a < 0$ non troviamo nessun numero che elevato al quadrato dia come risultato a.
Quindi dovremo limitare il campo ai numeri positivi $a \geq 0$.

2° osservazione
Se consideriamo per esempio $a = 9$ abbiamo due numeri che hanno come quadrato 9

$$3 \leftarrow 9 \qquad (3^2 = 9)$$
$$(-3) \leftarrow 9 \qquad ((-3)^2 = 9)$$

Ma poiché non possiamo associare ad un'operazione due risultati i matematici hanno stabilito di prendere il numero positivo (nel nostro caso 3)

$$3 \leftarrow 9$$

Il simbolo usato per indicare l'operazione inversa del "fare il quadrato" e chiamata radice quadrata di a è

$$\sqrt{a}$$

Quindi, per esempio, abbiamo $\sqrt{9} = 3$ mentre non associamo (per ora) nessun significato alla scrittura $\sqrt{-9}$.

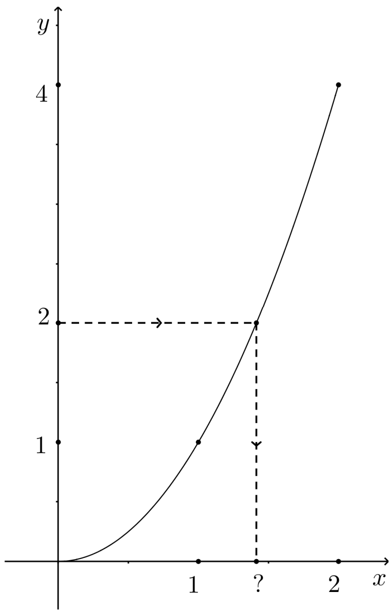
Nota: il simbolo $\sqrt{}$ è la stilizzazione di r che sta per "radice".

Problema

Ma se estraiamo la radice quadrata di un numero che non è un quadrato, per esempio $a = 2$, il simbolo $\sqrt{2}$ quale numero rappresenta?

$$\sqrt{2} = ?$$

Rappresentiamo nel piano cartesiano la funzione $f : x \to x^2$ con $x \geq 0$



Per capire quale numero è $\sqrt{2}$ possiamo seguire la "strada" indicata in figura.

È chiaro che sarà un numero compreso tra 1 e 2, ma possiamo scriverlo come una frazione?

Se usiamo la calcolatrice, digitando $\sqrt{2}$ otteniamo

1,414213562…..

Sappiamo che i numeri razionali corrispondono a numeri decimali finiti o illimitati **periodici** mentre questo numero non sembra avere un periodo….

Il periodo potrebbe essere molto lungo e magari potrei non essermi accorto della ripetizione…

Ma in realtà fin dall'antichità è stato "**dimostrato**" che $\sqrt{2}$ non è un numero periodico perché non può essere scritto come frazione.

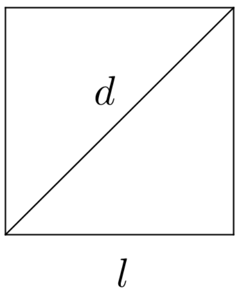
Infatti il ragionamento è questo: supponiamo, per assurdo, che $\sqrt{2}$ corrisponda ad un numero razionale. Possiamo sempre ridurlo ai minimi termini cioè considerare a e b primi tra loro

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Ma allora se a è pari (e quindi b non può esserlo perché sono primi tra loro) allora a^2 è divisibile per 4 mentre $2b^2$ non lo è (b^2 è dispari $\Rightarrow 2b^2$ è divisibile per 2 ma non per 4);
se a è dispari $\Rightarrow a^2$ è dispari mentre $2b^2$ è pari.
Quindi non può sussistere l'uguaglianza $a^2 = 2b^2$.

NOTA 1

$\sqrt{2}$ corrisponde al rapporto tra la misura della diagonale e il lato di un quadrato.
La scoperta che diagonale e lato di un quadrato non sono "confrontati" tra loro (cioè il loro rapporto non è un numero razionale) fu fatta dalla scuola pitagorica e tenuta segreta per lungo tempo.



Infatti, dal teorema di Pitagora abbiamo

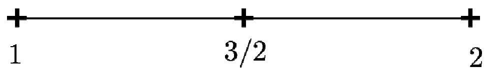
$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot l$

NOTA 2

Come possiamo determinare un'approssimazione decimale di $\sqrt{2}$ senza usare la calcolatrice?

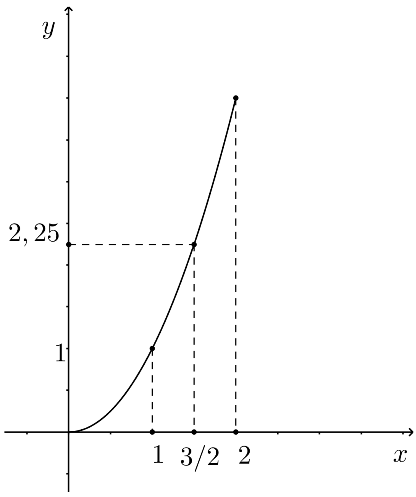
Abbiamo visto chiaramente che $1 < \sqrt{2} < 2$

Proviamo a dividere a metà l'intervallo $[1;2]$:



troviamo $\dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

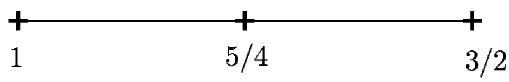
Come possiamo stabilire se $\sqrt{2}$ si trova tra 1 e $\dfrac{3}{2}$ oppure tra $\dfrac{3}{2}$ e 2?



Proviamo ad elevare al quadrato $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25 > 2$

Quindi $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$

Dividiamo ancora a metà l'intervallo $[1;\dfrac{3}{2}]$:



troviamo $\dfrac{1+\dfrac{3}{2}}{2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$. $\sqrt{2}$ si troverà tra 1 e $\dfrac{5}{4}$ oppure tra $\dfrac{5}{4}$ e $\dfrac{3}{2}$?

