Equazioni fratte

Un'equazione si dice fratta se l'incognita compare in almeno un denominatore.

Occorre quindi **considerare le condizioni di esistenza** e **la soluzione sarà accettabile solo se rispetta le condizioni di esistenza.**

Esempi

1) $\frac{x-2}{x+3}=0$ C.E. $x\neq -3$

La soluzione si ottiene ponendo uguale a zero il numeratore della frazione algebrica cioè:

$x-2=0 \rightarrow x=2$ ed è accettabile.

2) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$ C. E. $x\neq 2$

Poniamo uguale a zero il numeratore: $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$

Solo $x=-2$ è accettabile.

3) $\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$, C.E. $x\neq 1$

Sviluppiamo: $\frac{x+x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1} \rightarrow \frac{2x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1} \rightarrow 2x-1=1 \rightarrow 2x=2 \rightarrow x=1$

Ma $x=1$ **non è accettabile** e quindi l'equazione è impossibile.

4) $\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x-3}+1$, C.E. $x\neq 2$, $x\neq 3$

$$\frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x-2+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\cancel{x^2}\cancel{-3x}=x-2+\cancel{x^2}\cancel{-3x}-2x+6$$

$0=x-2-2x+6 \quad \rightarrow \quad 0=-x+4 \rightarrow x=4$ ed è accettabile.

5) $\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=2$, C.E. $x\neq \pm 1$

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x-1}=2 \rightarrow \frac{3+x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} \rightarrow x+4=2x^2-2 \rightarrow 2x^2-x-6=0$$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm 7}{4} \rightarrow x_1=2, \quad x_2=-\frac{3}{2}$ entrambe accettabili

ESERCIZI
Equazioni fratte

1) $\frac{x-1}{x+5}-4=0$; $\frac{3x-9}{2x-6}=0$ $[-7\ ;\ impossibile]$

2) $\frac{2(x-1)}{x+2}=1$; $\frac{1}{4-x}-\frac{2x}{x-4}=0$ $\left[4\ ;\ -\frac{1}{2}\right]$

3) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{4-x}=0$ $\left[\frac{6}{5}\right]$

4) $\frac{x^2}{x-3}-x-1=\frac{1}{2}$ $[-3]$

5) $\frac{x}{2x+2}+x+1=\frac{x^2}{x+1}$ $\left[-\frac{2}{5}\right]$

6) $x+\frac{4}{4-x}=\frac{x}{4-x}+x+4$ $[impossibile]$

7) $\frac{5}{2-2x}-\frac{x}{x^2-2x+1}=0$ $\left[\frac{5}{7}\right]$

8) $\frac{x-1}{x^2+3x}+\frac{2}{x}+\frac{9}{2x+6}=0$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$

9) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{7}{x-1}=\frac{1}{x+1}$ $\left[-\frac{5}{3}\right]$

10) $\frac{6x+1}{x^2-4}-\frac{6}{x}=\frac{3}{x^3-4x}$ $[-21]$

11) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}=1$ $\left[x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

12) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=1$ $\left[x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}\right]$

13) $2-\frac{5}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$ $\left[x_1=-\frac{5}{2},\quad x_2=3\right]$

14) $\frac{9}{x-2}=3$ $[5]$

15) $\frac{6x+9}{x-1}=0$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

16) $\frac{3(x-1)}{2x-2}=1$ $[\textit{impossibile}]$

17) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}$ $[0]$

18) $\frac{x}{x+3}+\frac{x-1}{x-3}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2-9}$ $[4]$

19) $\frac{7}{x-6}+\frac{5}{4-x}=0$ $[-1]$

20) $\frac{2x+1}{x}+\frac{x}{x+1}=3$ $[\textit{impossibile}]$

21) $\frac{2}{x^2+4x}=\frac{x+3}{x+4}+\frac{3-x}{x}$ $[-5]$

22) Il rapporto fra la somma di tre numeri consecutivi e la differenza fra il primo numero e 5 è uguale a 9. Determina i tre numeri.

[8, 9, 10]

23) In un rettangolo la base è i $\frac{4}{3}$ dell'altezza e il rapporto tra il perimetro e l'altezza aumentata di 4 cm è $\frac{14}{5}$. Calcola l'area del rettangolo.

[48 cm^2]

24) In un rombo la somma delle diagonali è di 42 cm. Trova il perimetro e l'area del rombo sapendo che il rapporto della somma della diagonale maggiore con i $\frac{2}{5}$ della minore e il doppio della maggiore è $\frac{13}{20}$.

