Sistemi di primo grado

Consideriamo il seguente problema:

Determina due numeri la cui somma è 10 e la cui differenza è 1.

Possiamo risolvere questo problema utilizzando due incognite *x, y* per indicare i due numeri cercati.
Avremo quindi che dovrà essere (indicando con *x* il maggiore):

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=1 \end{cases}$$

La parentesi graffa sta ad indicare che le due equazioni devono essere soddisfatte entrambe e diciamo che abbiamo un "sistema" di due equazioni (che in questo caso risulta di primo grado in due incognite).

Ma come possiamo "risolvere" questo sistema di equazioni cioè **determinare i valori di *x* e di *y* che le soddisfano entrambe** ?

Possiamo ricavare l'incognita *x* dalla prima equazione e sostituirla nella seconda equazione, poi continuare a sviluppare la seconda equazione (che contiene a questo punto solo l'incognita *y*) e ricavare alla fine il valore di y.

$$\begin{cases} x=10-y \\ 10-y-y=1 \quad \rightarrow 10-2y=1 \quad \rightarrow 2y=9 \rightarrow y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

A questo punto non ci rimane che sostituire il valore che abbiamo trovato di *y* nella prima equazione e determinare anche il valore dell'incognita *x* :

$$\begin{cases} x=10-\dfrac{9}{2}=\dfrac{11}{2} \\ y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

In conclusione i due numeri sono $\frac{11}{2}$, $\frac{9}{2}$.

METODI DI RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI PRIMO GRADO

Vediamo quindi i metodi con cui possiamo risolvere un sistema di primo grado in due incognite. Innanzitutto è opportuno svolgere eventualmente dei calcoli per portarlo nella forma cosiddetta "normale":

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Consideriamo per esempio il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)+2(y-1)=-\frac{1}{2}x-2 \\ 2(x-3)-(y+1)=x-6 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli per ricondurre il sistema a "forma normale":

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-1+2y-2=-\frac{1}{2}x-2 \rightarrow x+2y-1=0 \\ 2x-6-y-1-x+6=0 \rightarrow x-y-1=0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto: $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$

Vediamo alcuni metodi per risolverlo.

METODO DI SOSTITUZIONE

- Come abbiamo fatto nel primo esempio considerato, ricaviamo una incognita dalla prima o dalla seconda equazione (in genere da quella in cui l'incognita si ricava più facilmente): ricaviamo per esempio la *x* dalla prima equazione

$$\begin{cases} x=-2y+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

- Sostituiamo l'espressione trovata per la *x* nella seconda equazione e, svolgendo i calcoli, determiniamo la *y*

$$\begin{cases} x=-2y+1 \\ -2y+1-y-1=0 \Rightarrow -3y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

- Torniamo nella prima equazione e sostituiamo a *y* il valore trovato, determinando così il valore della *x* e quindi la soluzione del sistema $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

METODO DEL CONFRONTO

Consideriamo sempre il sistema

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

- Ricaviamo la stessa incognita da entrambe le equazioni, per esempio la x

$$\begin{cases} x=-2y+1 \\ x=y+1 \end{cases}$$

- Uguagliamo le due espressioni trovate e determiniamo la y ; riscriviamo inoltre una delle due equazioni

$$\begin{cases} -2y+1=y+1 \Rightarrow y=0 \\ x=y+1 \end{cases}$$

- Sostituiamo il valore trovato per la y nell'altra equazione e troviamo anche la x e quindi la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

METODO DI RIDUZIONE
o di addizione e sottrazione

Conviene utilizzare questo metodo quando un'incognita compare con lo stesso coefficiente nelle due equazioni (o con coefficienti opposti).