Elevando al quadrato abbiamo $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = 1{,}5625 < 2$ e quindi $1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$

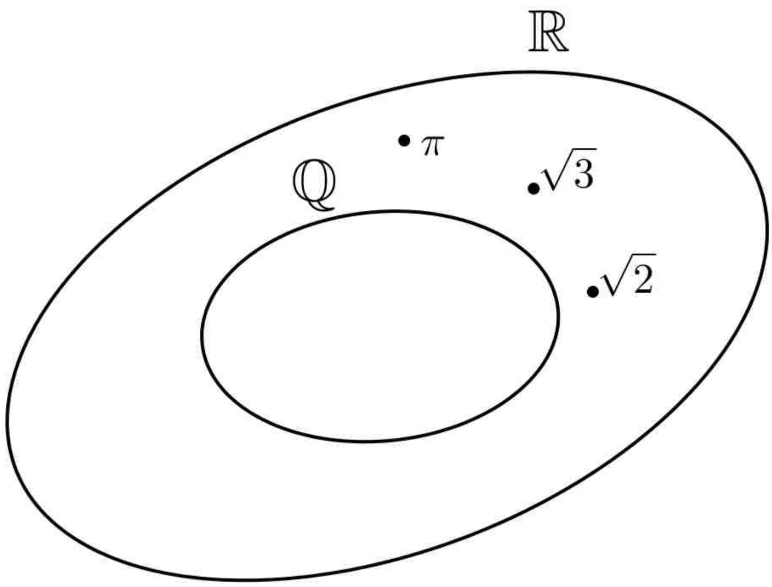
Possiamo andare avanti: prova tu ….

Ma allora $\sqrt{2}$ che numero è?

I matematici hanno chiamato i **numeri decimali illimitati aperiodici** (a = senza – periodo) numeri irrazionali (cioè non razionali) ed hanno chiamato **numeri reali $\Re$ l'unione dei numeri razionali e irrazionali**.

Non ci sono solo $\sqrt{2}$ (o $\sqrt{3}$ ecc..) tra i numeri irrazionali: in seguito sono stati scoperti anche altri numeri che hanno una rappresentazione decimale illimitata aperiodica ma che non sono radici.

Un esempio è π che rappresenta il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro.



NOTA

Inizialmente avevamo considerato i numeri naturali N, avevamo poi ampliato N perché fosse sempre possibile effettuare la sottrazione tra due numeri ottenendo Z;

per poter sempre eseguire la divisione tra numeri interi appartenenti a Z avevamo introdotto l'insieme dei numeri razionali Q;

per poter eseguire l'operazione inversa della potenza abbiamo infine introdotto i numeri irrazionali che, uniti ai razionali, danno l'insieme dei numeri reali $\Re$.

II) È chiaro che, come abbiamo definito l'operazione di radice quadrata come operazione inversa dell'elevamento al quadrato, possiamo cercare di definire l'operazione di radice cubica come operazione inversa dell'elevamento al cubo.

Per esempio se consideriamo $x \to x^3$ ci accorgiamo che non ci sono i problemi trovati nel caso dell'elevamento al quadrato perché si ottengono come risultati numeri positivi e negativi e non ci sono numeri diversi che danno lo stesso risultato.

Per esempio:

$$2 \to 2^3 = 8$$
$$-2 \to (-2)^3 = -8$$

Quindi:

$$2 \leftarrow 8$$
$$-2 \leftarrow -8$$

Possiamo indicare l'estrazione di radice cubica di a con il simbolo

$$\sqrt[3]{a}$$

(a può essere sia negativo che positivo e il numero $\sqrt[3]{a}$ può risultare sia positivo che negativo).

Quindi:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Anche in questo caso, se a non è un cubo, cosa rappresenta $\sqrt[3]{a}$?
Per esempio, $\sqrt[3]{2}$ che tipo di numero è?

Anche in questo caso, come per $\sqrt{2}$, ci troviamo di fronte ad un numero decimale illimitato aperiodico, quindi ad un numero irrazionale.

III)È chiaro che possiamo considerare l'operazione inversa dell'elevamento a potenza $n-$esima in generale.

- Se n **è pari** il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

avrà significato solo se $a \geq 0$ (elevando ad una potenza pari si ottengono sempre numeri positivi) e indicherà un numero positivo o nullo.

- Se n **è dispari** il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

avrà sempre significato e potrà essere sia positivo che negativo.

In generale $\sqrt[n]{a}$ **si chiama più brevemente "radicale"** (o radice $n-$esima di a)

$$\begin{cases} n & \text{viene chiamato } \textbf{INDICE} \text{ del radicale} \\ a & \text{viene chiamato } \textbf{RADICANDO} \end{cases}$$

Per quello che abbiamo precedentemente osservato **i radicali possono essere numeri razionali o irrazionali**.

Esempi

$\sqrt{25} = 5 \in$ Q

$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad \in$ Q

$\sqrt{5} \notin$ Q (numero irrazionale)

$\sqrt[3]{2} \notin$ Q

Nota importante

Osserviamo che se n è dispari possiamo ricondurci ad avere un radicando positivo.
Per esempio:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Radicali equivalenti

Consideriamo radicali del tipo

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m}}$$

con $a^m \geq 0$ perché anche nel caso di indice dispari ci si può ricondurre a considerare il radicando positivo o nullo.
m **viene detto esponente del radicando**.

Anche se sono scritti in forma diversa, due radicali possono rappresentare lo stesso numero?
Consideriamo per esempio $\sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{4}$: se proviamo con la calcolatrice otteniamo lo stesso numero!

Se scriviamo $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$ notiamo che rispetto a $\sqrt{2}$ indice ed esponente del radicando sono stati moltiplicati per 2.