[60 cm; 216 cm^2]

Disequazioni fratte

1) Consideriamo per esempio la disequazione

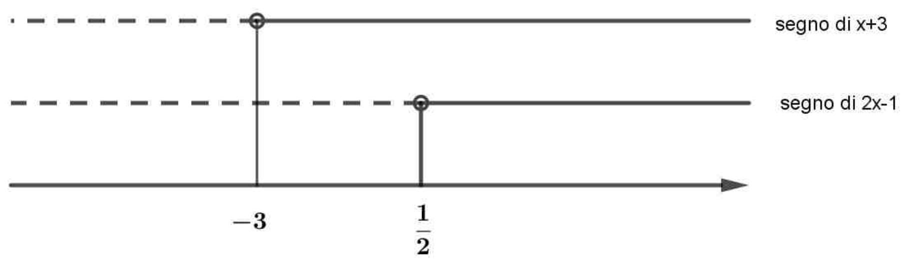
$$\frac{2x-1}{x+3} > 0$$

Per risolverla possiamo studiare il segno dei due fattori, cioè:

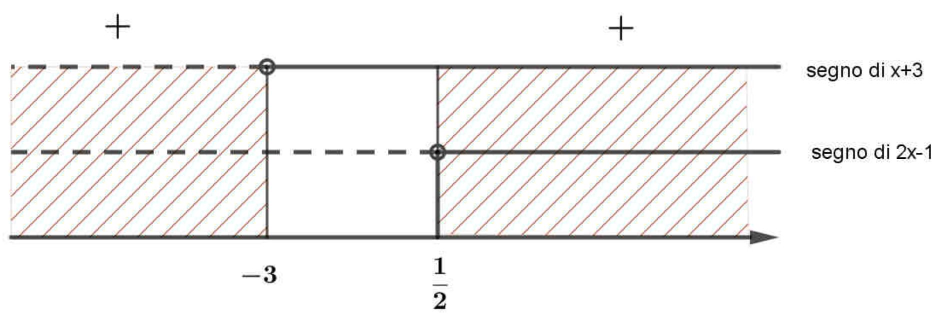
$$2x-1>0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$
$$x+3>0 \rightarrow x > -3$$

Possiamo rappresentare in un grafico detto "**grafico dei segni**" la situazione, **indicando per convenzione con una linea continua l'intervallo di numeri reali in cui un fattore ha segno positivo e con una linea tratteggiata l'intervallo in cui ha segno negativo**.

Nel nostro caso abbiamo il seguente grafico dei segni:



NOTA:attenzione ad ordinare correttamente i numeri sulla retta numerica.
A questo punto **per la regola dei segni** avremo un quoziente positivo quando numeratore e denominatore sono entrambi positivi o negativi e quindi in conclusione otteniamo:



La soluzione della disequazione è

$$x < -3 \cup x > \frac{1}{2}$$

NOTA

Se nella disequazione compare il segno di uguaglianza, cioè se per esempio dobbiamo risolvere

$$\frac{2x-1}{x+3} \geq 0$$

dobbiamo includere nella soluzione anche i valori di x che annullano il numeratore ma non quelli che annullano il denominatore perché il C.E. della frazione algebrica è $x \neq -3$

In questo caso abbiamo come soluzione

$$x < -3 \cup x \geq \frac{1}{2}$$

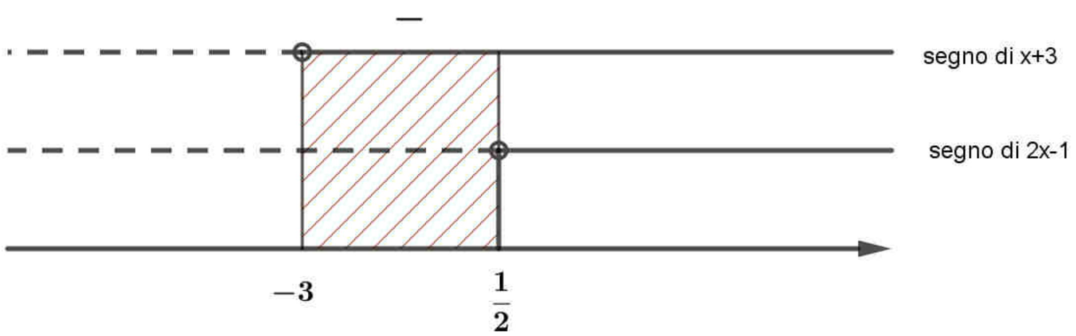
2) Consideriamo la disequazione

$$\frac{2x-1}{x+3} < 0$$

Per studiare il segno dei fattori del prodotto procediamo come prima:

$$2x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$
$$x+3 > 0 \rightarrow x > -3$$