- Per esempio nel nostro caso abbiamo l'incognita x compare con lo stesso coefficiente nelle due equazioni: allora sottraiamo "membro a membro" le due equazioni ottenendo un'equazione equivalente che contiene però la sola incognita y

$$\begin{array}{c} \begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-1\ \ =0 \end{cases} \\ \hline /\ \ 3y\ \ /\ \ =0 \end{array}$$

- Combiniamo l'equazione ottenuta con una delle due equazioni del sistema e sostituiamo il valore trovato per la y per determinare la x

$$\begin{cases} 3y=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Nota: se i coefficienti di un'incognita sono opposti si "sommano" membro a membro le equazioni in modo da eliminare un'incognita.

Sistemi determinati, indeterminati, impossibili

Quante soluzioni può avere un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite ?

Dal momento che sia utilizzando il metodo di sostituzione che quello del confronto otteniamo ad un certo punto un'equazione di primo grado in una incognita, se questa è "determinata" (ha una soluzione) avremo una sola soluzione del sistema, se è "indeterminata" (verificata per tutti i valori dell'incognita) anche il sistema sarà indeterminato e se infine l'equazione è impossibile (nessuna soluzione) anche il sistema non avrà nessuna soluzione.

Esempi

1) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y+y=0 \rightarrow 1-y=0 \rightarrow y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2(1)=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi la soluzione $(-1;1)$ e si dice **"determinato**".

2) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y+2y=0 \rightarrow 1=0 \quad \textit{equazione} \quad \textit{impossibile} \end{cases}$$

Il sistema non ha nessuna soluzione e si dice "**impossibile**".

3) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 2(1-2y)+4y=2 \rightarrow 2-4y+4y=2 \rightarrow 2=2 \quad \textit{equazione} \quad \textit{ind.} \end{cases}$$

Il sistema ha quindi infinite soluzioni cioè tutte le coppie (x;y) per cui si abbia che $x=1-2y$ e si dice **"indeterminato**".

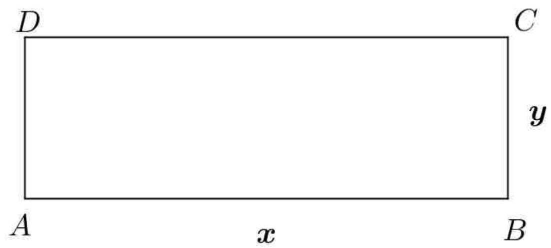
Per esempio:
se fisso $y=0 \rightarrow x=1-2\cdot 0=1$ e quindi la coppia $(1;0)$ è soluzione del sistema;
se fisso $y=1 \rightarrow x=1-2(1)=-1$ e quindi la coppia $(-1;1)$ è un'altra soluzione del sistema e così via…..

Problemi di geometria risolubili con sistemi

Esempio

Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

Indichiamo con x la base e con y l'altezza.



Avremo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ 2y = \frac{2}{3}x \end{cases} \begin{cases} x + y = 24 \to x + \frac{1}{3}x = 24 \to \frac{4}{3}x = 24 \to x = 18 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

Quindi abbiamo: $\begin{cases} x = 18 \\ y = 6 \end{cases}$

COMPLEMENTO

Sistemi di tre equazioni di primo grado in tre incognite

Esempio

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \\ 3x-y+2z=8 \end{cases}$$

Ricaviamo un'incognita da una equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$\begin{cases} x=-y \\ -2y-z=0 \\ -3y-y+2z=8 \Rightarrow -4y+2z=8 \end{cases}$$

Ricaviamo un'altra incognita (tra la seconda e la terza equazione) e sostituiamo:

$$\begin{cases} x=-y \\ z=-2y \\ -4y-4y=8 \Rightarrow -8y=8 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

e sostituendo $y=-1$ avremo:

$$\begin{cases} x=1 \\ z=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

La soluzione è quindi la terna $(1;-1;2)$.