Inoltre osserviamo che elevando alla quarta otteniamo lo stesso numero:

$$(\sqrt{2})^4 = [(\sqrt{2})^2]^2 = 2^2$$
$$(\sqrt[4]{2^2})^4 = 2^2$$

Abbiamo quindi individuato questa proprietà

Moltiplicando per uno stesso numero naturale (≠ 0) INDICE e ESPONENTE del radicando di un radicale si ottiene un radicale "equivalente" (a cui è associato cioè lo stesso numero reale).

Nota

E' un po' come quando, moltiplicando per uno stesso numero naturale (≠ 0) numeratore e denominatore di una frazione si ottiene una frazione equivalente (cioè associata allo stesso numero razionale).

Naturalmente (per simmetria) se dividiamo indice ed esponente del radicando di un radicale per un divisore comune si ottiene un radicale equivalente.

$$\sqrt{2} \underset{\leftarrow}{\rightarrow} \sqrt[4]{2^2}$$

In simboli quindi abbiamo

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}}$$

Riduzione di radicali allo stesso indice

Come possiamo "**confrontare"**(cioè stabilire qual è il maggiore) due radicali come $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$?

Possiamo "ridurli" allo stesso indice utilizzando la proprietà precedente: conviene prendere come indice il **minimo comune multiplo dei due indici**, nel nostro caso

$$m.c.m.(2,3) = 6$$

Quindi

$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$ (moltiplico per 3 indice ed esponente del radicando)

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}$ (moltiplico per 2 indice ed esponente del radicando)

Quindi ora confronto i radicandi ed ottengo

$$\sqrt[6]{2^3} < \sqrt[6]{3^2} \qquad (8 < 9)$$

Radicali simili

Quando due radicali hanno **stesso indice**, **stesso radicando** e differiscono al massimo per un fattore che li moltiplica (detto coefficiente del radicale) si dicono **simili.**

Per esempio $\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$ sono radicali simili

Esempio

$\sqrt[4]{9}$ e $2\sqrt{3}$ sono simili?

$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

Quindi sono simili.

Operazioni con i radicali

• Addizione e sottrazione

Possiamo sommare o sottrarre tra loro due radicali **solo se sono simili**.

Esempio: $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1+3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Se i radicali non sono simili non possiamo fare niente.

Esempio: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ va lasciato così!

NOTA: ricorda che $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$!!
Se infatti elevi al quadrato $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ottieni

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=2+3+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=5+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

Mentre se elevi al quadrato $\sqrt{5}$ ottieni 5!

• Moltiplicazione e divisione

a) Radicali con lo stesso indice

Esempio: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=?$

Proviamo a scrivere $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}$: se eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza otteniamo

$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})^2=2\cdot 3$
$(\sqrt{2\cdot 3})^2=2\cdot 3$
E quindi l'uguaglianza è vera.

Quindi in generale

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}}$$

b) Radicali con indice diverso

Esempio: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = ?$

Possiamo provare a ridurli allo stesso indice e poi procedere come nel caso precedente.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}$$

Analogamente per la divisione:

a') $$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

b') $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^2}}$$

"Trasportare fuori" dal segno di radice

Possiamo scrivere in modo diverso $\sqrt{32}$?

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Proprietà della moltiplicazione}}}{=} \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Quindi utilizzando la regola della moltiplicazione "a ritroso" a volte possiamo scrivere in modo diverso un radicale (nel nostro caso *diciamo che abbiamo trasportato un fattore fuori dal segno di radice*).

Questo può essere importante quando dobbiamo sommare o sottrarre radicali (che a prima vista non sembrano simili).

Esempio

$$\sqrt{32} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

- **Potenza di un radicale**

Come risulta la potenza di un radicale?

Per esempio: $(\sqrt{5})^3 = ?$

Poiché abbiamo $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5^3}$ in generale possiamo dire che la potenza di un radicale è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza n-esima del radicando. In simboli:

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

- **Radice di un radicale**

E se dobbiamo calcolare la radice di un radicale?

Come risulterà, per esempio:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = ?$$

Proviamo a vedere se $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$
Elevando alla sesta entrambi i membri abbiamo lo stesso risultato:

$$(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6 = [(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3]^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(\sqrt[6]{2})^6 = 2$$

Quindi in generale la radice m-esima di un radicale con indice n sarà un radicale che ha per indice il prodotto $m\cdot n$ e lo stesso radicando

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}}$$

Osservazione: è chiaro che $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2}}$ cioè in generale

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

"Razionalizzazione" del denominatore di una frazione

I. Consideriamo la frazione $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Possiamo trasformarla in una frazione equivalente che non abbia radici al denominatore?

Possiamo moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{2}$ e otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

E se fosse stato $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$?

In questo caso moltiplicando per $\sqrt[3]{2}$ avrei ottenuto al denominatore $\sqrt[3]{2^2}$ e non mi sarei "sbarazzato" del radicale. Moltiplicando però per $\sqrt[3]{2^2}$ ….

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

In generale quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

II. A volte si trovano frazioni del tipo $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Come possiamo, in questo caso, "razionalizzare" il denominatore?

Ricordando il prodotto notevole $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ possiamo moltiplicare per $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ numeratore e denominatore

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}\cdot\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(-1)}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Analogamente, se avessimo avuto $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

moltiplicando per $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(-1)}=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Radicali e potenze con esponente razionale

I radicali possono essere anche scritti come potenze con esponente razionale e le **proprietà usuali delle potenze corrispondono alle proprietà che abbiamo visto per i radicali**.
Scriviamo

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0)$$

Per esempio:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{4}}$$

Osserviamo che

- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}}$

Infatti $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

Infatti $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5}$

- $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = (\dfrac{5}{2})^{\frac{1}{3}}$

Infatti $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$

Infatti $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{2}$

- $(\sqrt{2})^3 = (2^{\frac{1}{2}})^3 = 2^{\frac{3}{2}}$

- $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$

Infatti $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

RADICALI LETTERALI

CAMPO DI ESISTENZA DI UN RADICALE LETTERALE

Radicali con indice pari

Abbiamo visto che il radicando deve essere positivo o nullo. Se quindi abbiamo

$$\sqrt{a-1}$$

dovrà essere $a-1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

$a \geq 1$ viene chiamato **campo di esistenza** del radicale $\sqrt{a-1}$.