In questo caso però vogliamo determinare **quando il prodotto è negativo** e quindi un fattore deve essere positivo e l'altro negativo ed abbiamo:



La soluzione della disequazione è in questo caso

$$-3 < x < \frac{1}{2}$$

che si legge x compreso tra -3 e $\frac{1}{2}$.

NOTA

Anche in questo caso se dovessimo risolvere $\frac{2x-3}{x+3} \leq 0$ avremmo $-3 < x \leq \frac{1}{2}$.

3) Consideriamo $$\frac{1}{2-x}-\frac{3}{4-x^2}<0$$

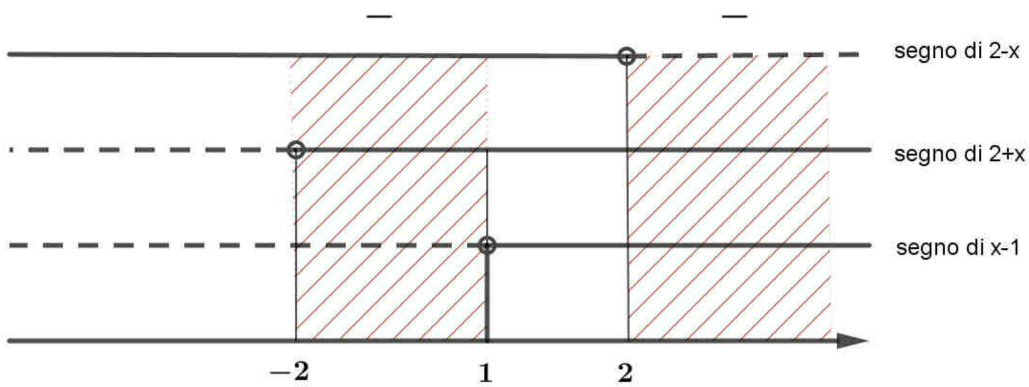
Innanzitutto svolgiamo i calcoli per ricondurci ad una disequazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ (N sta per numeratore e D per denominatore).

$$\frac{1}{2-x}-\frac{3}{(2-x)\cdot(2+x)}<0 \rightarrow \frac{2+x-3}{(2-x)\cdot(2+x)}<0 \rightarrow \frac{x-1}{(2-x)\cdot(2+x)}<0$$

A questo punto studiamo il segno di $x-1, \quad 2-x, \quad 2+x$:

$$x-1>0 \rightarrow x>1$$
$$2-x>0 \rightarrow x<2$$
$$2+x>0 \rightarrow x>-2$$

Riportiamo il segno delle tre parentesi e scegliamo le zone in cui la combinazione dei segni dà un risultato negativo:



In conclusione la soluzione della disequazione è

$$-2<x<1 \quad \cup \quad x>2$$

NOTA

Se avessimo dovuto risolvere la disequazione $\frac{1}{2-x}-\frac{3}{4-x^2}\leq 0 \rightarrow \frac{x-1}{(2-x)\cdot(2+x)}\leq 0$ avremmo dovuto aggiungere solo $x=1$ e quindi la soluzione sarebbe stata

$$-2<x\leq 1 \quad \cup \quad x>2 \ .$$

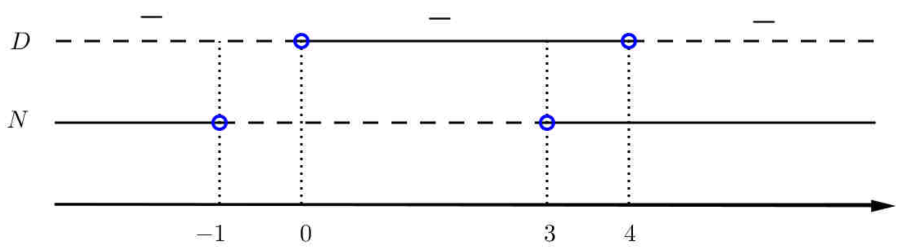
4) Consideriamo $$\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore:

N>0 $\quad x^2 - 2x - 3 > 0 \quad (x_{1,2} = 1 \pm 2) \rightarrow x < -1 \cup x > 3$

D>0 $\quad 4x - x^2 > 0 \rightarrow x(4 - x) > 0, \quad (x_1 = 0, x_2 = 4) \rightarrow 0 < x < 4$

Grafico dei segni:



Poiché dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$ la soluzione sarà: $x < -1 \cup 0 < x < 3 \cup x > 4$.