Nota

Naturalmente posso avere sistemi con infinite soluzioni (indeterminati) o nessuna soluzione (impossibili).
Per esempio:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$$ è impossibile

mentre $$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$ ha infinite soluzioni del tipo (x; -x ; 0)

ESERCIZI

1) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ $[(6,3)]$

2) $\begin{cases} 5x+y=20 \\ 5x+7y=20 \end{cases}$ $[(4,0)]$

3) $\begin{cases} x-6y+5=3-7y+10+2x+2 \\ x+y=6-8 \end{cases}$ $[(-6,4)]$

4) $\begin{cases} 5(5x-2)=20x-2(y-3) \\ 2(x-5)-12y=21(1-y) \end{cases}$ $[(2,3)]$

5) $\begin{cases} (x+2)^2-3x+2y=9+x^2 \\ -5x+3(x-3)+x-y=-6 \end{cases}$ $[(-11,8)]$

6) $\begin{cases} x-2=\dfrac{y}{3}-1+\dfrac{x}{2} \\ \dfrac{5x+3y}{6}-3=\dfrac{2x-y}{4}+\dfrac{7}{12} \end{cases}$ $[(4,3)]$

7) $\begin{cases} x-\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{8}y=1 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{1}{3},-4\right)\right]$

8) $\begin{cases} (x+2)^2-1=x^2-5y \\ 4x-1=-y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2},-1\right)\right]$

9) $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ 18x-6y=-1 \end{cases}$ [impossibile]

10) $\begin{cases} y-3x=1 \\ x-\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

11) $\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1)+y-3=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x+1) \end{cases}$ $[(-1,3)]$

12) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ [indeterminato]

13) $\begin{cases} 1-4y-\frac{1}{3}x=0 \\ \frac{2}{3}x+8y=\frac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

14) $\begin{cases} 3x+2(y-4)^2=36+2y^2-15y+2x \\ 3(y-1)+2\left[x-(x-1)^2\right]=-2-2x(x-2) \end{cases}$ $[(3,-1)]$

15) $\begin{cases} (x-2y)^2-(x-y)^2-y(3y-2x)=x+y-2 \\ \frac{2x-y}{3}-\frac{x+2y}{6}-\frac{x-y}{2}=0 \end{cases}$ $[(2,0)]$

16) $\begin{cases} 3y+24+(y-2)^2+4y=4x+y^2+4 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ $[(3,-4)]$

17) $\begin{cases} \frac{2}{3}y+\frac{1}{5}x=5 \\ 2x-\frac{5}{6}y+3=8 \end{cases}$ $[(5,6)]$

18) $\begin{cases} \frac{x+2y}{3}+1=\frac{1}{3} \\ 3x+5y=-4 \end{cases}$ $[(2,-2)]$

19) $\begin{cases} \frac{3}{4}x+y=-2 \\ \frac{4}{5}y+x=2-\frac{x}{2} \end{cases}$ $[(4,-5)]$

20) $\begin{cases} \frac{4}{3}x+\frac{1}{2}y=-\frac{15}{4} \\ \frac{y-x}{2}-1=\frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-3,\frac{1}{2}\right)\right]$

21) $\begin{cases} (x-1)^2 - 3y = x^2 - 7 \\ \dfrac{3x-y}{2} + 3 = y + \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $[(1,2)]$

22) $\begin{cases} \dfrac{2x+4y}{3} + \dfrac{1}{2}x + 1 = 0 \\ 2(5+2x-y) + \dfrac{x+2y}{3} = 0 \end{cases}$ $[(-2,1)]$

23) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{16} - \dfrac{x-y}{4} = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$ $[(3,5)]$

24) $\begin{cases} (x-2)(x+2) + y = (1-x)^2 \\ \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+2}{2} = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{19}{8}, \dfrac{1}{4}\right)\right]$

25) In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo.

$[25cm, 15cm]$

26) Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo sapendo che la somma di $\dfrac{1}{10}$ della maggiore e di $\dfrac{1}{9}$ della minore è 19 cm e che, diminuendo la maggiore di 10 cm e aumentando di 9 cm la minore le due diagonali diventano congruenti.

$[100cm, 81cm]$

27) Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo sapendo che il perimetro è 14 cm e che l'altezza supera la base di 1 cm.

$[5cm]$

28) Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio sapendo che l'area è 32 cm^2, l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm.