Radicali con indice dispari

Se l'indice è dispari il radicando può essere negativo, positivo o nullo. Se per esempio abbiamo

$$\sqrt[3]{a-1}$$

non c'è nessuna limitazione per a e quindi il campo di esistenza è l'insieme dei numeri reali:

$$\text{C.E. } \forall a \in \Re$$

Naturalmente se consideriamo un'espressione letterale contenente delle *frazioni*, i denominatori dovranno essere diversi da zero.

Per esempio il campo di esistenza di $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a-1}}$ sarà $a \neq 1$ (tutti i valori di a escluso $a=1$).

OPERAZIONI CON RADICALI LETTERALI

Dobbiamo premettere la seguente definizione:

Valore assoluto di un numero reale: il valore assoluto di un numero reale x è indicato con la notazione $|x|$ ed è definito:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Quindi $|x|$ è sempre positivo o nullo.

Esempi

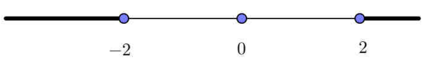
$|5| = 5$

$|-3| = -(-3) = +3$

$|x| = 2 \Rightarrow x = -2 \cup x = 2$

Se abbiamo $|x| < 2$ vuol dire che $-2 < x < 2$

Se abbiamo $|x| > 2$ vuol dire che $x < -2 \cup x > 2$



OSSERVAZIONE IMPORTANTE

- $\sqrt{x^2}$ è uguale a x?

Osserviamo che, per esempio che $\sqrt{3^2} = 3$ e che $\sqrt{(-3)^2} = 3$
Quindi, solo se $x \geq 0$ vale $\sqrt{x^2} = x$, mentre se $x < 0 \rightarrow \sqrt{x^2} = -x$.

Quindi, ricordando la definizione di valore assoluto di un numero, abbiamo che:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Lo stesso vale per $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ ecc…, cioè

$$\textbf{se } n \textbf{ è pari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

- $\sqrt[3]{x^3}$ è uguale a x?

Osserviamo che, per esempio, $\sqrt[3]{3^3} = 3$ e $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

Quindi in questo caso $\sqrt[3]{x^3} = x$ e in generale

$$\textbf{se } n \textbf{ è dispari} \rightarrow \sqrt[n]{x^n} = x$$

Trasporto fuori dalla radice

Quando trasportiamo fuori dalla radice occorre ricordare quanto sopra osservato.

Per esempio:

- $\sqrt{a^3 + a^2} = \sqrt{a^2(a+1)} = |a|\sqrt{a+1}$ (C.E. $a \geq -1$)
- $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt{a}$ (non importa mettere $|a^2|$ perché $a^2 \geq 0$; C.E. $a \geq 0$)

Se l'indice è dispari non ci sono particolari problemi

- $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a} = a \cdot \sqrt[3]{a}$
- $\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

ESERCIZI

1) **Trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili**

a) $\sqrt{24}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[5]{64}$

b) $\sqrt{18}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

2) **Svolgi le operazioni tra radicali**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{2}$ [$4\sqrt{2}$]

b) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}$ [$\sqrt[3]{2}$]

c) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{36}$ [$3+\sqrt{6}$]

d) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$ [$2\sqrt[3]{3}$]

e) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{15}$ [$2\sqrt{30}$]

f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$ [$\sqrt[6]{2^3\cdot 5^2}$]

g) $\sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{2}$ [$5\sqrt[6]{2^5}$]

h) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$ [$\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$]

i) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{3}}$ [$2\sqrt[6]{\dfrac{4}{27}}$]

l) $(\sqrt{3})^3$ [$3\sqrt{3}$]

m) $(\sqrt[4]{8})^2$ [$2\sqrt{2}$]

n) $\sqrt{\sqrt{3}}$ [$\sqrt[4]{3}$]

o) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ [$\sqrt[6]{2}$]

3) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$ [0]

4) $2\sqrt{3}-\sqrt{48}-\sqrt{27}$ [$-5\sqrt{3}$]

5) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{72}$ [$6\sqrt{2}$]

6) $2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{32}+3\sqrt{27}-\sqrt{18}+3\sqrt{\frac{2}{9}}$ $\quad [\frac{23}{2}\sqrt{3}-10\sqrt{2}]$

7) $\sqrt{\frac{3}{9}}+\frac{1}{10}\sqrt{125}-\frac{1}{4}\sqrt{20}+\sqrt{45}-\frac{1}{3}\sqrt{12}$ $\quad [3\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{3}]$

8) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{12}-\sqrt{6})\sqrt{12}$ $\quad [6(\sqrt{6}-\sqrt{2}+4)]$

9) $(2\sqrt{7}-3)(2\sqrt{7}+3)-(\sqrt{7}+1)^2-(\sqrt{7}-2)^2$ $\quad [2\sqrt{7}]$

10) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(2\sqrt{5}+\sqrt{3})$ $\quad [17]$

11) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ $\quad [1]$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}-\sqrt{8}$ $\quad [\frac{3}{2}\sqrt{2}]$

13) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\sqrt{45}$ $\quad [\frac{10\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}]$

14) $(\sqrt[3]{2})^4+\sqrt[3]{54}$ $\quad [5\sqrt[3]{2}]$

15) $\sqrt{18}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\sqrt{32}}$ $\quad [2\sqrt[6]{32}]$

16) $\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt{2}}+\sqrt{10}$ $\quad [\frac{3}{2}\sqrt{10}]$

17) $\sqrt{\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ $\quad [\frac{5}{2}\sqrt[4]{2}]$

18) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\sqrt{8}$ $\quad [\sqrt{2}-1]$

19) $2\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{125}-3\sqrt{20}+8\sqrt{5}$ $\quad [\frac{3}{2}\sqrt{5}]$

20) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ $\quad [\frac{21}{2}\sqrt[3]{3}]$

21) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ $\quad [-4-\sqrt{6}]$

22) $(1-2\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2-3$ $\quad [12]$

23) $\dfrac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-\frac{\sqrt{2}}{2}}+(1-\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$ $\qquad [\dfrac{30-17\sqrt{2}}{7}]$

24) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{2})^2$ $\qquad [2\sqrt{2}-2]$

25) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(3\sqrt{2}+1)$ $\qquad [\sqrt{2}-4]$

26) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right):\dfrac{2}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$ $\qquad [0]$

27) $[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^2-(2-\sqrt[4]{4})^2-4\sqrt{2}$ $\qquad [-5]$

28) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$ $\qquad [\dfrac{3\sqrt{3}-6}{5}]$

29) $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$ $\qquad [10]$

30) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}\cdot\dfrac{2+2\sqrt{5}}{2}+\sqrt{20}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$ $\qquad [\dfrac{5+11\sqrt{5}}{4}]$

31) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{32}$ $\qquad [\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{4}]$

32) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ $\qquad [\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-4}{2}]$

33) **Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,;\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\,;\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\,;\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$

34) **Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\,;\qquad \dfrac{3}{\sqrt{7}+1}\,;\qquad \dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$ $\qquad [\sqrt{2}+1\,;\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\,;\sqrt{6}+1]$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$; $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}$ [$\sqrt{5}-1$; $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; $5(\sqrt{3}+1)$]

35) **Determina il campo di esistenza dei seguenti radicali**

a) $\sqrt{2a-3}$ [$a \geq \dfrac{3}{2}$]

b) $\sqrt[4]{a^2-2a+1}$ [$\forall a \in \Re$]

c) $\sqrt{a+1}$ [$a \geq -1$]

36) **Determina il campo di esistenza dei seguenti radicali**

a) $\sqrt[3]{a+2}$ [$\forall a \in \Re$]

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$ [$a \neq 0$]

c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2-2a+1}}$ [$a \neq 1$]

37) $(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)$ [C.E. $a \geq 0$; $a-4$]

38) $(\sqrt{2a}+\sqrt{3a})^2$ [C.E. $a \geq 0$; $(5+2\sqrt{6})a$]

39) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-2a+1}} \cdot \sqrt{a-1}$ [C.E. $a > 1$; $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}$]

40) $\sqrt[3]{a^3 b} + \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt[6]{b^2}$ [$\dfrac{3}{2} a \cdot \sqrt[3]{b}$]

41) $\sqrt[3]{a^3-3a^2+3a-1}+2-a$ [1]

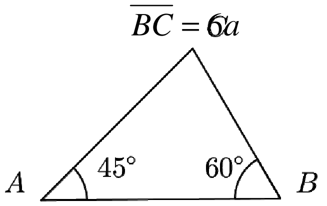
42) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+4}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}$ [C.E. $x < -4 \cup x > 2$; $\dfrac{1}{\sqrt{(x+4)\cdot(x-2)}}$]

Problemi

43) In un triangolo isoscele ABC la base $\overline{BC} = 12cm$ e $\hat{A} = 120°$. Determinare perimetro e area del triangolo.

[$2p = 8\sqrt{3} + 12cm$; $A = 12\sqrt{3}cm^2$]

44) Considera il triangolo ABC in figura. Determina perimetro e area del triangolo.

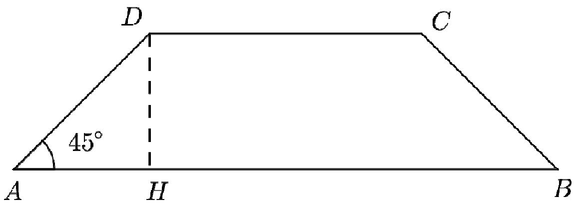


[$2p = 3a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$; $A = \dfrac{9a^2(3+\sqrt{3})}{2}$]

45) L'area di un esagono regolare è $216\sqrt{3}cm^2$. Determinare il perimetro.

[$2p = 72cm$]

46) Considera il trapezio isoscele in figura. Determina perimetro e area.



$\overline{DH} = 16cm$

$\overline{DC} = 20cm$

[$2p = 72 + 32\sqrt{2}cm$; $A = 576cm^2$]

47) Considera un trapezio isoscele $ABCD$ avente base minore $\overline{CD} = 10a$, lato obliquo $\overline{AD} = \overline{BC} = 12a$ e gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano $30°$. Determina perimetro e area del trapezio.

[$2p = 44a + 12a\sqrt{3}$; $A = 12a^2(5 + 3\sqrt{3})$]

48) Considera un triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$. Sapendo che $B\hat{A}C = 30°$, determina perimetro e area del triangolo.

[$2p = (3 + \sqrt{3})r$; $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2$]

49) Considera i punti $A(2;2)$, $B(8;5)$, $C(-1;8)$.

a) Determina perimetro e area del triangolo *ABC*.

b) Detto M il punto medio di BC, determina $\overline{AM}$ e verifica che $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

[$2p = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{10}$; $A = \frac{45}{2}$; $\overline{AM} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$]

50) Considera le rette $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 2x - 6$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Determina i loro punti di intersezione *A, B, C, D*.

Come risulta il quadrilatero *ABCD*? Calcola perimetro a area.

[$2p = 8\sqrt{5}$; $A = 12$]

51) Considera i punti $A(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$, $B(\frac{9}{2};\frac{3}{2})$, $C(2;4)$.

Determina perimetro e area del triangolo *ABC*. Come risulta il triangolo *ABC*?

Detto M il punto medio di AB, calcola $\overline{CM}$. La retta per C e M è perpendicolare alla retta per A e B?

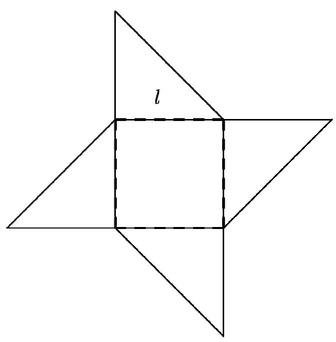
[$2p = 5\sqrt{2} + \sqrt{10}$; $A = 5$]

52) Considera il triangolo di vertici $A(-1;2)$, $B(3;0)$, $C(3;6)$ e determina il baricentro *G*.