NOTA 1

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} \leq 0$, dobbiamo considerare tra le soluzioni anche $x = -1$ e $x = 3$, ma non $x = 0$ e $x = 4$ perché per quei valori il denominatore si annulla (C.E. della frazione algebrica: $x \neq 0, x \neq 4$).

La soluzione risulta quindi:

$$x \leq -1 \cup 0 < x \leq 3 \cup x > 4$$

NOTA2

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$, il procedimento sarebbe stato lo stesso solo che alla fine, dal grafico dei segni, avremmo considerato i valori di x che danno segno complessivo positivo.

La soluzione di $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$ risulta quindi:

$$-1 < x < 0 \cup 3 < x < 4$$

ESERCIZI
Disequazioni fratte

1) $\dfrac{2x+1}{x+2}>0$ $\quad$ [$x<-2 \quad \cup \quad x>-\dfrac{1}{2}$]

2) $\dfrac{3-x}{x^2-2x+1}>0$ $\quad$ [$x<3, \quad x\neq 1$]

3) $\dfrac{3}{2-x}-\dfrac{1}{2+x}\leq 0$ $\quad$ [$-2<x\leq -1 \quad \cup \quad x>2$]

4) $\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{2}{9x^2-1}\geq 0$ $\quad$ [$-1\leq x<-\dfrac{1}{3} \quad \cup \quad x>\dfrac{1}{3}$]

5) $\dfrac{1}{x^2-4x+4}+\dfrac{3}{x-2}\geq 0$ $\quad$ [$x\geq \dfrac{5}{3}, \quad x\neq 2$]

6) $\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{1}{x^2-25}<0$ $\quad$ [$x<-5 \quad \cup \quad -\dfrac{14}{3}<x<5$]

7) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{9-x^2}>0$ $\quad$ [$-3<x<-1 \quad \cup \quad x>3$]

8) $\dfrac{2}{4x-3}+\dfrac{1}{x+1}>0$ $\quad$ [$-1<x<\dfrac{1}{6} \quad \cup \quad x>\dfrac{3}{4}$]

9) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x+1}<0$ $\quad$ [$-1<x<1 \quad \cup \quad x>\dfrac{5}{3}$]

10) $\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{2}{3-x}>0$ $\quad$ [$x<3 \quad \cup \quad \dfrac{13}{3}<x<5$]

11) $\dfrac{1}{x^2-10x+25}-\dfrac{2}{x-5}<0$ $\quad$ [$x>\dfrac{11}{2}$]

12) $\dfrac{x}{9x^2-6x}>0$ $\quad$ $\left[x>\dfrac{2}{3}\right]$

13) $\dfrac{x^2+4x-5}{2x-3}<0$ $\left[x<-5 \cup 1<x<\dfrac{3}{2}\right]$

14) $\dfrac{2}{x+5}\leq 0$ $[x<-5]$

15) $\dfrac{5}{3x+4}\geq 1$ $\left[-\dfrac{4}{3}<x\leq\dfrac{1}{3}\right]$

16) $\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{3}{4x-8}\geq\dfrac{5}{3x-6}$ $\left[-\dfrac{11}{12}\leq x<2\right]$

17) $\dfrac{11}{2x+3}>\dfrac{5}{2-x}$ $\left[-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{1}{3} \quad \cup \quad x>2\right]$

18) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}<\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{4}{x}$ $[-2<x<0 \quad \cup \quad 1<x<5]$

19) $\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{x+1}>\dfrac{2}{x+1}$ $[-3<x<-1 \quad \cup \quad 0<x<4]$

20) $\dfrac{2x^2-3x}{2x^2}\leq 0$ $\left[0<x\leq\dfrac{3}{2}\right]$

21) $\dfrac{4x^2+5x}{3x^2}\geq 0$ $\left[x\leq-\dfrac{5}{4} \quad \cup \quad x>0\right]$

22) $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x}{x+2}>\dfrac{x+1}{6+x-x^2}$ $\left[x<-2 \quad \cup \quad \dfrac{1}{3}<x<2 \quad \cup \quad x>3\right]$