$[10cm, 6cm]$

29) In un rombo la somma delle diagonali è 34 cm, i $\frac{3}{4}$ della maggiore superano di 8 cm la minore. Determina il perimetro del rombo.

$[52cm]$

30) Calcola l'area di un triangolo sapendo che i $\frac{3}{5}$ dell'altezza sono 54 cm e che il doppio della base supera di 46 cm l'altezza.

$[3060cm^2]$

31) Il perimetro di un rettangolo è 94 cm e la base supera di 11 cm il doppio dell'altezza. Calcola l'area.

$[420cm^2]$

32) Calcola l'area di un trapezio rettangolo sapendo che il lato obliquo è 10 cm, che la base maggiore è il triplo della minore e che la somma delle basi è 16 cm.

$[48cm^2]$

33) Determina il perimetro di un trapezio isoscele sapendo che la sua area è 52 cm^2, che la base maggiore supera di 6 cm la base minore e che l'altezza è 4 cm.

$[36cm]$

34) L'area di un trapezio rettangolo è 72 cm^2. La somma delle basi è 24 cm e la loro differenza è 8 cm. Determina il perimetro.

$[40cm]$

35) In un trapezio isoscele gli angoli alla base sono di 60° e il perimetro è 35 cm. Sapendo che la base maggiore è $\frac{3}{2}$ della minore, calcola le misure dei lati del trapezio.

$[10cm, 15cm, 5cm, 5cm]$

36) Sappiamo che la somma delle diagonali di un rombo è 66 cm e che la loro differenza è 18 cm. Calcola l'area del rombo.

$[504cm^2]$

37) Il perimetro di un trapezio isoscele è 72 cm. Calcola l'area del trapezio sapendo che il lato obliquo è uguale alla metà della base minore e che la somma dei $\frac{3}{8}$ della base maggiore con il lato obliquo è 22 cm.

$[208cm^2]$

38) Calcola l'area di un trapezio isoscele sapendo che le basi differiscono di 6 cm, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 cm e che il lato obliquo è 5 cm.

[$48cm^2$]

39) Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l'area del rettangolo diminuisce di 2 cm^2.

[8 cm; 4 cm]

40) Calcola il perimetro di un rombo sapendo che le sue diagonali differiscono di $2a$ e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di $5a$.

[$20a$]

41) Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato.

[24 cm^2; 20 cm]

42) In un rombo la diagonale maggiore supera la minore di 6 cm e la somma tra i $\frac{3}{7}$ della maggiore e $\frac{1}{3}$ della minore è 30 cm. Determina le diagonali.

[36 cm; 42 cm]

43) In un trapezio rettangolo la somma delle basi misura $10a$ e la semidifferenza delle lunghezze delle basi è $\frac{2}{3}$ della base minore. Sapendo inoltre che l'altezza è uguale alla base minore determina il perimetro del trapezio.

[$18a$]

TEST
SIMULTANEUS EQUATIONS

1) Thilo and Toby buy some boats and trains from the toy shop.
The cost of one boat is b cents and the cost of one train is t cents.

(a) Toby buys 3 boats and 4 trains for \$5.70. Complete this equation

$3b+4t=$ …………..

(b) Thilo buys 1 boat and 2 trains for \$2.40.Write this information as an equation.

………………………….=……………

(c) Solve your to equations to find the cost of a boat and the cost of a train.You must show all your working.

Cost of a boat = …………..cents
Cost of a train = …………..cents

2) Pens cost p cents and pencils cost q cents.

(a) Aisha buys 3 pens and 5 pencils for \$2.20.Write down an equation representing this cost in cents.

……………………………..=…………

(b) Bishen buys 4 pens and 10 pencils for \$3.50. Write down an equation representing this cost in cents.

……………………………..=…………

(c) Solve your equations to find the value of p and the value of w.

$p =$ …………..cents
$q =$ …………..cents

3) Solve the simultaneous equations.

$3x + 2y = 18$
$2x – y = 19$

$x =$ …………..
$y =$ …………..