Detto M il punto medio di AC, verifica che $\overline{BG} = 2\overline{GM}$.

[$BG = \frac{4\sqrt{5}}{3}$; $GM = \frac{2\sqrt{5}}{3}$]

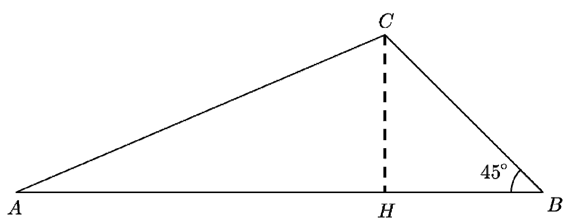
53) Considera il disegno in figura e calcola perimetro e area.



(lato del quadrato = l)

[$2p = 4(\sqrt{2} + 1)l$; $A = 3l^2$]

54) Considera il triangolo *ABC* in figura. Determina perimetro e area del triangolo.



$\overline{CH} = 2$

$\overline{AC} = 6$

[$2p = 6\sqrt{2} + 8$; $A = 4\sqrt{2} + 2$]

Scheda 1

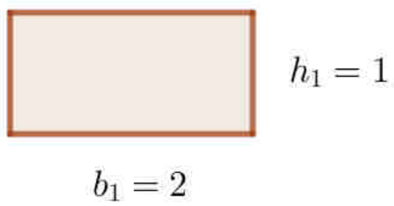
Calcolo della radice quadrata di un numero con il metodo di Erone

Vediamo il metodo ideato dal matematico greco Erone di Alessandria (vissuto nel I secolo d. C.) per calcolare la radice quadrata di un numero positivo *k*.
Il numero *x* tale che $x^2 = k$ da un punto di vista geometrico corrisponde al lato *x* di un quadrato di area *k*.

Consideriamo per esempio $k = 2$: vogliamo trovare il lato di un quadrato che abbia area 2.

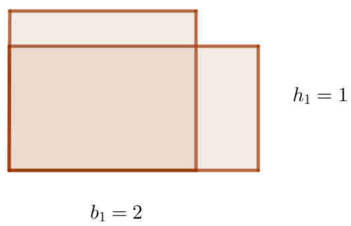
Possiamo partire da un rettangolo di area 2 e cercare di passare ad un successivo rettangolo di area uguale ma in cui le dimensioni diventino via via più uguali cioè che si avvicini ad un quadrato.

Come primo rettangolo prendiamo per esempio un rettangolo di base $b_1 = 2$: la sua altezza, perché abbia area 2, dovrà essere $h_1 = \frac{2}{b_1} = \frac{2}{2} = 1$.



Per avvicinarsi ad un quadrato possiamo prendere la **media aritmetica** delle due dimensioni come base del successivo rettangolo e ricalcolare l'altezza in modo che l'area ancora 2:

$$b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5; \quad h_2 = \frac{2}{b_2} \cong 1{,}33$$



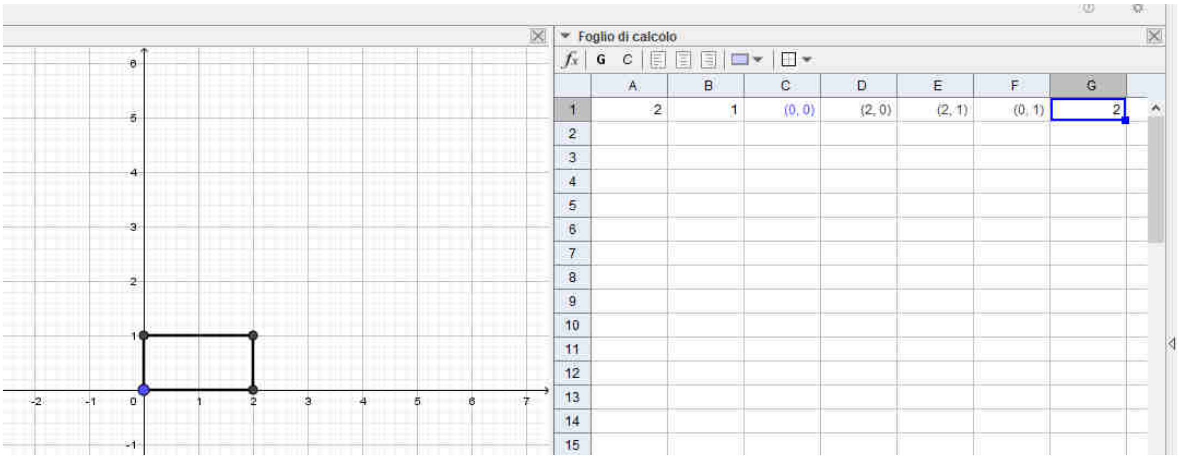
Possiamo procedere con lo stesso metodo per determinare le dimensioni del rettangolo successivo:

$$b_3 = \frac{b_2 + h_2}{2} \cong 1{,}4166; \quad h_3 = \frac{2}{b_3} \cong 1{,}4117$$

Osserviamo che la differenza tra *b* e *h* solo già al terzo passo è molto piccola!

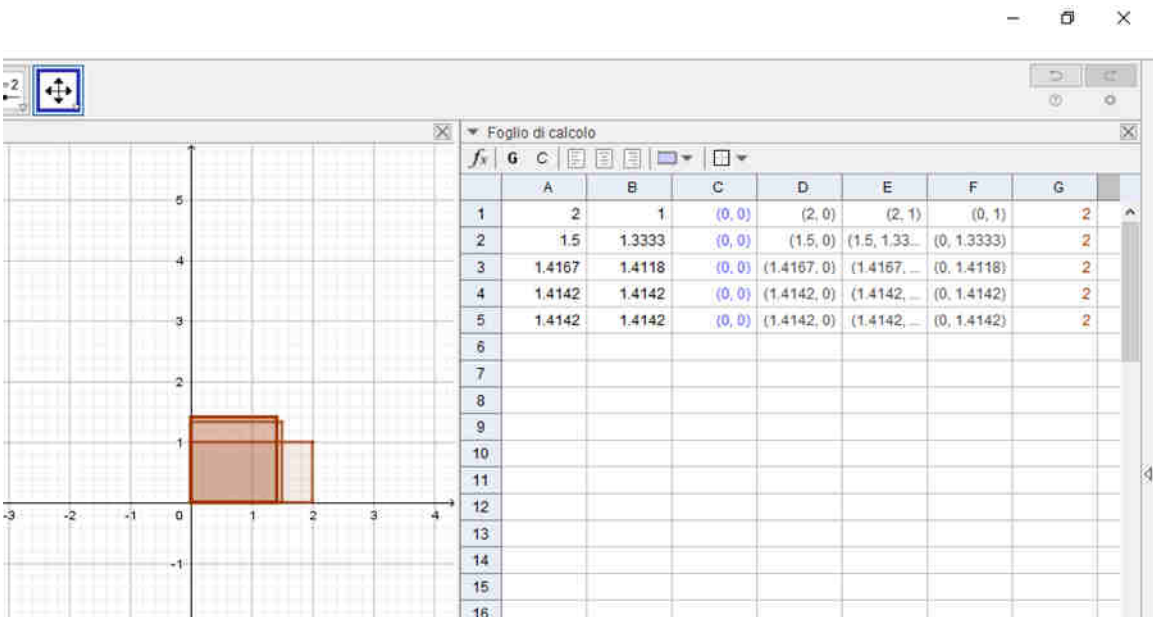
Se per esempio ci accontentiamo di un'approssimazione $\sqrt{2}$ alla seconda cifra decimale possiamo già fermarci poiché la seconda cifra decimale delle due dimensioni è la stessa e scriveremo che $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, mentre se vogliamo avere un'approssimazione più precisa, per esempio alla terza cifra decimale, dobbiamo andare avanti con il nostro metodo.

Esercizio: utilizziamo il **foglio di calcolo di Geogebra** e disegniamo anche i rettangoli corrispondenti.
Apriamo il foglio di calcolo (visualizza “foglio di calcolo”) e nel piano cartesiano scegliamo “etichettatura- nessun nuovo oggetto”.
Inseriamo nella cella A1 la base 2, nella cella B1 altezza $2/a1$, e nelle celle C1, D1, E1, F1 le coordinate dei vertici del primo rettangolo (0,0) (a1,0) (a1,b1) (0,b1) mentre nella cella G1 scriviamo il comando poligono(c1,d1,e1,f1): comparirà il primo rettangolo (vedi figura).



Inseriamo in a2 la media aritmetica di a1 e b1 cioè **(a1+b1)/2** e nella cella b2 **2/a2** e poi nelle celle c2,d2,e2,f2 le coordinate del secondo rettangolo (0,0) (a2,0) (a2,b2) (0,b2) e nella cella G2 il comando poligono (c2,d2,e2,f2).

Selezioniamo le celle da a2 a g2 e trasciniamo con il mouse l’angolo in basso a destra dell’ultima cella per copiare le formule: se per esempio scegliamo opzioni-arrotondamento quarta cifra decimale, vediamo che già con pochi passaggi siamo arrivati ad una corretta approssimazione di $\sqrt{2}$.



Scheda 2
Calcolo della radice cubica di un numero con il metodo di Erone

Cercare un numero x tale che $x^3 = k$ (k positivo) corrisponde a cercare il lato di un cubo di volume uguale a k.

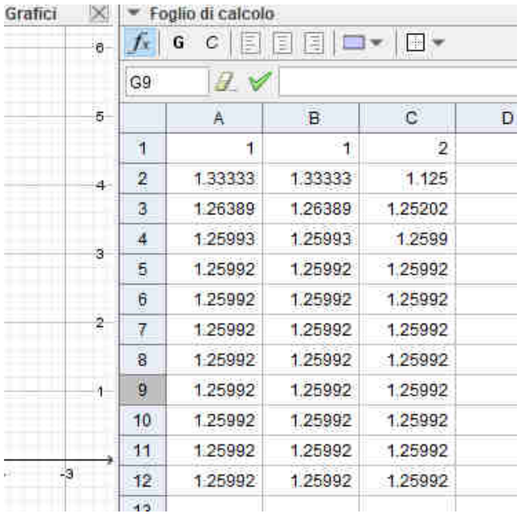
Consideriamo per esempio $k = 2$: possiamo partire con un parallelepipedo di base quadrata di lato $a_1 = b_1 = 1$ (per esempio) e altezza $c_1 = \frac{2}{a_1^2} = 2$.

Possiamo poi prendere un parallelepipedo che abbia come lato del quadrato la media aritmetica delle dimensioni del parallelepipedo precedente $a_2 = b_2 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$ e per altezza $c_2 = \frac{2}{a_2^2}$ in modo che abbia ancora volume 2.

Continuando così si arriva a determinare un'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$.

Esercizio 1

Anche in questo caso prova ad usare il foglio di calcolo di Geogebra per calcolare un'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ fino alla quinta cifra decimale e confronta con il risultato fornito dalla tua calcolatrice.



	A	B	C	D
1	1	1	2	
2	1.33333	1.33333	1.125	
3	1.26389	1.26389	1.25202	
4	1.25993	1.25993	1.2599	
5	1.25992	1.25992	1.25992	
6	1.25992	1.25992	1.25992	
7	1.25992	1.25992	1.25992	
8	1.25992	1.25992	1.25992	
9	1.25992	1.25992	1.25992	
10	1.25992	1.25992	1.25992	
11	1.25992	1.25992	1.25992	
12	1.25992	1.25992	1.25992	

Esercizio 2

Generalizzando il metodo di Erone prova a calcolare un'approssimazione di $\sqrt[4]{2}$ fino alla quinta cifra decimale e confronta il tuo risultato con quello fornito dalla calcolatrice.

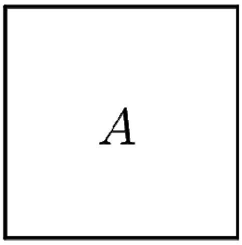
Suggerimento: in questo caso non c'è più un'analogia con la geometria poiché il nostro spazio ha tre dimensioni ma puoi comunque cercare di seguire il procedimento precedente.

$a_1 = b_1 = c_1 = 1; \quad d_1 = \frac{2}{a_1^3};$

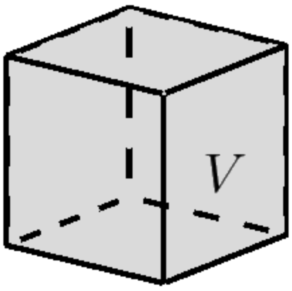
$a_2 = b_2 = c_2 = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \quad d_2 = \frac{2}{a_2^3}$

Scheda 3

a) Considera un quadrato di lato l.
Costruisci un quadrato di area $2A$.



b) Considera un cubo di lato l.
Qual è il lato di un cubo di volume $2V$?

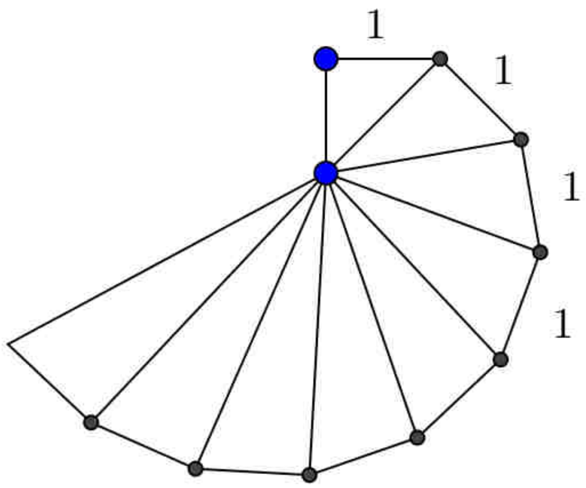


Nota

Questo secondo problema è un problema antico.
Secondo la leggenda, per far cessare la peste, gli ateniesi si rivolsero all'oracolo di Delfi che chiese loro di costruire un altare di Apollo (che aveva forma cubica) di volume doppio del precedente.
Gli ateniesi costruirono un altare di lato doppio, ma la peste non cessò….

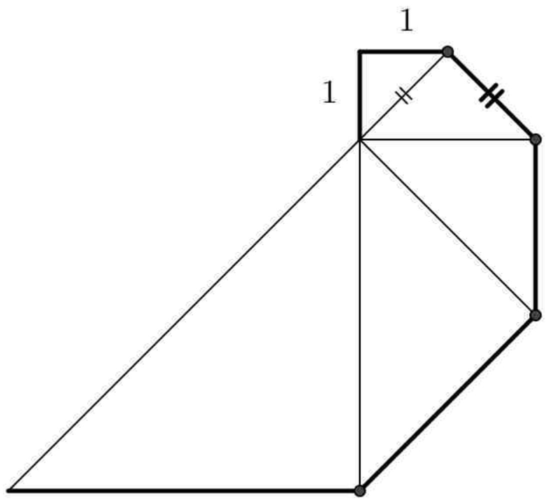
Scheda 4

a) Considera la seguente costruzione:
- disegna un triangolo rettangolo isoscele di cateti uguali a 1;
- a partire da questo disegna un altro triangolo rettangolo avente come cateti l'ipotenusa del primo e 1 (vedi figura);
- ripeti la costruzione (disegnala con Geogebra).



Scrivi come risultano le lunghezze delle ipotenuse dei vari triangoli.

b) Costruisci una nuova spirale disegnando questa volta sempre triangoli rettangoli isosceli (partendo sempre da quello con cateti 1).



Come risulta la lunghezza del contorno indicato in figura?

c) Costruisci una spirale ideando una tua regola di iterazione.

SCHEDA DI VERIFICA

I. Radicali numerici e letterali

1) $\sqrt{20}+3\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)^2$ $[6+3\sqrt{5}]$

2) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{4}+(\sqrt[3]{2}-1)^3$ $[7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4}+1]$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}+(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)+\dfrac{1}{4}\sqrt{125}$ $[\dfrac{6\sqrt{5}+5}{4}]$

4) $\dfrac{1}{2}\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt[4]{32}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $[2\sqrt{2}+3\sqrt[4]{2}]$

5) $\sqrt{\dfrac{a+1}{a^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^3}{a+1}}$ [C.E. $a \geq 0$; $\sqrt{a}$]

6) $\sqrt{4a^2-8a+4}$ $[2|a-1|]$

7) $\sqrt[3]{\dfrac{a^3-6a^2+12a-8}{8a^3}}$ [C.E. $a \neq 0$; $\dfrac{a-2}{2a}$]

8) $\sqrt{x^4 y}+\dfrac{x^2}{2}\sqrt[4]{y^2}$ [C.E. $y \geq 0$; $\dfrac{3}{2}x^2\sqrt{y}$]

9) $\sqrt{c^2a^2+c^2b^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ [C.E. a e b non entrambi nulli; $|c|$]

II. Problemi

1) Considera un trapezio rettangolo *ABCD* avente base maggiore *AB* che forma un angolo di 45° con il lato obliquo.
Sapendo che la base minore è uguale all'altezza e misura *l*, determina perimetro e area del trapezio.

$[2p=(4+\sqrt{2})l\,;\, A=\dfrac{3}{2}l^2]$

2) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza.
Sapendo che il lato obliquo misura *l* e che la base maggiore forma un angolo di 60° con il lato obliquo, determina perimetro, area del trapezio e il raggio della semicirconferenza.

$[2p=5l\,;\, A=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}l^2\,;\, r=\dfrac{l}{2}\sqrt{3}]$